Mini-Introducción a Teoría Cuántica de Campos: Ejercicios

Instrucciones

- Por supuesto, cada vez que nos saltamos algún paso durante la clase, tu tarea (no necesariamente factible de completar durante los días de la Escuela) es comprobarlo. Y cada vez que demos por hecho algo que no te resulte completamente claro, además de preguntar lo más que puedas (dentro y fuera de clase, a mí y a los otros estudiantes), debes considerar que tu tarea es en algún momento (durante la Escuela o en el futuro) pensar y leer lo suficiente (en tantas referencias como necesites) para aclarártelo.

- Más allá de lo anterior, aquí hay una lista de ejercicios para atacar durante las sesiones de trabajo. Probablemente para cada clase hay más de los que alcanzarás a completar en la correspondiente sesión de trabajo; pero no te frustres si no terminas. Lo importante es que hagas tu mejor esfuerzo.

- Te sugiero saltarte los ejercicios que ya hayas hecho antes, o te resulten obvios, o consideres inútiles (para ti), de modo que tengas más tiempo para dedicarle a los que sí te resulten novedosos/útiles. Si terminas antes de la hora, por supuesto puedes ponerte a estudiar otros aspectos del curso (p.ej. repasando en los apuntes lo que vimos, o leyendo por anticipado lo que veremos).

- Naturalmente es válido y provechoso discutir lo que necesites con los demás; solo te pido que antes de eso hagas un verdadero esfuerzo por avanzar/entender tú mismo lo más que puedas en cada ejercicio.

- A menos que el enunciado diga explícitamente lo contrario, puedes usar directamente cualquier resultado o fórmula que hayamos visto en clase, sin necesidad de volverlo a deducir.

1. Sobre campos clásicos

a) Considera un campo relativista $\sigma(x)$ cuyo valor en cada punto del espaciotiempo es un solo número real. ¿Se trata de un campo escalar?

b) Si su densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + d_2 \left(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma\right)^2 + s_2 \sigma^2 + s_3 \sigma^3 + s_4 \sigma^4 \ ,$$

c) ¿cuál es su acción?

d) ¿Se trata de un campo libre?

e) Calcula su ecuación de movimiento.

f) Si $d_2 = 0$, ¿cuál es el potencial de esta teoría?

g) En este mismo caso, calcula el momento canónico conjugado al campo.

h) Siguiendo con $d_2 = 0$, calcula la densidad de energía en un punto arbitrario x^μ.

i) Si además $s_3 = s_4 = 0$, comprueba que la ecuación de movimiento se reduce al resultado esperado. (¿Cómo se llama esta ecuación?)

j) Siguiendo con $d_2 = 0$ pero volviendo a tener $s_3, s_4 \neq 0$, calcula el tensor de energía-momento asociado a $\sigma(x)$.

k) Comprueba que este tensor de energía-momento se conserva.

2. Sobre campos clásicos

a) Considera una teoría con 2 campos escalares reales $I(x)$ y $R(x)$, con lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu R \partial^\mu R - \frac{1}{2}m_R^2 R^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu I \partial^\mu I - \frac{1}{2}m_I^2 I^2 - \lambda_R R^4 - \lambda_I I^4 - \lambda_{RI} R^2 I^2 \ ,$$

donde $m_R, m_I, \lambda_I, \lambda_R, \lambda_{RI}$ son números. Ahora debemos tener 2 ecuaciones de movimiento: una para cada campo. Calcúlalas.

b) Si $m_R = m_I = m$, $\lambda_R = \lambda_I = \lambda$ y $\lambda_{RI} = 2\lambda$, el lagrangiano se simplifica mucho, y puede expresarse de manera más compacta en términos del campo *complejo*

$$C(x) \equiv (R(x) + iI(x))/\sqrt{2} \qquad \left(\Leftrightarrow \quad C^*(x) \equiv (R(x) - iI(x))/\sqrt{2} \quad \right) .$$

Determina la forma de $\mathcal{L}$ resultante.

c) Considerando a $C(x)$ y $C^*(x)$ como campos independientes, deduce sus 2 ecuaciones de movimiento.

