

TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

Ustedes saben ya describir una partícula cuántica

No relativista:

$$\vec{x}, \vec{p} \rightarrow \hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}} \text{ con } [\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\hbar \delta^{ij} \quad (\hbar=1) \quad \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{Hamiltoniano } H = \vec{p}^2 / 2m \rightarrow \hat{H} = \hat{\vec{p}}^2 / 2m$$

Los estados con energía definida son $|\vec{p}\rangle$ con $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$.
 ↑ momento definido

Para una partícula relativista sabemos que

$$p^\mu \equiv (E, \vec{p}) = (m\gamma, m\gamma\vec{v}) \quad (c=1)$$

↑ $1/\sqrt{1-v^2}$

satisface

$$p^2 \equiv p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu \equiv E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad \leftrightarrow \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

↑ métrica de Minkowski = diag(+1, -1, -1, -1)

así que para una partícula cuántica relativista $\hat{H} = \sqrt{\hat{\vec{p}}^2 + m^2}$,

y los estados con energía definida son $|\vec{p}\rangle$ con $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Más en general, Wigner demostró que cualquier partícula cuántica relativista tiene siempre 2 propiedades básicas,

masa m y espín j ($0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$), con estados $|\vec{p}, s\rangle$.
 ↑ espín de espín

↑ número que determina cómo cambia bajo transformaciones de Lorentz

Aunque dista mucho de ser obvio, resulta que

Partículas + Relatividad Especial + Mecánica Cuántica
 = Teoría Cuántica de Campos

¿Por qué campo? La respuesta corta: ¡porque el universo no está hecho de partículas, sino de campos!!

¿Qué es un campo? Por definición, un campo es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante del tiempo (matemáticamente, una función del espaciotiempo): $\varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi_{\vec{x}}(t)$

preferimos esta notación \rightarrow

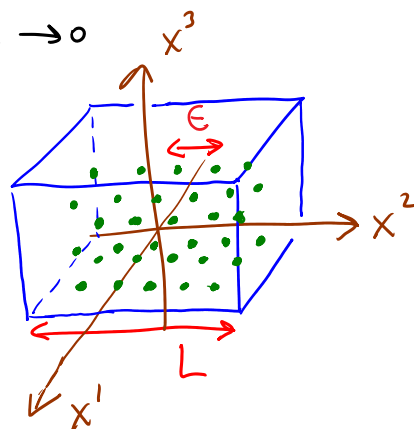
por relatividad

(Análogo a $\vec{X}_n(t)$ en sistema con N partículas
 \uparrow índice continuo $\in \mathbb{R}^3$
 \uparrow índice discreto $n=1, \dots, N$)

A partir de la definición, vemos que cualquier campo es un sistema con un número infinito (y no denumerable) de grados de libertad.

Se le puede pensar como el límite $L \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$

del caso con un volumen finito L^3 en un espacio discretizado con espaciado ϵ , sistema que tendría $(L/\epsilon)^3$ grados de libertad (retícula - en inglés, "lattice").



Aunque los resulta ya muy familiar un ejemplo de campo: el campo electromagnético, descrito por 6 números en cada

lugar, $\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{B}(t, \vec{x}) \leftrightarrow F_{\mu\nu}(x)$ intensidad de campo (field strength),
 eléctrico magnético $\uparrow \uparrow \equiv x^\mu$
 antisimétrico

o mejor dicho, por 4 números en cada lugar,

$$A_\mu(x) \equiv (\underbrace{\Phi(t, \vec{x})}_{\text{potencial escalar}}, \underbrace{\vec{A}(t, \vec{x})}_{\text{potencial vectorial}})$$

(Audi) potencial electromagnético

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned} \right\} \leftrightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

Vale la pena detenernos aquí en una aclaración.

Cuando primero nos enseñan sobre \vec{E} y \vec{B} , visualizamos

que un imán o un objeto con carga eléctrica

tiene (genera) su campo

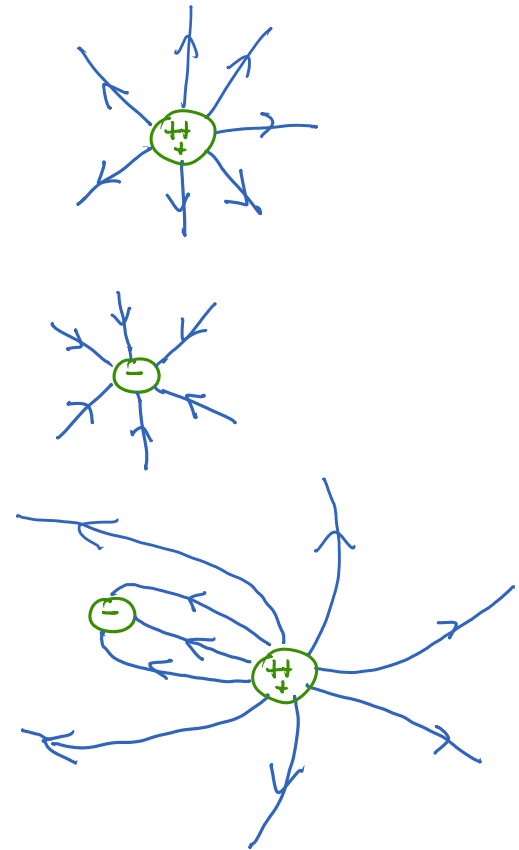
(que lo sigue cuando se mueve),

que un segundo objeto tiene

similarmemente su propio campo,

y que cuando ambos objetos están presentes sumamos sus 2 campos para obtener el resultado total.

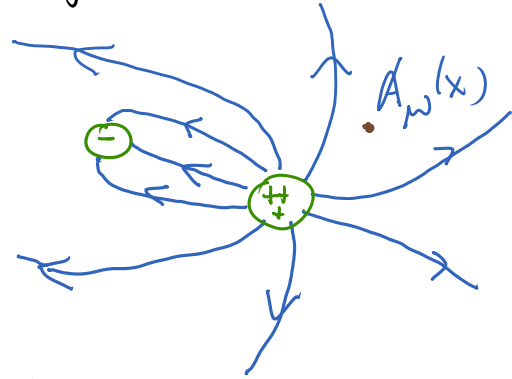
Pero ésta NO es una buena manera de pensarlo.



Ya sea que haya uno, dos, muchos o ningún objeto, el campo electromagnético no es "DE" ninguno de ellos: es un ente que llena siempre todo el espacio, y puede describirse dando 4 números en cada sitio.

El valor de esos números sí depende de los objetos presentes; pero incluso cuando no hay ningún objeto, el campo electromagnético sigue estando ahí — es solo que los números son 0 en todo lugar, el campo está 'apagada'. El campo $A_\mu(x)$ es una propiedad de nuestro universo, preinstalada de fábrica.

Intuitivamente, podemos visualizarlo como una especie de 'gelatina' que llena absolutamente todo el universo y es capaz de vibrar (en un sentido abstracto) y sustentar ondas. Es justamente para describir cómo es que está vibrando que necesitaremos especificar números en cada lugar.



$$A_\mu(x) = 0 \quad \forall x$$

El campo existe aún cuando no hay líneas / flechas



Por simplicidad, consideremos primero el campo más sencillo posible: un solo número real en cada x , que denotaremos $\varphi(x)$ (con $\varphi(x)^* = \varphi(x)$). Nos interesa estudiar campos relativistas (en el sentido de relatividad especial), es decir, con propiedades de transformación específicas bajo transformaciones de Lorentz

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \equiv 3 \text{ rotaciones} + 3 \text{ empujones ("boosts")}$$

\uparrow matriz 4×4 tal que $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ (que forman el grupo $SO(3,1)$)

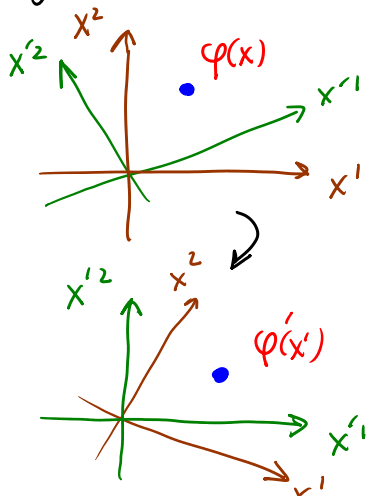
$$\Rightarrow x' \cdot y' = x \cdot y$$

Con $\varphi(x)$ solo tenemos un número en cada sitio, así que lo único decente que puede ocurrir cuando giramos nuestra cabeza (rotaciones) o pasamos caminando (empujones) es que ese número No cambie:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x') = \varphi(x)$$

\uparrow cambia el nombre del punto
 \uparrow cambia la función matemática

pero el valor en ese punto sigue igual



Esto es lo que se conoce como un campo escalar real.

Describiremos la dinámica de este campo a través de

la acción

$$S[\varphi(x)] \equiv \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

$\leftarrow dx^0$ por localización
 $\leftarrow dt$ es el mismo pie que \vec{v}

\uparrow corchetes denotan funcional

Lagrangiano

densidad Lagrangiana

Justo como en el caso de un sistema con un número finito de grados de libertad, las ecs. de mov. para el campo $\varphi(x)$ se deducen a partir del principio variacional — las soluciones clásicas $\varphi_{cl}(x)$ serán aquellas configuraciones donde la acción es estacionaria:

$$\varphi_{cl}(x) \rightarrow \varphi_{cl}(x) + \delta\varphi(x) \Rightarrow S[\varphi] \rightarrow S[\varphi_{cl}] \equiv S[\varphi_{cl}] + \delta S[\varphi_{cl}, \delta\varphi]$$

con $\delta S[\varphi_{cl}, \delta\varphi] = 0$ para cualquier variación $\delta\varphi(x)$ que

satisface condiciones de borde apropiadas en la frontera de la región de integración (normalmente $\int_{t_i}^{t_f} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x$, quizás también con $t_i \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow +\infty$).

Donde que $\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \vec{\nabla})$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x) \Rightarrow \partial_\mu \varphi(x) \rightarrow \partial_\mu \varphi(x) + \partial_\mu \delta\varphi(x),$$

veamos que el cambio en la acción $\equiv \delta(\partial_\mu \varphi(x))$

$$\delta S[\varphi, \delta\varphi] \equiv S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi]$$

$$= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\varphi(x) + \delta\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x) + \partial_\mu \delta\varphi(x)) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \delta\varphi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \partial_\mu \delta\varphi(x) \right\}$$

$$\stackrel{\text{partes}}{=} \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \right) \right\} \delta\varphi(x),$$

expresión que se anula para $\phi(x)$ arbitrario solo si se satisface la ecuación de movimiento para $\phi(x)$,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)}$$

Ecuación de Euler-Lagrange

Sabemos que la acción $S[\phi]$ debe ser un número invariante bajo Lorentz, y $d^4x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ es invariante, así que a partir de $S = \int d^4x \mathcal{L}$ concluimos que la densidad lagrangiana debe ser también invariante, es decir, $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ debe ser una combinación de ϕ y $\partial_\mu \phi$ que sea escalar.

Claramente $\partial_\mu \phi$ es un vector dual \equiv vector covariante \equiv covector, así que no puede aparecer solo: para tener un escalar debemos

$$\begin{aligned} \text{formar la combinación } \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \eta^{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \equiv (\partial\phi)^2 \\ &\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{transforma como vector}} \\ &\equiv \text{vector contravariante} \\ &= (\partial_t \phi)^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2 \end{aligned}$$

Si queremos que la ecuación de movimiento sea de segundo orden en las derivadas (que es la situación más común), nuestra densidad lagrangiana debe entonces tomar la forma

↙ elegimos por convención, ajustando la normalización de φ

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ $\underbrace{\hspace{10em}}$
 Términos "cinéticos" "Potencial"
 $\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2$

A partir de esta descripción lagrangiana, podemos generar también los ingredientes de la correspondiente descripción hamiltoniana. Definimos primero (la densidad de) el

momento canónico conjugado a $\varphi(x)$,

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x) \quad (\text{análogo a } \vec{p}_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n})$$

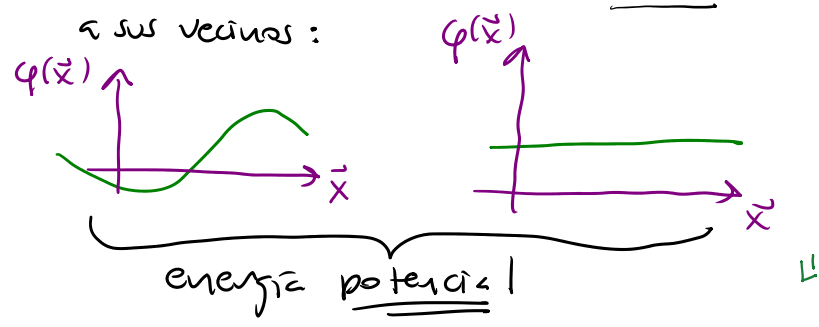
y utilizándolo (la), el Hamiltoniano

$$H \equiv \int d^3x (\pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}) \quad (\text{análogo a } H = \sum_n \vec{p}_n \cdot \dot{\vec{x}}_n - L)$$

$\equiv \mathcal{H}$ Densidad Hamiltoniana

$$= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + V(\varphi) \right]$$

Energía cinética: \rightarrow costo energético por variación espacial: cada $\varphi_{\vec{x}}$ está acoplado a sus vecinos:
 costo por variación temporal: costo por encender el campo, incluso si tomamos un valor constante:



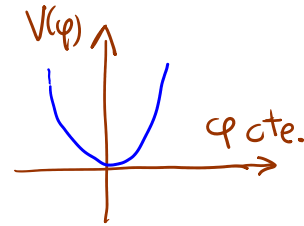
Lo más común es utilizar potenciales polinómicos,

$$V(\varphi) = c_1\varphi + c_2\varphi^2 + c_3\varphi^3 + c_4\varphi^4 + c_5\varphi^5 + \dots$$

↑ podemos cancelar corriendo apropiadamente $\varphi \rightarrow \varphi + \text{cte.}$

Empezaremos estudiando el caso

más sencillo, donde V es cuadrático:



Para que $\varphi=0$ sea un mínimo en

lugar de un máximo (y represente por tanto el valor preferido del campo) necesitamos tener $V''(0) = 2c_2 > 0$, condición que es más fácil de recordar si adoptamos la notación $c_2 = \frac{1}{2}m^2$ (con m real), es decir, $m^2 \equiv V''(0)$.

Por razones que entenderemos en breve, un campo (no necesariamente escalar) con potencial cuadrático se llama un campo libre. El campo escalar libre se conoce también como campo de Klein-Gordon, y según hemos visto, su densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Lagrangiano de Klein-Gordon

y su densidad hamiltoniana (densidad de energía),

$$\mathcal{H}_{KG} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Hamiltoniano de Klein-Gordon

La ecuación de movimiento (Euler-Lagrange) es

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \Rightarrow \boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi = 0} \quad \text{Ecuación de Klein-Gordon}$$

$$\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{\equiv \square} \text{ D'Alembertiano (Laplaciano)}$$

$$= \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$$

Igual que en el Hamiltoniano, en esta ecuación vemos que cada variable $\varphi_{\vec{x}}(t)$ está acoplada a sus

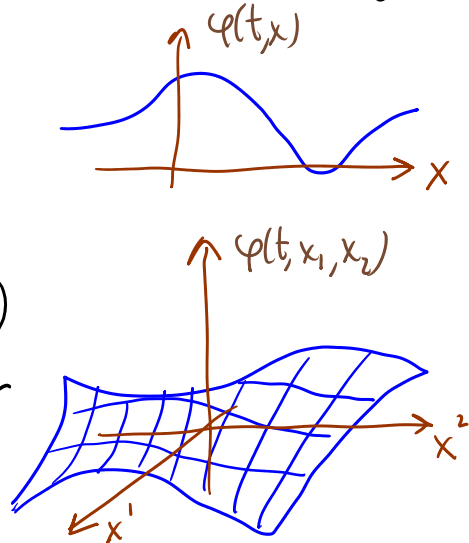
vecinos:

$$\partial_t^2 \varphi(\vec{x}, t) - \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{x}, t) + m^2 \varphi(\vec{x}, t) = 0$$

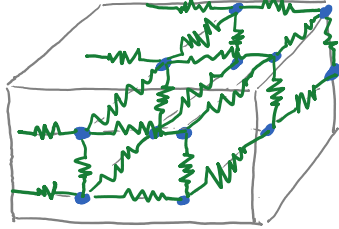
$$\partial_i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\varphi_{\vec{x} + \epsilon \vec{u}_i}(t) - \varphi_{\vec{x}}(t) \right]$$

↗ vector unitario en dirección i

Es solo gracias a este acoplamiento que el campo es capaz de sostener ondas - de hecho, si ponemos $m^2=0$ lo que tenemos ES justamente la llamada ecuación de ondas, relevante para p.ej. una cuerda de violín (cuya posición es descrita por un campo en $1+1$ dim) o a la membrana de un tambor (campo en $2+1$ dim).



Vemos entonces que nuestro campo en 3+1 dim, $\varphi(t, \vec{x})$, en verdad es análogo a una GELATINA, o lo que es lo mismo,



a una colección de muchas pelotitas conectadas por resortes, en el límite donde el espaciamiento tiende a cero.

Por el acoplamiento entre puntos vecinos, el comportamiento de cada $\varphi_{\vec{x}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{x})$ (como el de cada pelotita) en general NO es sencillo. Pero para lidiar con las derivadas espaciales en la ecuación de movimiento $(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\varphi_{\vec{x}}(t) = 0$, podemos usar un truco familiar (de la cuerda, p.ej.): cambiar de variables por medio de una transformada de Fourier,

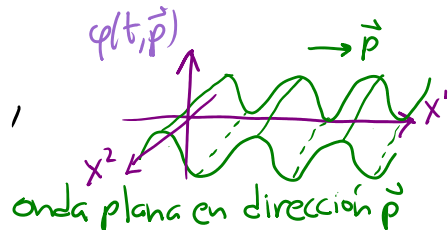
$$\varphi_{\vec{x}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{x}) \rightarrow \varphi_{\vec{p}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(t, \vec{x})$$

$$\left(\leftrightarrow \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(t, \vec{p}) \right),$$

$$\text{con } \varphi(t, \vec{x})^* = \varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi(t, \vec{p})^* = \varphi(t, -\vec{p}).$$

La ec. de mov. $(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = 0$ se convierte en

$$\underbrace{(\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2)}_{\equiv E_{\vec{p}}^2} \varphi(t, \vec{p}) = 0,$$



es decir, $\ddot{\varphi}(t, \vec{p}) = -E_{\vec{p}}^2 \varphi(t, \vec{p})$: cada $\varphi(t, \vec{p})$ es un oscilador armónico con frecuencia $\omega = E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$:

$$\varphi_{\vec{p}}(t) = \alpha_{\vec{p}} e^{-i\omega t} + \beta_{\vec{p}} e^{+i\omega t}, \text{ con } \beta_{\vec{p}} = \alpha_{-\vec{p}}^*$$

\hat{L} para tener $\varphi_{\vec{p}}^* = \varphi_{-\vec{p}}$

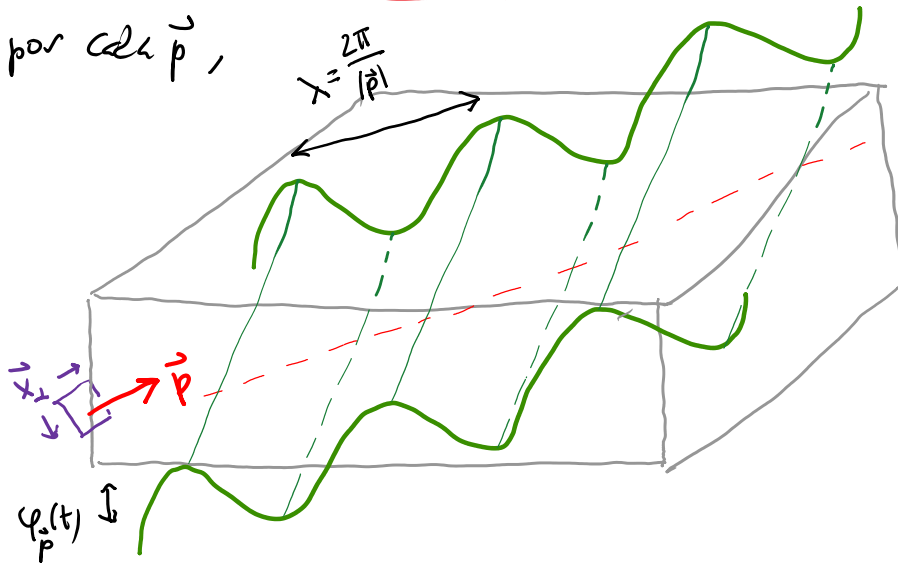
En otras palabras, hemos descubierto que los modos de Fourier son los modos normales del campo (componentes colectivos que oscilan armónicamente, tal como en una cuerda o en un sistema de péndulos con resortes), y nuestro campo libre $\varphi(t, \vec{x})$ no es entonces más que una colección infinita ($\varphi_{\vec{p}}(t) \forall \vec{p}$) de osciladores armónicos desacoplados — un sistema completamente análogo a una cuerda de violín, la membrana de un tambor, o una gelatina. El adjetivo "libre" por este campo se refiere justamente a que los modos de Fourier no interactúan entre sí (se superponen sin afectarse), que solo fue posible gracias a que la ec. de mov. es lineal en $\varphi \iff \mathcal{L}$ es cuadrático en φ .
 Con esto entendemos perfectamente la manera L
 en que $\varphi(t, \vec{x})$ evolucionará a nivel clásico:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \alpha_{-\vec{p}}^* e^{iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \alpha_{\vec{p}}^* e^{iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \end{aligned}$$

(números complejos)

que se fijan por condiciones iniciales

es simplemente una superposición de ondas planas viajeras, una por cada \vec{p} ,



Como en cualquier sistema mecánico, existe una conexión muy bonita entre las simetrías de un campo (transformaciones de x y/o de φ que no cambian la acción $S[\varphi]$) y la existencia de cantidades conservadas (es decir, que no cambian con el tiempo). Concretamente,

(cubri rápido)

la transformación se puede hacer gradualmente

el teorema de Noether afirma que cada simetría continua da lugar a una ley de conservación. El teorema de hecho nos da una fórmula explícita para construir las cantidades conservadas a partir de los campos de la teoría (y sus derivadas).