d) Comprueba que estas 2 ecuaciones son equivalentes a las que obtuviste antes para $R(x)$ e $I(x)$ (una vez que ajustas $m_R, m_I, \lambda_R, \lambda_I, \lambda_{RI}$ como especificamos arriba).

e) En términos de $C(x)$ y $C^*(x)$, ¿qué simetría interna tiene esta teoría? ¿Es contínua?

f) Solo como dato cultural, no hay ninguna razón por la cual tendríamos que restringirnos a solo estas 2 maneras de escribir nuestra teoría. Podemos, por ejemplo, descomponer $C(x)$ en coordenadas polares $\rho(x)$ y $\phi(x)$ en lugar de cartesianas, $C(x) \equiv \rho(x)\exp(i\phi(x))$, o incluso usar alguna combinación más estrambótica como $R(x) \equiv S(x)(1+T(x)^2)$ y $I(x) \equiv T(x)(1-2S(x)^3)$. (Claro que, para esta teoría, este último cambio no resulta particularmente útil.) Todos estos cambios de variables son ejemplos de lo que se conoce como *redefiniciones de campos*.

3. Sobre la cuantización del campo escalar libre

a) Muestra que las relaciones de conmutación para los operadores de ascenso y descenso (creación y aniquilación) dadas en la p. 21 en verdad implican los conmutadores canónicos deseados para el operador de campo y su momento conjugado (tal como las escribimos en la p. 18).

b) ¿Qué diferencia hay entre $\hat{a}_{\vec{p}}\,\hat{a}_{\vec{p}'}\,\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}''}$ y el mismo producto pero en *orden normal*?

c) Considerando a $\hat{a}_{\vec{p}}$ como lo que es, un operador en el cuadro de Schrödinger, y usando la expresión para el Hamiltoniano $:\hat{H}:$ en términos de operadores de creación y aniquilación, determina su contraparte en el cuadro de Heisenberg, $\hat{a}_{\vec{p}}(t)$. Para esto te resultará muy útil la llamada fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \ldots$$

(que, si acaso tienes curiosidad, puedes demostrar otro día, considerando la función $\hat{F}(\lambda) = \exp(\lambda\hat{A})\hat{B}\exp(-\lambda\hat{A})$ y sus derivadas).

4. Sobre la cuantización del campo escalar libre

a) Para un campo escalar libre $\phi(x)$, muestra que las ecuaciones de Heisenberg para el operador de campo y para su momento canónico conjugado en verdad implican que $\hat{\phi}(x)$ satisface la misma ecuación de movimiento que $\phi(x)$ satisface clásicamente.

b) Calcula $W(x,x') \equiv \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0\rangle$, expresando el resultado en términos de una integral sobre $\vec{p}$ que ya no involucre ningún operador. Dato cultural: este objeto se conoce como la *función de Wightman* (de 2 puntos) para el campo.

c) En el curso hemos entendido (o entenderemos) la interpretación física de $W(x,x')$: cuando $x'^0 < x^0$, $W(x,x')$ representa la amplitud de probabilidad de que la partícula asociada al campo se propague de x' a x. Nota una propiedad interesante: el resultado NO es cero fuera del cono de luz (cuando el intervalo entre x y x' es tipo espacio, $(x,x')^2 < 0$). En otras palabras, ¡hay una cierta probabilidad (exponencialmente decreciente con la distancia) de que la partícula se propague más rápido que la luz! Si $x'^0 > x^0$, lo natural sería considerar la amplitud de propagación *para adelante en el tiempo*, $W(x',x)$. Para cubrir ambas posibilidades con una sola expresión, es natural formar la combinación

$$G(x,x') \equiv \theta(x^0 - x'^0)W(x,x') + \theta(x'^0 - x^0)W(x',x) \equiv \langle 0|T\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\}|0\rangle \ ,$$

donde $\theta(y)$ denota a la función escalón de Heaviside ($\theta(y) = 1$ si $y > 0$, $\theta(y) = 0$ si $y < 0$), y hemos definido el *orden temporal* $T\{\ldots\}$ de un producto de operadores de campo $\hat{\phi}(x_n)$ como la instrucción de colocar los operadores de tal modo que su argumento temporal x_n^0 aumente de derecha a izquierda. Esta combinación se llama el *propagador de Feynman*. Usando tu resultado anterior para W, escribe explícitamente los 2 términos de G, todavía en términos de una integral sobre el 3-momento $\vec{p}$ (con la energía satisfaciendo la condición de capa de masa, $p^0 = E_{\vec{p}}$).