Ver p.ej. los pp. 163-175 del curso

<http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes>

/indice.html#campos

Mencionaremos aquí solo 2 ejemplos:

- 1) Las 4 simetrías bajo traslaciones en el espaciotiempo, $x^\mu \rightarrow x^\mu + c^\mu$, dan lugar a 4 cargas conservadas,

$$P_\nu \equiv \int d^3x T^0_\nu = \int d^3x \left(\partial_\nu \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_\ell(x))} - \delta^0_\nu \mathcal{L} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(Cuadri-)} \\ \text{Momento} \end{array} \quad \text{L!}$$

La carga para $\nu=0$ es la energía total de los campos,

$$P_0 = \int d^3x \left(\partial_0 \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_\ell(x))} - \mathcal{L} \right) = H \quad \begin{array}{l} \text{Hamiltoniano} \\ \text{(cf. p. 8)} \end{array} \quad \checkmark$$

Densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} \equiv T^0_0$

y las 3 cargas con $\nu=i$ son el momento espacial

$$\vec{P} = - \int d^3x \vec{\nabla} \varphi_\ell \Pi_\ell$$

↑ signo por índice espacial subido: $P^i \equiv \int d^3x T^{0i}$ ← carga conservada

(Es importante NO confundir a la densidad de momento espacial

$T^{0i}(x)$ con la densidad de momento canónico $\Pi_\ell(x) \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi}_\ell$.)
 ↙ conjugado al campo

2) En una teoría con 2 campos escalares $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ (no necesariamente libres) que entran en el mismo pie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 - V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

tenemos invariancia bajo la 'rotación' (de los campos, no del

espacio)
$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix},$$

con θ un ángulo arbitrario (porque $\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$).

A diferencia de las traslaciones y Lorentz que son simetrías espaciotemporales, esta rotación es un ejemplo

de lo que llamamos simetrías internas, porque no involucran cambios de las coordenadas x^μ .

Si a partir de φ_1 y φ_2 formamos el campo escalar complejo

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)),$$

← por convención

el lagrangiano se reescribe como

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - V(2\Phi^* \Phi),$$

y la rotación interna toma la forma más sencilla

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{i\theta} \Phi(x),$$

que evidentemente es una simetría.

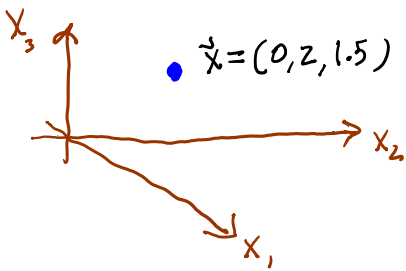
Esta simetría continua da lugar a la carga conservada

$$Q = \int d^3x (\Phi^* \partial_t \Phi - \Phi \partial_t \Phi^*)$$

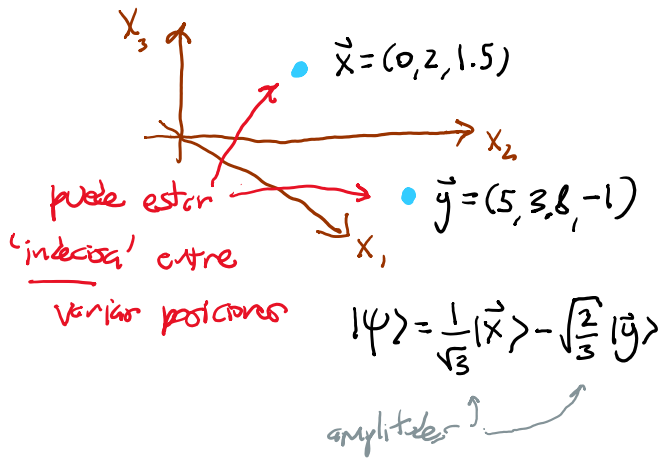
Cuando aprendamos cómo acoplar este campo $\Phi(x)$ al campo electromagnético $A_\mu(x)$, veremos que Q es ni más ni menos que la carga eléctrica.

Ahora, para que éste sea un curso de teoría CUÁNTICA de campos, ¿qué diablo es un campo CUÁNTICO?

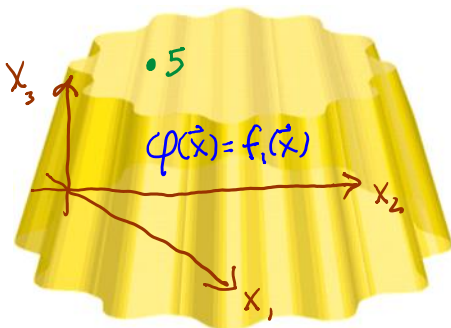
Partícula CLÁSICA



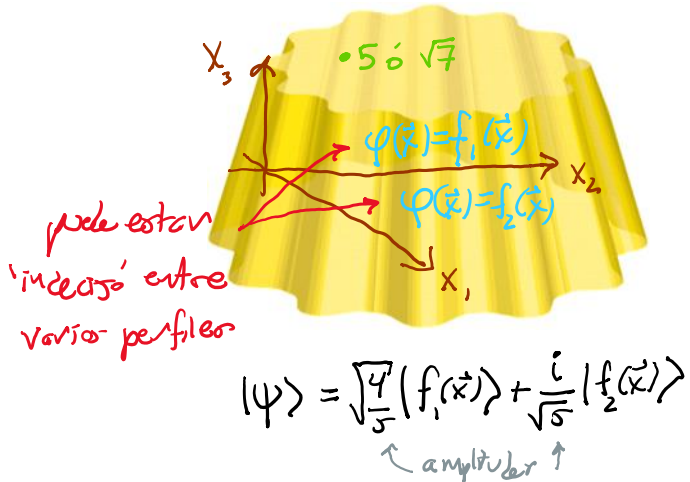
vs. Partícula CUÁNTICA



Campo CLÁSICO



vs. Campo CUÁNTICO



Y a nivel técnico, ¿cómo cuantizamos un campo?

Sabemos que, para un sistema con un número finito de grados de libertad, la cuantización canónica consiste en identificar, por cada variable hamiltoniana básica, a un operador que actúa sobre el espacio de Hilbert que describe a los estados del sistema, $H = \{|\psi\rangle\}$,

$$q_n(t), p_n(t) \rightarrow \hat{q}_n, \hat{p}_n \quad \begin{array}{l} \text{operadores independientes} \\ \text{de } t \text{ en el } \underline{\text{anillo de}} \\ \underline{\text{Schrödinger}} \end{array}$$

↙ coordenadas ↘ momentos

exigiendo que satisfagan las relaciones de conmutación canónicas

$$\boxed{[\hat{q}_n, \hat{p}_{n'}] = i \delta_{n,n'}, \quad [\hat{q}_n, \hat{q}_{n'}] = 0 = [\hat{p}_n, \hat{p}_{n'}]}$$

$$\hbar = 1 \quad \delta_{n,n'} \text{ de Kronecker} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } n=n' \\ 0 & \text{si } n \neq n' \end{cases}$$

La evolución dinámica de los estados $|\psi(t)\rangle$ es generada por el operador hamiltoniano $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) \equiv H(\hat{q}, \hat{p})$ a través de

la ecuación de Schrödinger $i\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$.

Equivalentemente, podemos pasar al cuadro de Heisenberg, donde los operadores son los que llevan la dependencia temporal,

$$\hat{q}_n(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{q}_n e^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{p}_n(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{p}_n e^{-i\hat{H}t},$$

las relaciones de conmutación canónicas se imponen a tiempo igual,

$$[\hat{q}_n(t), \hat{p}_n(t)] = i\delta_{n,n'} \quad , \quad [\hat{q}_n(t), \hat{q}_{n'}(t)] = 0 = [\hat{p}_n(t), \hat{p}_{n'}(t)]$$

(en general $[\hat{q}_n(t), \hat{q}_n(t')] \neq 0$), los estados NO evolucionan con el tiempo ($|\psi\rangle_{\text{Heisenberg}} \equiv |\psi(t=0)\rangle_{\text{Schrödinger}}$ codifica

toda la historia del sistema), y la evolución dinámica de los operadores $\hat{O}(t)$ es generada por \hat{H} a través de la ecuación de Heisenberg

$$\frac{d\hat{O}(t)}{dt} = i[\hat{H}, \hat{O}(t)] + \frac{\partial \hat{O}(t)}{\partial t}$$

↙ posible dependencia explícita de t (No a través de $\hat{q}(t), \hat{p}(t)$)

Para cuantizar a nuestro campo escalar $\varphi(t, \vec{x}) \equiv \varphi_x(t)$ con lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi)$ (sistema con un

número infinito y no denumerable de grados de libertad),
 aplicamos exactamente la misma receta:

convertimos al campo $\varphi(t, \vec{x})$ ^{← una f en cada \vec{x}} y a su momento canónico
 conjugado $\Pi(t, \vec{x}) = \dot{\varphi}(t, \vec{x})$ ^{← una p en cada \vec{x}} en operadores en el cuadro
 de Schrödinger, $\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})$, o en el de Heisenberg,

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\varphi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{\Pi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\Pi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t},$$

^{↑ preferimos, por relatividad}
 e imponemos las relaciones de conmutación habituales:

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\Pi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')] \\ [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')] &= i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}} \quad \begin{array}{l} \text{OJO:} \\ t = t' \end{array}$$

donde la delta de Dirac $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} \infty & \text{si } \vec{x} = \vec{x}' \\ 0 & \text{si } \vec{x} \neq \vec{x}' \end{cases}$ tal que
 $\int d^3x f(\vec{x}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = f(\vec{x}')$ es el reemplazo natural de la
 delta de Kronecker que tenemos para variables discretas.

Se puede mostrar que las ecuaciones de Heisenberg
 para los operadores $\hat{\varphi}(t, \vec{x})$ y $\hat{\Pi}(t, \vec{x})$ se combinan
 para implicar que, como esperaríamos, $\hat{\varphi}(t, \vec{x})$ satisface
 la misma ecuación de movimiento que era satisfecha
 por el campo $\varphi(t, \vec{x})$ a nivel clásico.

En el caso de un campo escalar real libre, la

ecuación de movimiento es la de Klein-Gordon (p. 10),

$$\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \hat{\varphi}(t, \vec{x}) = 0},$$

lo cual implica, tal como en las pp. 11-12, que los operadores asociados a los modos de Fourier

$$\hat{\varphi}_{\vec{p}}(t) \equiv \hat{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{\varphi}(t, \vec{x})$$

obedecen la ecuación del oscilador armónico

$$\partial_t^2 \hat{\varphi}(t, \vec{p}) = -\omega^2 \hat{\varphi}(t, \vec{p}) \quad \text{con frecuencia } \omega = E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

El punto central aquí es que ya habíamos aprendido que a nivel clásico un campo libre es una colección de osciladores armónicos desplazados (uno por cada \vec{p}), pero es obvio entonces que desde pequeños sabemos cómo cuantizarlo!

Recordemos que para un oscilador armónico es muy útil definir los operadores de ascenso y descenso \hat{a}^\dagger y \hat{a} a través de

$$\hat{x} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger),$$

$$\left(\text{o decir, } \hat{a} \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \hat{p}, \right)$$

← rescale
x y p para
absorber la
masa M ($\rightarrow 1$)

$$\text{de modo que } [\hat{x}, \hat{p}] = i \iff [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$$

$$\text{y } \hat{H} = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \hat{x}^2 = \frac{\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = \omega \left(\underbrace{\hat{a}^\dagger \hat{a}}_{\substack{\text{operador de número} \\ \equiv \hat{N}}} + \frac{1}{2} \right)$$

Con estos ingredientes es fácil generar el conjunto completo de autoestados (eigenestados) de \hat{H} , es decir decir, de estados con energías definidas:

* El estado base (o fundamental) es

$$|0\rangle \text{ tal que } \hat{a}|0\rangle = 0, \text{ y tiene energía } E = \frac{\omega}{2}.$$

\uparrow operador de descenso \uparrow "energía de punto cero"

* El primer estado excitado es (salvo normalización)

$$|1\rangle \equiv \hat{a}^\dagger |0\rangle, \text{ y tiene energía } E = \omega(1 + \frac{1}{2}).$$

\uparrow operador de ascenso

⋮

* El enésimo estado excitado es (salvo normalización)

$$|n\rangle \equiv (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \text{ y tiene energía } E = \omega(n + \frac{1}{2}).$$

En otras palabras, $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (\hat{H} = \omega(\hat{N} + \frac{1}{2})).$

$\uparrow \hat{a}^\dagger \hat{a}$ 21

Regresando a nuestro campo escalar libre real ($\varphi^*(x) = \varphi(x) \Rightarrow \hat{\varphi}^\dagger(x) = \hat{\varphi}(x)$), sabemos que el operador $\hat{\varphi}(t, \vec{x})$ y su momento conjugado $\hat{\pi}(t, \vec{x}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{\pi}(t, \vec{x})$ son los que juegan el papel de \hat{x} y \hat{p} para cada oscilador armónico, así que podemos piratearnos impunemente

La definición de los operadores de ascenso y descenso
 $\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$:

$$\hat{\varphi}(\vec{p}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{x} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}))$$

↑ operador de Schrödinger
 y ↓ (o Heisenberg a $t=0$)

↑ signos tal que $\hat{\varphi}(\vec{p})^{\dagger} = \hat{\varphi}(-\vec{p})$
 $\Rightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})^{\dagger} = \hat{\varphi}(\vec{x})$ (campo real)

$$\hat{\Pi}(\vec{p}) \equiv -i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{p} \equiv -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}))$$

A partir de las relaciones de conmutación para
 $\hat{\varphi}(\vec{p})$ y $\hat{\Pi}(\vec{p})$ ($\leftrightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})$ y $\hat{\Pi}(\vec{x})$) es fácil deducir que

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (\text{análogo a } [\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}] = \delta_{ij})$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}]$$

Tenemos entonces

$$\hat{\varphi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}} + e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}),$$

$$\hat{\Pi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} -i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}} - e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}), \quad (2)$$

Con esto podemos calcular el hamiltoniano

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}^2 \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} E_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}) \quad \leftarrow \text{resultado esperable para cada oscilador} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(E_{\vec{p}} \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}}_{\equiv \hat{N}_{\vec{p}}} + \frac{1}{2} E_{\vec{p}} \underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}]}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}) = \infty} \right) \quad \begin{array}{l} \text{nuestro primer} \\ \text{infinito} \end{array} \\ &\quad \text{operador de número para el oscilador } \vec{p} \quad \text{(cf. } \hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^{\dagger}) = \omega (\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \frac{1}{2}) \text{)}\end{aligned}$$

El segundo término en \hat{H} claramente representa la 'energía de punto cero' del oscilador armónico etiquetado por \vec{p} , es decir, la energía que tiene ese oscilador cuando se encuentra sin excitar, en su estado base. Sabemos que, en ausencia de la gravedad, solo importan diferencias de energía, por lo que podemos por simplicidad ignorar estas constantes y trabajar con el hamiltoniano

$$:\hat{H}: \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{N}_{\vec{p}},$$

↳ energía de cada modo de Fourier

que nos da la energía total del sistema medida por encima de la energía que tiene el campo sin excitar. En esta expresión hemos usado el

simbolo $::$, que denota lo que se conoce como "ordenamiento normal", el cual consiste en colocar todas los \hat{a}^\dagger 's a la izquierda de los \hat{a} 's

$$(p.ej., : \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} : \equiv \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}, \quad : \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger : \equiv \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \\ : \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger : \equiv \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}}, = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}}, \text{ etc.})$$

De manera similar, se encuentra que el operador de momento espacial asociado al campo (ver p.14)

$$\hat{\vec{P}} = - \int d^3x \vec{\nabla} \hat{\phi} \hat{\pi}$$

se reduce a

↙ momento espacial de cada modo

$$\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{N}_{\vec{p}}.$$

Conociendo \hat{H} , podemos también obtener el operador de campo en el cuadro de Heisenberg,

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \exp(i\hat{H}t) \hat{\phi}(\vec{x}) \exp(-i\hat{H}t)$$

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right),$$

↗ "frecuencia positiva" ↗ "frecuencia negativa"

que podemos resumir usando $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ con $p^0 = E_{\vec{p}}$,

"frec. positiva" "frec. negativa"

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

De hecho, en la p.13 habíamos visto que, para el campo clásico, la solución más general a la ec. de Klein-Gordon es

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \alpha_{\vec{p}}^* e^{iE_{\vec{p}}t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right),$$

↖ números complejos

así que lo único que ha ocurrido es que al promover $\varphi(x) \rightarrow \hat{\varphi}(x)$ tenemos $\alpha_{\vec{p}} \rightarrow \hat{\alpha}_{\vec{p}} \equiv \frac{\hat{a}_{\vec{p}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}$ ← operador de creación

Entonces, aunque no lo habían notado, ¡desde antes de venir a este curso ustedes conocían ya la manera de cuantizar un campo libre (= soltina con ec. de mov. lineal, o también una cuerda o una membrana), y de obtener fácilmente sus estados con energía definida!

Justo como hicimos para 1 oscilador armónico en la p.20, podemos construir el espacio de autoestados de $:\hat{H}:$ (y \hat{H}) usando los operadores de ascenso y descenso. Identificamos primero al estado base (o fundamental) para el campo como aquel en el que

todos los osciladores están sin excitar:

$$|0\rangle \equiv |0, 0, \dots\rangle \text{ tal que } \hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}, \langle 0|0\rangle = 1.$$

↑ en realidad no podemos hacer una lista exhaustiva
(la etiqueta \vec{p} es no denumerable)

Actuando sobre este estado con un solo operador de ascenso,

obtenemos los estados con 1 solo oscilador excitado:

$$|\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle \quad (\equiv |0, 0, \dots, 1, 0, \dots\rangle)$$

oscilador número \vec{p}

donde hemos elegido la normalización de tal manera que

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{p}'}} \sqrt{2E_{\vec{p}}} (\langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}'} \rangle) (\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle) \\ &= \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{p}'}, \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}] |0\rangle \\ &= (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned}$$

← porque el término
 $-\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}$
da cero al
actuar sobre $|0\rangle$

combinación invariante bajo Lorentz

¿Cuál es la energía de estos estados?

Usando $:\hat{H}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}$ vemos que

$$\bullet \quad :\hat{H}: |0\rangle \propto \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} |0\rangle = 0,$$

es decir, $|0\rangle$ tiene energía $E=0$ (resulta esperado porque omitimos la energía de punto cero);

$$\bullet \quad : \hat{H} : | \vec{p} \rangle = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'} | 0 \rangle \sqrt{2E_{\vec{p}'}}$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) | 0 \rangle$$

← porque el segundo término da 0

la delta de Dirac sirve para eliminar la integral, así que

$$: \hat{H} : | \vec{p} \rangle = E_{\vec{p}} \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = E_{\vec{p}} | \vec{p} \rangle,$$

que es el resultado esperado para el primer nivel excitado de un oscilador en frecuencia $\omega = E_{\vec{p}}$. ($E = \omega(1 + \frac{1}{2})$)

Con un cálculo idéntico, usando $\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$ (p.23), podemos obtener

$$\hat{\vec{P}} | 0 \rangle = 0, \quad \hat{\vec{P}} | \vec{p} \rangle = \vec{p} | \vec{p} \rangle.$$

Vemos entonces que el estado $| \vec{p} \rangle$ del campo (↔ ondas planas \vec{p} lo menos energética posible en nuestra gelatina) tiene momento espacial \vec{p} y energía $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ (su cuadrimomento p^μ satisface la condición de capa de masa " $p^2 = m^2$ ", mass shell), ¡¡justamente igual que una partícula relativista libre, con momento \vec{p} y masa m !!

Por esta razón llamamos a $| 0 \rangle$ ($\neq | \vec{0} \rangle$) el "vacío" (= estado sin partículas), y a $| \vec{p} \rangle$ el estado con 1 partícula (de momento \vec{p}).

13

Ahora, hemos visto que $|\vec{p}\rangle$, el estado donde apenas 1 oscilador está en su primer nivel excitado, describe a 1 partícula, ¿pero que significados tienen los estados donde ese mismo oscilador está en un nivel más alto de excitación, o donde excitamos a más de 1 oscilador?

Si definimos " $|0,0,\dots,1,0,\dots,1,0,\dots\rangle$ " ó " $|0,0,\dots,2,0,\dots\rangle$ "

$$|\vec{p},\vec{p}'\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}}\sqrt{2E_{\vec{p}'}}\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}|0\rangle \quad (=|\vec{p}',\vec{p}\rangle)$$

tenemos

↑ porque las \hat{a} 's conmutan

$$\begin{aligned} \hat{H}|\vec{p},\vec{p}'\rangle &= \sqrt{2E_{\vec{p}}}\sqrt{2E_{\vec{p}'}}\int\frac{d^3p''}{(2\pi)^3}E_{\vec{p}''}\hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}|0\rangle \\ &\quad \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}}_{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}''-\vec{p})\hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}''-\vec{p}')\hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \\ &\quad \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger}}_{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}''-\vec{p}')\hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2E_{\vec{p}}}\sqrt{2E_{\vec{p}'}}\left(E_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}|0\rangle + E_{\vec{p}'}\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}|0\rangle\right)$$

$$= (E_{\vec{p}} + E_{\vec{p}'})|\vec{p},\vec{p}'\rangle,$$

y con un cálculo idéntico, $\hat{P}|\vec{p},\vec{p}'\rangle = (\vec{p} + \vec{p}')|\vec{p},\vec{p}'\rangle$.

Es decir, $|\vec{p},\vec{p}'\rangle$ es 1 estado con 2 partículas

relativistas libres (y en particular, desacopladas entre sí),

con masa m , cuyos momentos espaciales son \vec{p} y \vec{p}' .

Más en general, el punto es que el operador de número $\hat{N}_{\vec{p}} \equiv \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$ realmente calcula el nivel de excitación del modo de Fourier \vec{p} , y por ello se encuentra que $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle$ es un estado con n partículas idénticas libres con masa m y momentos $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$, cuya energía y momento totales son

$$E = E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2} + \dots + E_{\vec{p}_n} \quad \text{y} \quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n.$$

Un punto que vale la pena resaltar es que nuestro campo/gestiva cuántica nos da la posibilidad de hablar de un número cualquiera de partículas.

El espacio de Hilbert asociado,

$$H = |0\rangle \oplus \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ partícula} \\ |\vec{p}\rangle \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ partículas} \\ |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \end{array} \right\} \oplus \dots$$

se conoce por su estructura como "espacio de Fock".

En este contexto, los operadores de ascenso $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y descenso $\hat{a}_{\vec{p}}$ se conocen respectivamente como

operadores de creación y aniquilación, porque sirven precisamente para "crear" o "aniquilar" partículas:

$$\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \propto |\vec{p}, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle,$$

$$\hat{a}_{\vec{p}} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \propto |\vec{p}_1, \dots, \cancel{\vec{p}_i}, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad \text{si } \vec{p} = \vec{p}_i$$

$$(\text{= } 0 \text{ si } \vec{p} \notin \{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\})$$

En resumen, hemos encontrado que los espacios de Hilbert de 2 sistemas que a primera vista parecen muy diferentes, un campo escalar y una colección de un número arbitrario ($n=0,1,2,\dots$) de partículas sin espín, ¡en realidad coinciden a la perfección!

El acuerdo incluye no solo a los números cuánticos que etiquetan a los estados (\vec{p} 's), sino también a las energías, y por tanto, a la evolución temporal.

Los 2 sistemas resultan ser totalmente indistinguibles:

¡¡ las partículas relativistas sin espín son en verdad pequeñas excitaciones cuánticas de un campo escalar !!

La misma historia aplica para un campo escalar libre complejo $\hat{\Phi}(x)$ (\leftrightarrow 2 campos reales con las mismas propiedades), salvo que, al no tener ya la restricción de realidad o hermiticidad del campo ($\hat{\Phi}^\dagger \neq \hat{\Phi}$), para cada \vec{p} obtendremos no 1 sino 2 parejas de operadores de creación y aniquilación:

$$\hat{\Phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}} = \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$\hat{\Phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

$$\text{con } [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger],$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}].$$

Las excitaciones de este campo son entonces de 2 tipos distintos, $|\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$ y $|\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$, aunque corresponden a partículas con la misma masa m . En la p.ló vemos que, asociada a la simetría interna $\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Phi(x)$, existe una carga conservada $Q = \int d^3x (\Phi^* \partial_t \Phi - \Phi \partial_t \Phi^*)$, que al acoplarse a A_μ será ni más ni menos que la carga eléctrica. A nivel cuántico Q se convierte en el operador $\hat{Q} = \int d^3x (\hat{\Phi}^\dagger \partial_t \hat{\Phi} - \hat{\Phi} \partial_t \hat{\Phi}^\dagger)$, que en términos de operadores de creación/aniquilación toma la forma

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}})$$

← para el campo real $\hat{b}_{\vec{p}} = \hat{a}_{\vec{p}}$ y $\therefore \hat{Q} = 0$

Con esto vemos que las partículas creadas por $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$, aunque tienen la misma masa, se distinguen porque tienen carga eléctrica opuestas (+1 y -1, respectivamente).

Es decir, el campo escalar complejo tiene como excitaciones a partículas cargadas, ¡junto con sus antipartículas!

\hat{z} = partículas si $\hat{\psi} = \hat{\psi}^\dagger$ ($\hat{Q} = 0$)

En el mundo real, ejemplar de partículas sin espín, asociadas por tanto a campos escalares, son el bosón de Higgs (partícula elemental?) y el pión (esteb ligado).

Similrmente, campos No escalares (aquellos que SI cambian de una cierta manera bajo rotaciones y empujones) dan lugar a partículas con espín (cuyo aspecto SI cambia de una manera específica cuando giramos la cabeza o paramos caminando):

- los fotones (espín 1) son excitaciones del campo electromagnético $A_{\mu}(x)$, un campo vectorial real.
- los electrones y antielectrones (espín $1/2$), son excitaciones del campo del electrón $\psi(x)$ un campo "espinorial" complejo.
← índice de espín oculto: 4 números complejos
- Cada una de las partículas restantes del Modelo Estándar (junto con su antipartícula), es igualmente una excitación en un campo correspondiente (materia \leftrightarrow campos espinoriales, fuerzas \leftrightarrow campos vectoriales)

Así que, como prometimos desde el principio del curso, el nuestro universo en verdad está hecho no de partículas, sino de campos (gelatinosa)!! Cada partícula es una ondita (lo más minúscula posible) en un campo correspondiente.

$$\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}$$

Regresando al caso escalar libre, sabemos que $\hat{\phi}(\vec{p})|0\rangle \propto |\vec{p}\rangle$,
y podemos encontrar una interpretación física directa para $\hat{\phi}(\vec{x})$
notando que

$$\hat{\phi}(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) |0\rangle$$

$$\stackrel{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |\vec{p}\rangle \equiv |\vec{x}\rangle$$

Combinación invariante de Lorentz

estas relativistas en posición definida (tanto como es posible)

sería $\approx m$ en caso no relativista

sería $\langle \vec{p} | \vec{x} \rangle$ en caso no relativista

Es decir, $\hat{\phi}(\vec{x})$ es un operador que crea (o destruye)
una partícula localizada en \vec{x} .

Pasando al cuadro de Heisenberg, se encuentra similarmente
que $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ crea/destruye una partícula en \vec{x} al tiempo t ,

$$\hat{\phi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{+iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} |0\rangle \equiv |x\rangle$$

Vale la pena destacar que la aparición de t en
 $|x\rangle \equiv |x^{\mu}\rangle = |t, \vec{x}\rangle$ No se debe a que estamos
hablando de un estado en el cuadro de Schrödinger:

$|x\rangle$ es por definición un estado en el cuadro de Heisenberg, que tiene la propiedad de que, si lo examinamos en t , encontraremos a la partícula en \vec{x} , y es por eso que t figura como parte del nombre del estado.

En el caso de un campo complejo, recordando (p.29) que $\hat{\Phi} \sim \hat{a} + \hat{b}^\dagger$ y $\hat{\Phi}^\dagger \sim \hat{a}^\dagger + \hat{b}$, el enunciado correspondiente es que

$\hat{\Phi}(x)$ destruye una partícula o crea una antipartícula
localizada en x

$\hat{\Phi}^\dagger(x)$ crea una partícula o destruye una antipartícula :
localizada en x

$$\hat{\Phi}^\dagger(x) |0\rangle \equiv |x, n\rangle, \quad \hat{\Phi}(x) |0\rangle \equiv |x, \bar{n}\rangle.$$

↑ nombre de partícula (p.ej. π^+)
↑ antipartícula correspondiente (p.ej. π^-)

Habiendo entendido lo anterior, podemos ahora hacer la única pregunta física que nos falta explorar en esta teoría libre. Dado que las partículas no interactúan, lo único que pueden hacer es propagarse libremente de un sitio a otro.

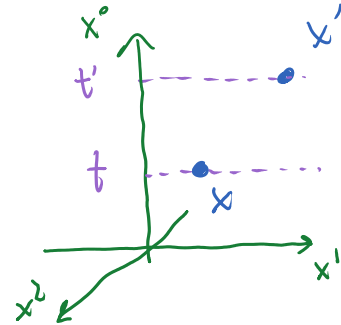
OJO: \hat{a}_p^\dagger y \hat{a}_p son herramientas matemáticas capaces de crear/aniquilar partículas, pero quién determina si eso

↙ evoluciona en el tiempo

ocurre o no FÍSICAMENTE es \hat{H} . Aquí, $\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p$
No cambia el número de partículas. crea ↗ ↖ aniquila

Solo nos resta estudiar la probabilidad para propagación libre.

Concretamente, si $t > t'$ y sabemos que la partícula está en \vec{x} al tiempo t , ¿cuál es la amplitud de probabilidad de que la encontremos en \vec{x}' al tiempo t' ?



Sabiendo que el primer dato corresponde al estado $|x\rangle$ y el segundo a $|x'\rangle$ (en el cuadro de Heisenberg), la respuesta está dada simplemente por

el traslate (producto interno) entre ambos estados,

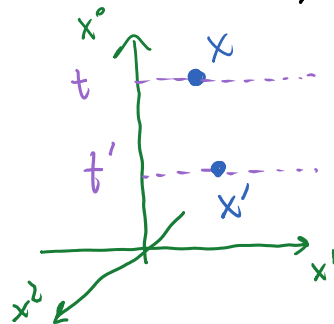
↙ aniquila partícula en x' ↘ ↙ crea partícula en x

$$\langle x' | x \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) | 0 \rangle .$$

esta es la pregunta FÍSICA que nos interesa

este es el cálculo matemático que nos responde la pregunta

Si x fuera en cambio posterior a x' ($t > t'$), en el uso cotidiano del lenguaje nos interesaría la amplitud de propagación de x' a x (y no al revés),



$$\langle x | x' \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0 \rangle = \langle x' | x \rangle^* .$$

Es natural (y útil) definir entonces una amplitud de propagación que pueda referirse a cualquiera de las 2 opciones, según corresponda:

$$G(x', x) \equiv \langle x' | x \rangle \theta(x'^0 - x^0) + \langle x | x' \rangle \theta(x^0 - x'^0)$$

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

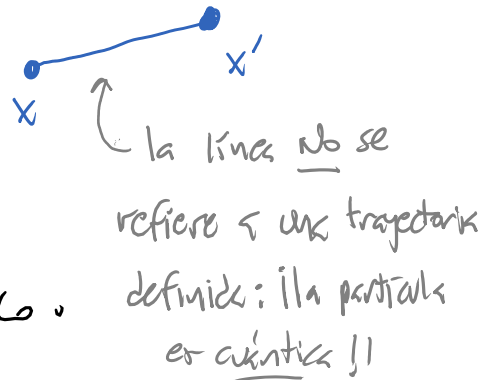
$$= \langle 0 | (\hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) \theta(x'^0 - x^0) + \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \theta(x^0 - x'^0)) | 0 \rangle$$

$$\equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) \} | 0 \rangle$$

orden temporal: ordenar operadores de modo que el tiempo aumente de derecha a izquierda

Esta combinación se conoce como el propagador de Feynman, y es habitual representarlo como una línea que conecta

a los eventos x y x' , aunque denotarlo solo esquemáticamente, como punto que No hacen referencia a un diagrama espaciotemporal específico.



La invariancia bajo transformaciones

en el espaciotiempo implica que $G(x', x) = G(x - x')$.

El cálculo de este propagador para nuestro campo libre

no presenta ninguna dificultad conceptual (¡estamos lidiando solo con oscilaciones armónicas!); pero no nos detendremos a hacerlo (ver ejercicio 4). El resultado es sencillo,

$$G(x'-x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \left[\theta(x'-x^0) \frac{e^{-iE_p(x'-x^0)}}{2E_p} + \theta(x-x^0) \frac{e^{+iE_p(x'-x^0)}}{2E_p} \right],$$

y se puede escribir en una forma manifiestamente invariante bajo Lorentz:

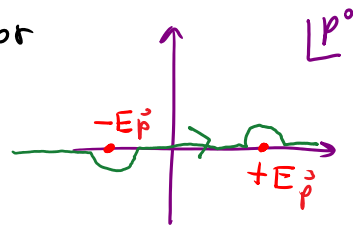
$$G(x', x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2 - m^2}$$

Propagador de Feynman
para campo escalar libre
(Klein-Gordon)

$$\curvearrowright (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_p^2$$

donde la movida integral sobre p^0 significa que los partículos que tenemos aquí están fuera de la capa de masa (off-shell), es decir, $p^0 \neq E_p$ ($p^2 \neq m^2$). Se requiere una receta

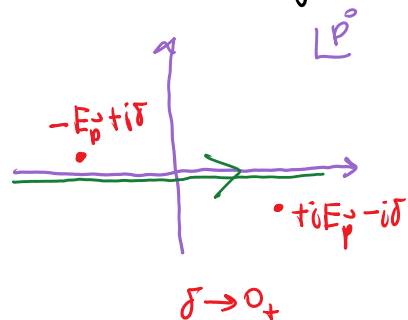
específica para lidiar con los polos simples que el integrando tiene



en $p^0 = \pm E_p$, receta indicada en

el diagrama de la derecha (equivocar los polos con breves excursions en el plano complejo para la variable de integración

p^0). Esto es equivalente a integrar sobre p^0 real pero desplazar los polos un poquito,



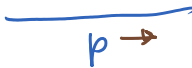
por lo que también es frecuente escribir

$$G(x', x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0_+ \\ (\epsilon \equiv 2E_p \delta)$$

Más fácil de recordar, e igualmente útil, es la transformada de Fourier

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad \text{ó} \quad \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Propagador de Feynman
en espacio de momentos
(para Klein-Gordon)

que es habitual representar como  ↖ no se indican puntos inicial y final

flecha optativa para indicar el sentido en el que fluye p^M : $p \rightarrow = -p \leftarrow$

En el caso de un campo escalar complejo, definir

$$G(x', x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}(x') \hat{\Phi}^\dagger(x) \} | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \hat{\Phi}(x') \hat{\Phi}^\dagger(x) | 0 \rangle & \text{si } x' \supset x \\ \langle 0 | \hat{\Phi}^\dagger(x) \hat{\Phi}(x') | 0 \rangle & \text{si } x' \supset x' \end{cases}$$

↖ crea partícula

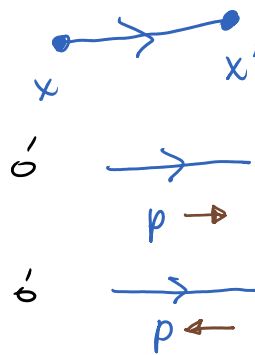
↖ crea antipartícula

$$= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2}$$

$$(\leftrightarrow G^*(x', x) = \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}^\dagger(x') \hat{\Phi}(x) \} | 0 \rangle),$$

y es habitual denotarlo como una línea con flechas que

indica (por convención) la dirección en la que se propagará la partícula (opuesta a la dirección de propagación de la antipartícula).



El resultado para $G(x', x)$ del campo escalar

complejo es el mismo que vimos ya para el campo real.

Recordar que nuestro campo tiene además orden que describe a un número arbitrario de partículas, podemos interesarnos también calcular la amplitud de probabilidad de empezar con algún número n de partículas en x_1, \dots, x_n y terminar con otro número n' de partículas en $x'_1, \dots, x'_{n'}$. Esta amplitud está codificada en el correlador (o función de correlación, o función de Green) de $n + n' \equiv N$ puntos L4

$$G_N(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_{n'}) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \hat{\phi}(x'_1) \dots \hat{\phi}(x'_{n'}) \} | 0 \rangle$$

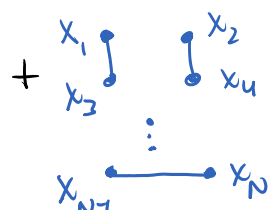
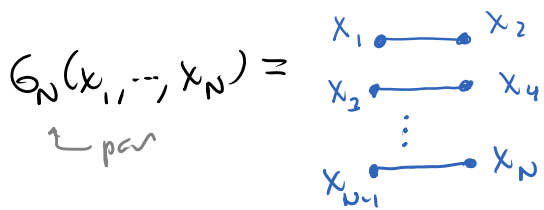
Pero en la teoría libre, las partículas no se interactúan unas a otras, y el número de partículas no cambia ($n = n' \Rightarrow N$ debe ser par), así que conociendo la

amplitud de propagación de 1 partícula tenemos ya toda la información necesaria para el caso general. Usando el llamado "teorema de Wick" (ver ejercicio 5e), es posible mostrar que

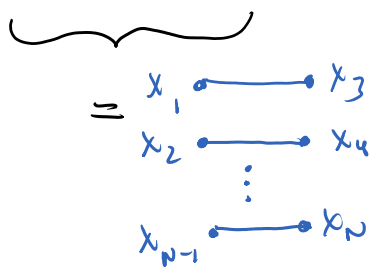
$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ es } \underline{\text{impar}} \\ G(x_1, x_2) G(x_3, x_4) \dots G(x_{N-1}, x_N) \\ \quad + G(x_1, x_3) G(x_2, x_4) \dots & \text{si } N \text{ es } \underline{\text{par}} \\ \quad + \text{todas las otras permutaciones} \end{cases}$$

que se puede visualizar con dibujitos:

todas las $\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!}$



opciones entre en el mismo pie, porque las partículas son idénticas



= Suma sobre todas las "Diagramas de Feynman"

con N puntos x_1, \dots, x_N conectados por líneas (donde la presencia de más de una línea representa el producto de los G correspondientes)

Hasta ahora hemos hablado de un

campo libre \leftrightarrow \mathcal{L} cuadrático (ec. de mov. lineal)

\leftrightarrow Modos de Fourier desacoplados

\leftrightarrow Partículas no interactuantes

Si agregamos a \mathcal{L} términos cúbicos en φ o más altos, la ec. de mov. para φ ya no será lineal, y los modos de Fourier $\varphi(t, \vec{p})$ no estarán ya desacoplados (\therefore no serán modos normales). La situación se vuelve bastante

confusa porque este cambio no solo hace que las partículas interactúen entre sí, sino que modifica incluso la definición misma de lo que es una partícula $|\vec{p}\rangle$ (y \therefore también del vacío $|0\rangle$). El punto clave es

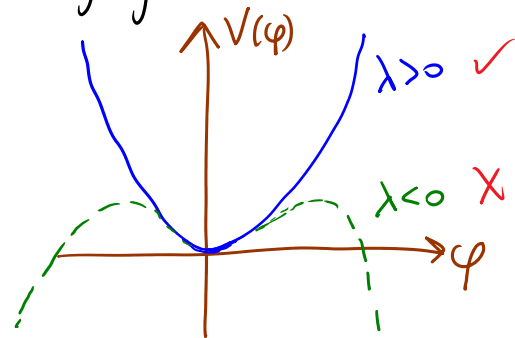
que al permitir que las viejas partículas (\leftrightarrow modos de Fourier) interactúen una con otra, inevitablemente acaban también interactuando consigo mismos.

La relación entre el campo y las partículas será mucho más sutil.

Para la teoría libre, descubrimos/entendimos la relación entre el campo $\hat{\varphi}(x)$ y las partículas asociadas (sus "cuantos" básicos \leftrightarrow excitaciones más pequeñas posibles) solo después de resolver de forma exacta la ecuación de Klein-Gordon. Y para el caso de un campo interactuante, no seremos capaces de semejante proeza, porque la ecuación de movimiento es no lineal.

Para ser más concretos, consideremos la teoría de un campo escalar real con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2}_{\text{Término Cinético}} - \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv -V(\varphi)} \text{ Energía Potencial}$$



El parámetro λ , que determina la intensidad de las interacciones, se conoce como constante de acoplamiento, o simplemente acoplamiento.

El momento canónico conjugado a $\varphi(x)$ sigue siendo

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x), \text{ y el proceso}$$

de cuantización involucrará por supuesto el reemplazo

$$\varphi(x), \pi(x) \longrightarrow \hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x) \text{ (en el cuadro de Heisenberg)}$$

con las reglas de conmutación usuales

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \underbrace{\hat{\pi}(t, \vec{x}')}_{\dot{\hat{\varphi}}(t, \vec{x}')}] &= i \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}), \\ [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] &= 0 = [\hat{\pi}, \hat{\pi}]. \end{aligned}}$$

Pero la ec. de Heisenberg para $\hat{\varphi}(x)$ (que coincide con la ec. de m.p.v. clásica)

$$(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi}(x) = -\frac{\lambda}{3!}\hat{\varphi}^3(x)$$

es No lineal, y $\therefore \hat{\varphi}(x)$ No puede ya expresarse como una combinación lineal de ondas planas con coeficientes

$$\hat{a}_p \text{ y } \hat{a}_p^\dagger.$$

$\swarrow \equiv$ teoría débilmente acoplada

Por otro lado, si las interacciones son débiles ($\Leftrightarrow \lambda \ll 1$), esperaríamos que la dinámica del campo se pueda aproximar con una expansión perturbativa en potencias de λ , que tenga como punto de partida al campo libre ($\lambda=0 \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{KG}}$).

Notando que podemos separar al Hamiltoniano

$$H = \underbrace{\int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right]}_{\equiv H_0 \leftarrow \text{libre}} + \underbrace{\int d^3x \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv H_{\text{int}} \leftarrow \text{interacción}},$$

nos conviene definir un cuadro en donde el operador de campo (y todos los operadores) evolucionen no con \hat{H} sino con \hat{H}_0 .

Es decir, en lugar del cuadro de Schrödinger,

$$\hat{O}_S, \quad |\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S,$$

o el de Heisenberg,

$$\hat{O}_H(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t}, \quad |\psi\rangle_H \equiv e^{i\hat{H}t} |\psi(t)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_S,$$

usaremos el llamado cuadro de interacción (o de Dyson,
o de Tomonaga)

$$\hat{O}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0^S t} = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} \hat{O}_H(t) e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}_0^S t},$$

$$|\psi(t)\rangle_I \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} |\psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_H.$$

En este cuadro tenemos, por construcción, que la ec. de evolución para los operadores involucra solo al Hamiltoniano libre,

$$i\partial_t \hat{O}_I(t) = [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^S] \quad (+ i\partial_t \hat{O}_I(t)) \\ = [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^I]$$

↖ si hay dependencia explícita de t

(donde para la segunda igualdad hemos usado el hecho de que

$$\hat{H}_0^I \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_0^S e^{-i\hat{H}_0^S t} = \hat{H}_0^S = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}_I^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\phi}_I)^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}_I^2 \right]).$$

Esto es cierto en particular para $\hat{\phi}_I(x)$, que satisface entonces la ec. de mov. libre,

$$(\partial^2 + m^2) \hat{\phi}_I(x) = 0$$

Klein-Gordon.

Podemos entonces desarrollar como antes

$$\hat{\varphi}_{\text{I}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(e^{-ip \cdot x} \hat{a}_p + e^{ip \cdot x} \hat{a}_p^\dagger \right) \Big|_{p^0 = E_p \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

↑ independientes de t

y las relaciones de conmutación implican necesariamente que

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad [\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = 0.$$

Además, tenemos evidentemente que

$$:\hat{H}_0^{\text{I}}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p.$$

Tod esto resulta muy reconfortante, ¡pero hasta ahora, parece que solo estamos jugando a olvidarnos de \hat{H}_{int} !

Como habíamos dicho, el efecto de las interacciones se

ve ahora en la evolución de los estados, $\hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_{\text{I}} &= e^{i\hat{H}_0^{\text{I}}t} |\psi(t)\rangle_{\text{S}} = e^{i\hat{H}_0^{\text{I}}t} e^{-i\hat{H}(t-t')} |\psi(t')\rangle_{\text{S}} \\ &= e^{i\hat{H}_0^{\text{I}}t} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^{\text{I}}t'} |\psi(t')\rangle_{\text{I}} \end{aligned}$$

$$\equiv \hat{U}_{\text{I}}(t, t') \quad \text{Operador de evolución}$$

(en el cuadro de interacción)

Felizmente, este objeto aparentemente horrendo puede ser reescrito puramente en términos de $\hat{\varphi}_{\text{I}}(x)$:

orden temporal (p. 37)
definida por Taylor

Hamiltoniano de interacción, en el cuadro de interacción

$$\hat{U}_I(t, t') = \mathcal{T} \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^t d\tau \hat{H}_{int}^I(\tau) \right] \right\}$$

← misma $\partial_t \hat{U}$, en misma condición inicial

$$= \mathcal{T} \left\{ \exp \left[-\frac{i\lambda}{4!} \int_{t'}^t d^4 y \hat{\phi}_{\mp}^4(y) \right] \right\}$$

↑ solo $\hat{a} + \hat{a}^\dagger$!

$$= \mathcal{T} \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int_{t'}^t d^4 y \hat{\phi}_{\mp}^4(y) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int_{t'}^t d^4 y_1 \hat{\phi}_{\mp}^4(y_1) \int_{t'}^t d^4 y_2 \hat{\phi}_{\mp}^4(y_2) + \dots \right\}$$

↑ serie de Taylor en λ , tal como describimos

Ahora, ¿qué queremos calcular? No es nada otro, porque la jugada ha cambiado por completo:

- El estado $|0\rangle$ tal que $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$
No es (no tendría por qué ser) el VACÍO, el estado en menor energía en la teoría, que denotaremos $|\Omega\rangle$.
- El estado $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$ No es el estado de 1 partícula, que seguiremos denotando $|\vec{p}\rangle$.
- la masa de las partículas asociadas al campo ya No es m . No tiene por qué serlo:

La conexión que encontramos entre $m^2 \equiv \partial_\phi^2 V(\phi)$ y
y la masa de las partículas la descubrimos como
resultado (inesperado) de un cálculo en el caso
específico del campo libre.

- El operador $\hat{\phi}$ ya no solo crea 1 partícula:

$$\hat{\phi}(\vec{p})|\Omega\rangle \sim f_1|\vec{p}\rangle + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3-1} 2E_{\vec{p}'}} f_2(\vec{p}')|\vec{p}-\vec{p}', \vec{p}'\rangle + \dots$$

41

Ante esta falta de claridad, como paso intermedio
podemos primero identificar cantidades que estén
nítidamente definidas a nivel del lenguaje de la teoría,
y después preocuparnos de cómo extraer física de ellas

Una elección que resulta muy útil es plantearnos la
meta de determinar las correlaciones (o funciones de
corrección, o funciones de Green) de N puntos:

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle$$

orden ↗
temporal

Operador en
caso de Heisenberg

↗ vacío verdadero
(con dependencia
temporal completa)

que en el caso libre eran directamente amplitudes
de propagación (pp. 40-41), y aquí normalmente las

podemos pensar como algo similar.

Aunque no es obvio, quizás resultando ser el caso que toda la información física de cualquier teoría de campos se puede extraer de los correladores $G_N(x_1, \dots, x_N) \forall N$.

¡Así que la meta en la vida de cualquier campista es poder calcular estas funciones!

Afortunadamente, usando la conexión entre el cuadro de Heisenberg y el cuadro de interacción se puede mostrar que

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_I(x_1) \dots \hat{\phi}_I(x_N) \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle} .$$

Recordando que $\int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t) = -\frac{\lambda}{4!} \int_{-T}^T d^4y \hat{\phi}_I^4(y)$, vemos que esta fórmula reduce el cálculo de cada correlador

G_N de la teoría interactuante ¡al cálculo de correladores para un campo libre, $G_N^{(0)}$ (fundamentalmente $N \geq 1$)!

Y este último de hecho mencionamos en la p.39 que son muy fáciles de calcular: son simplet sumas de productos de propagadores libres $G_2^{(0)}(x, x') = G(x, x')$ (pp. 36-7) que pueden resumirse con diagramas de Feynman. P.ej.

correlador de 4 puntos a orden λ^0 (interacciones todavía no figuran)

$$G_4^{(0)}(x_1, \dots, x_4) = \text{diagrama} = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3}$$

\equiv suma sobre todas las maneras de conectar los 4 puntos de modo que los 4 puntos estén en línea (\leftrightarrow propagadores)

"pase por atrás"

$$= G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) + G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) + G(x_1, x_4)G(x_2, x_3)$$

La novedad en la teoría interactuante es que, por la presencia de

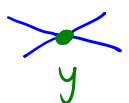
$$T \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4y_1 \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_1) \int d^4y_2 \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_2) + \dots \right\}$$

tendremos que calcular términos como

$$\langle 0 | T \left\{ \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_1) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_2) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_3) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_4) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4y \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y) \right\} | 0 \rangle,$$

donde 4 inserciones de $\hat{\phi}_{\mathbb{I}}$ conciden en el mismo punto y , que además (a diferencia de x_1, \dots, x_4) no está fijo, sino que se integra sobre todo el espaciotiempo.

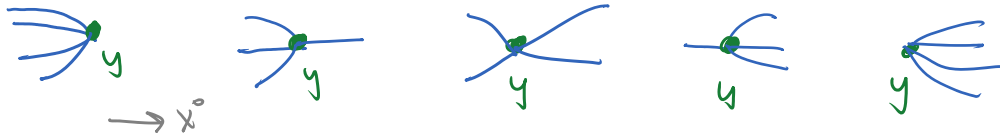
En los diagramas correspondientes, el punto y , donde se produce el efecto de la interacción será un sitio donde 4 líneas confluyen, un vértice de 4 pines, que es entonces un nuevo ingrediente para nuestro

representación gráfica:  $\equiv -i\lambda \int d^4y$ (el factor de 4! se cancela)

Físicamente, el efecto de la interacción

$$\hat{\mathcal{L}}_I^4(y) \sim (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4 \sim \frac{1^4}{4!} + \frac{1^3 1^\dagger}{3! 1!} + \frac{1^2 1^\dagger 2}{2! 2!} + \frac{1 1^\dagger 3}{1! 3!} + \frac{1^\dagger 4}{4!}$$

es permitir procesos donde el número de partículas cambia de 4 a 0, de 3 a 1, de 2 a 2, de 1 a 3, o de 0 a 4



Usando líneas y estos vértices, se arman combinaciones

como , que tienen una interpretación intuitiva.


⚠️ ojo: estas no son las partículas físicas, sino las que eran libres, $\hat{a}^\dagger|0\rangle$ (\leftrightarrow modo de Fourier)

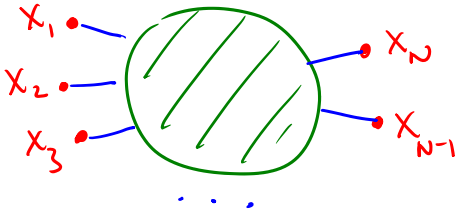
Vemos entonces que los diagramas de Feynman tienen una utilidad doble (si $\lambda \ll 1$). Por una parte, nos permiten visualizar el efecto de las interacciones como procesos donde se crean y/o aniquilan partículas (en grupos de 4 por \mathcal{L}^4).

Las que existen solo efímeramente, entre procesos sucesivos de interacción, se conocen como partículas virtuales ($\leftrightarrow p^2 \neq m^2$).

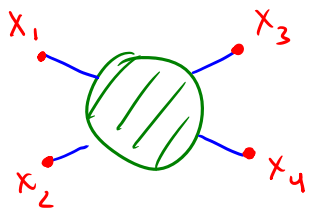
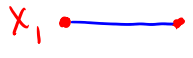



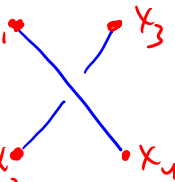
Por otra parte, los diagramas son una herramienta eficiente para hacer cálculos, gracias a las instrucciones explícitas que nos permiten convertir cada diagrama en una fórmula, instrucciones conocidas como reglas de Feynman.


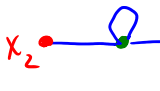
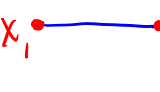
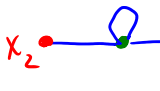
Cuando uno mira los detalles, se encuentra que

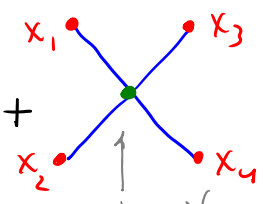
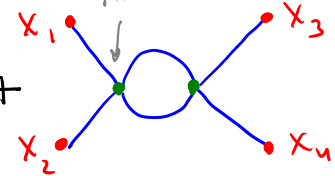
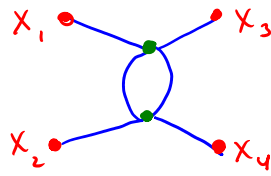
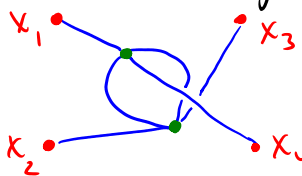
$G_N(x_1, \dots, x_N) =$ Suma sobre todos los diagramas "conexos" (es decir, sin poder totalmente desconectar como por ej. ) topológicamente distintos con N puntos externos x_1, \dots, x_N

\equiv 

Por ej., la función de 4 puntos $G_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ está dada por


 $=$


 $+$

 $+$

 $+$




 $+$



otros 4 diagramas + con 1 vértice adherido a 1 propagador

Las reglas de Feynman para traducir cada diagrama a una fórmula son (comitiendo de ahora en adelante los colores):

1) Por cada propagador, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x' \end{array} \equiv G(x, x') \quad \text{(amplitud de probabilidad de propagación libre).}$$

2) Por cada vértice, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ | \\ y \end{array} \equiv -i\lambda \int d^4 y \quad \text{(amplitud de probabilidad de que 1 partícula se convierta en 3, ó 2 en 2, ó 3 en 1, ó 0 en 4, ó 4 en 0).}$$

3) Por cada punto externo, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \equiv 1 \quad \text{(amplitud de probabilidad de que la partícula que está en } x \text{ esté en } x).$$

4) Multiplícan los factores asociados a todas las partes.

5) Dividir entre el "factor de simetría", un número que depende de las propiedades del diagrama, y evita sobrecontar procesos (ver pej. pp. 405-9 de mi curso de campos de física).

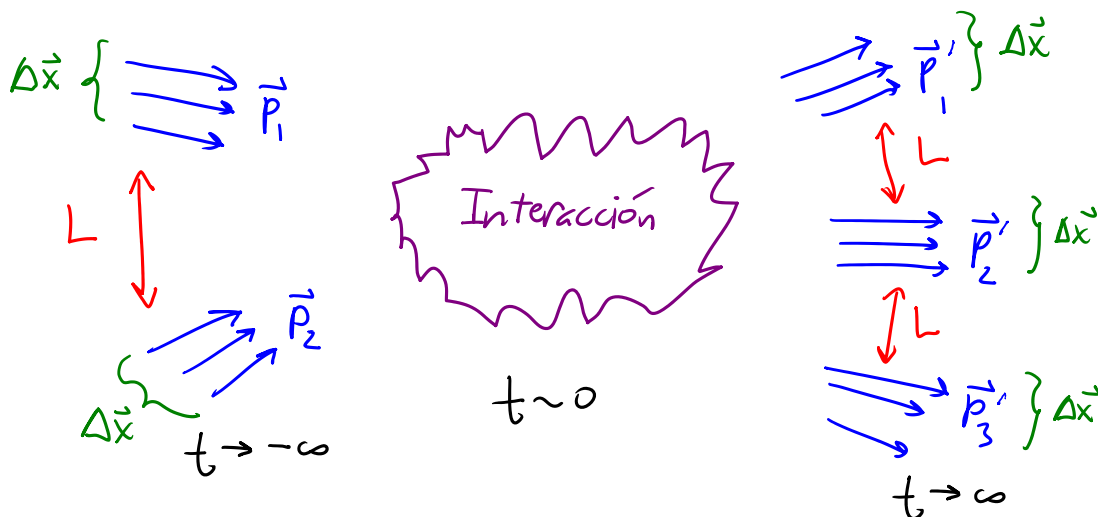
NO hace falta tal corrección en pej. QED o QCD.

Hay reglas análogas para calcular correladores en espacio de momentos,

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_N) \equiv \int d^3 x_1 \dots d^3 x_N e^{ip_1 x_1} \dots e^{ip_N x_N} G_N(x_1, \dots, x_N),$$

y mejor aún, para extraer de ellos predicciones relacionadas con los experimentos de colisiones de partículas.

La situación experimental usual se refiere a un proceso de dispersión, donde un cierto número N de partículas con momentos poco inciertos $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ se encuentran inicialmente (en " $t \rightarrow -\infty$ ") separadas entre sí por distancias macroscópicas, luego se aproximan e interactúan (en " $t \sim 0$ "), para finalmente separarse de nuevo, de modo que al final (cuando " $t \rightarrow +\infty$ ") obtenemos un número N' de partículas distantes, con momentos $\vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_{N'}$:



Al principio y final podemos enumerar las partículas individualmente, por que si enorme separación implica que No interactúan.

Desearíamos calcular las amplitudes de dispersión

$\langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_{N'} ; - | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N ; + \rangle$ ← amplitud de probabilidad de que ocurra el proceso de dispersión descrito (relacionadas con "secciones eficaces" y "tasas de decaimiento").

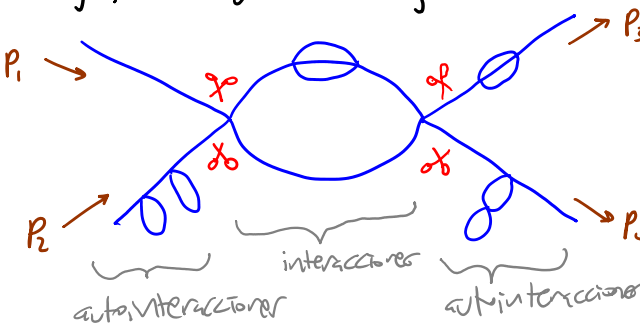
En términos de diagramas de Feynman, uno encuentra que:

$$\langle p'_1 p'_2 \dots p'_N ; - | p_1 p_2 \dots p_N ; + \rangle =$$

Suma sobre diagramas
cruces y amputados

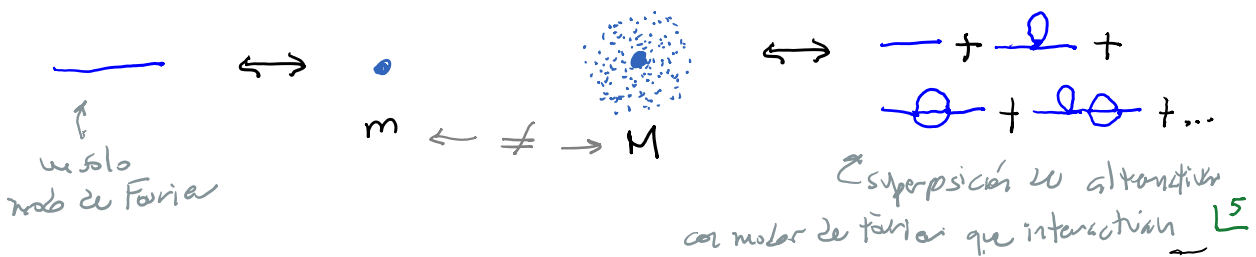
Diagramas "amputados" son los que No incluyen tramos donde una partícula inicial o final interactúa solo consigo misma.

Pej., el siguiente diagrama no es amputado, y para obtener uno que sí lo es, debemos omitir los tramos más allá de las tijeras, incluir los propagadores donde están las tijeras (por eso arriba dibujé las patas externas de los diagramas en cuestión con líneas punteadas, aunque esa no es una notación habitual). La omisión de esos tramos se debe a la distinción



La distinción

partícula "desnuda" vs. partícula física o "vestida"



Para entender a y hacer cálculos con campos no escalares, las ideas y herramientas básicas son las mismas, aunque en cada caso surgen novedades interesantes.

• CAMPO VECTORIAL

Para describir partículas con espín 1, se utiliza un campo vectorial $A_\mu(x)$: una colección de 4 números en cada lugar, que bajo transformaciones de Poincaré (= Lorentz + traslaciones),

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + c^\mu,$$

↪ matriz 4x4 tal que $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

se mezclan de acuerdo con

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

Si nuestro campo vectorial es

↪ nuevo nombre del punto
↪ nueva función característica

No mejor, como lo es el campo de Maxwell, hay una

novedad importante: redundancia por las "transformaciones de norma"

(gauge) $A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Theta(x)$ ↪ o calibre

función arbitraria ↗

que NO cambian nada físico.

Por la invariancia de norma, la acción en el caso libre debe ser

$$S[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{con } F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

Acción de Maxwell

← solo término cinético

y en la expansión del campo

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda} \epsilon_{p\lambda}^\mu + e^{ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda}^\dagger \epsilon_{p\lambda}^{\mu*} \right) \Big|_{p^0 = E_p = |\vec{p}|}$$

figuran en última instancia solo 2, y no 4, parámetros de operadores de creación y aniquilación para cada \vec{p} . Esto nos es familiar de electro: $A_\mu(x)$ tiene 4 componentes, pero los fotones (o las ondas electromagnéticas clásicas) tienen solo 2 estados de polarización independientes.

Ahora podemos preguntarnos cómo acoplar a un campo escalar complejo $\Phi(x)$ con este campo vectorial sin masa $A_\mu(x) \equiv$ campo de norma. La opción más sencilla resulta ser

$$\mathcal{L} = (\overline{D^\mu \Phi})^* D_\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{Electrodinámica clásica}$$

ojo

↙

$$\equiv (\partial_\mu + iqA_\mu)\Phi$$

"derivada covariante"

← contiene términos de interacción

$$\sim qA\Phi^*\Phi, q^2 A^2\Phi^*\Phi$$

\mathcal{L} es invariante bajo la transformación combinada

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\varphi\theta(x)} \Phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x)$$

↑ rotación de fase local (distinta en cada punto)

Por construcción, $D_\mu\Phi$ transforma igual que Φ :

$$D_\mu\Phi(x) \rightarrow D'_\mu\Phi(x) = e^{i\varphi\theta(x)} D_\mu\Phi(x).$$

Esta receta para acoplar a A_μ en campos complejos, $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$, conocida como "acoplamiento mínimo", es LA manera en la que el potencial electromagnético se acopla a campos cargados.

De los términos de interacción vemos que φ es el acoplamiento, es decir, la carga eléctrica de las partículas asociadas a Φ . En la p. 30 teníamos $\varphi=1$, porque allí llamamos θ a la fase por la cual rotamos a Φ , y así es $\varphi\theta$, con lo cual la carga total se relaciona a

$$\hat{Q} = \int \frac{j^3_0}{(2\pi)^3} \left(\underbrace{\varphi \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p}_{\text{cada partícula tiene carga } \varphi} - \underbrace{\varphi \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p}_{\text{cada antipartícula tiene carga } -\varphi} \right).$$

• CAMPO ESPINORIAL

Para describir a partículas de espín 1/2, como el electrón, en su caso de cuántica no relativista definieron el concepto de espinor como un paquete de 2 números complejos $\chi = \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix}$, que transforman mezclándose de una cierta

manera específica bajo rotaciones especiales.

Para un electrón relativista usamos el concepto de "espinor de Dirac", un paquete de 4 números complejos

$\Psi \equiv \psi_a \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ que transforman de cierta manera

específica bajo Lorentz: $\psi_a \xrightarrow{\Lambda} \psi'_a \equiv M_{ab}(\Lambda) \psi_b$.
 matriz compleja 4x4

Definimos un Campo de Dirac (= espinorial), $\Psi(x)$, como aquel que nos da un espinor de Dirac en cada punto. En el caso libre, la densidad lagrangiana más sencilla que podemos escribir (cuadrática, escalar, real) es

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi$$

Lagrangiano de Dirac

↑ necesario para que la acción sea real ↑ Ojo: m y no m², por análisis dimensional

Las γ^μ ($\mu=0,1,2,3$) son 4 matrices 4x4 ($\gamma^\mu = \gamma_{ab}^\mu$)

relacionadas con la definición de las matrices $M_{ab}(\Lambda)$

bajo las cuales transforman los espinores, $\psi'_a \equiv M_{ab}(\Lambda) \psi_b$.

Concretamente, $\left\{ \sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right.$

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Matrices de} \\ \text{Dirac} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Matrices} \\ \text{de Pauli} \end{array}$$

Satisfacen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$
(relaciones análogas a $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{1} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k$).

$\gamma \bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$ "espinores conjugados de Dirac" (tal que $\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} M^{-1}$).

La ecuación de movimiento resultante es

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi(x) = 0 \quad \text{ecuación de Dirac.}$$

Puede mostrarse que esta ecuación implica que se satisface también la de Klein-Gordon, $(\partial^2 + m^2)\Psi = 0$, $\Rightarrow p^2 = m^2$, y además impone una restricción que determina a 2 de las componentes en términos de las otras 2. La expansión del campo es

$$\hat{\Psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left(\hat{a}_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_p}$$

↑ espinores solución de Dirac

$$\hat{\bar{\Psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_p}$$

s=1,2 etiquetas estado de espín

con $\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger}, \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger}$ respectivamente operadores de creación de partícula (p.ej. electrón) y antipartícula (antielectrón).

Uno descubre que existen estados con energía arbitrariamente negativa, a menor de que implementemos la cuantización canónica imponiendo relaciones de anticonmutación en lugar de cuantización,

$$\{\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbb{1},$$

$$\{\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} \dagger \right\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta^{ss'} = \left\{ \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} \dagger \right\},$$

$$\left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} \right\} = \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} \right\} = 0 = \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}}^{s'} \dagger \right\} = \left\{ \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} \dagger \right\}$$

Es decir, descubrir que las partículas de espín 1/2 (\Leftrightarrow propiedades de transformación bajo Lorentz) deben ser necesariamente fermiones ($\Leftrightarrow \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle = -\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle$),

y con ello explicamos el principio de exclusión de Pauli ($\left\{ \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \right\} = (\hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger)^2 = 0 \Rightarrow \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger | \vec{p}_1 \rangle = 0$),

Más en general, se puede demostrar el

Teorema de Espín-Estadística: las partículas

de espín $\begin{cases} \text{entero} \\ \text{semientero} \end{cases}$

deben ser $\begin{cases} \text{bosones} (\Leftrightarrow \text{conmutadores}) \\ \text{fermiones} (\Leftrightarrow \text{anticonmutadores}) \end{cases}$.

Habiendo entendido al campo de Dirac $\psi(x)$, podemos también acoplarlo al campo de Maxwell $A_\mu(x)$ usando la receta de "acoplamiento mínimo" de la p. 56. La teoría resultante es la electrodinámica cuántica (QED),

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \equiv \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}(\partial_\mu A_\nu) + \mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\psi, D_\mu \psi, \bar{\psi})$$

es decir,

$$\begin{aligned} \uparrow &\equiv \partial_\mu + i\cancel{q}A_\mu \\ &\text{para el electrón, } \cancel{q} = -e \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \cancel{q}A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \text{---} & \text{~~~~~} & \text{---} \\ \text{---} & \text{~~~~~} & \text{---} \\ \text{---} & \text{~~~~~} & \text{---} \end{array} = \frac{i(\cancel{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}, \quad \frac{-i\cancel{N}_{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon}, \quad -i\cancel{q}\gamma^\mu$$


propagador del electrón propagador del fotón vértice

¡Esta es una teoría del mundo real! (Parte del "Modelo Estándar".)

Entre otras cosas, hemos aprendido entonces que:

- (1) Para explicar a los electrones y fotones, postulamos la existencia de 2 gelatinas invisibles que llenan cada una todo el universo (y por tanto están apiladas una sobre la otra): el campo del electrón (campo de Dirac espinorial) y el electromagnético (campo de Maxwell vectorial sin masa).
- (2) Si estas 2 gelatinas no estuvieran adheridas entre sí (si los campos NO interactúan), entonces cada electrón sería una onda minúscula puramente en el campo del electrón --- , y cada fotón sería una onditita puramente en el campo electromagnético, ~~~~~ .

③ Por ser un campo complejo, el mismo campo del electrón libre sustentaría un segundo tipo de onda minuscula: el antielectrón ← .

④ Pero en el mundo real, estos 2 campos sí están acoplados, es decir, las 2 gelatinas están adheridas entre sí, lo cual permite que una onditita en una de ellas se esparza parcial o totalmente a la otra: .

⑤ Cada electrón del mundo real es entonces una onditita conjunta en ambos campos, y de hecho, una superposición cuántica entre infinitas alternativas diferentes.



 = 

i todo esto está ocurriendo al mismo tiempo!

La masa M y carga Q de este complicado objeto difieren de la m y la q que aparecen en L_{QED} (y sus valores dependen de qué tan de cerca o de lejos examinemos al electrón físico, penetrando en su "nube de partículas virtuales").

El cambio de variables $m, q \rightarrow M, Q$ se llama "renormalización".

⑥ Algo similar aplica para el fotón del mundo real:

 = 

con la diferencia de que aquí sí cancela el valor de la masa física ($=0$) con el de la masa 'desnuda' (y también la carga física sigue siendo cero).

5] *Apéndice de la p. 88*