d) El propagador de Feynman se puede reexpresar de forma covariante bajo Lorentz,

$$G(x,x') = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x-x')}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \ ,$$

donde ahora se integra sobre el 4-momento completo (es decir, NO exigimos que p^0 satisfaga la condición de capa de masa), y el $i\epsilon$ en el denominador es un truco nemónico para especificar la manera en que el contorno de integración sobre p^0 debe eludir los 2 polos simples del integrando en $p^0 = +E_{\vec{p}}$ y $p^0 = -E_{\vec{p}}$ (adquiriendo una pequeña parte imaginaria para rodearlos). Si recuerdas el teorema de Cauchy, utilízalo para mostrar que a partir de esta expresión covariante en verdad se reproduce el resultado anterior, y en el camino, determina cuál es la elección apropiada para el contorno de integración sobre p^0. Si necesitas ayuda, puedes consultar p.ej. las pp. 20-23 del curso
`http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/indice.html#campos`
o las pp. 107-108 del libro de Greiner & Reinhardt
`http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/greiner.djvu`

5. Sobre amplitudes de propagación

a) Para un campo escalar libre $\phi(x)$, muestra que el propagador de Feynman $G(x', x)$ es *una función de Green* del operador diferencial de Klein-Gordon, ya sea actuando sobre el primer argumento, $-\partial'_\mu\partial'^\mu - m^2$, o sobre el segundo, $-\partial_\mu\partial^\mu - m^2$. (Si no recuerdas lo que quiere decir una función de Green, simplemente aplícale este operador diferencial a G, y fíjate lo que resulta.)

b) Tu resultado en el inciso anterior *no* depende de la manera específica en que se esquivan los polos del contorno de integración sobre p^0. Si los eludes de una manera distinta a la que define al propagador de Feynman $G(x', x) \equiv G_F(x', x)$, estarás definiendo entonces otra función de Green del operador de Klein-Gordon, otro propagador, que difiere del de Feynman por condiciones de frontera. En particular, a veces es útil trabajar con la llamada función de Green *retardada*, $G_R(x', x)$, que por definición es idénticamente cero para $t' < t$. Determina cuál debe ser el contorno específico de integración sobre p^0 en este caso.

c) En el ejercicio 4c), resaltamos que $W(x, x') \equiv \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0\rangle \equiv \langle x|x'\rangle$ NO se anula fuera del cono de luz (por ejemplo, cuando $t = t'$), lo cual quiere decir que nuestras partículas relativistas tienen una (pequeña) amplitud de probabilidad de propagarse más rápido que la luz. La pregunta importante es si esto puede conducir o no a violaciones de causalidad, es decir, a que algún *efecto físico* que ocurre en x pueda *afectar* a lo que ocurre en x'. Por ejemplo, si medimos el valor del campo en x y en x', no quisiéramos que el resultado de la primera medición pudiera afectar al de la segunda (o viceversa), porque entonces podríamos mandar señales más rápido que la luz. Esto equivale a preguntarnos si los operadores de campo correspondientes *conmutan* o no fuera del cono de luz. Haz el cálculo explícito, y responde la pregunta. (En algún momento posterior, te convendría repetir este ejercicio para un campo escalar complejo, calculando $[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^\dagger(x)]$ fuera del cono de luz, porque entonces podrás darte cuenta de que lo que ocurre para que el conmutador se anule es que ¡hay una cancelación entre la amplitud de propagación de partículas y antipartículas! Así que la existencia de antipartículas es vital para preservar la causalidad.)

d) Para calcular correladores en la teoría libre, un resultado crucial es el llamado

teorema de Wick, que establece una relación entre productos de operadores de campo en *orden temporal*, $T\{\hat{\phi}(x_1)\ldots\phi(x_N)\}$ (que son los que aparecen directamente en la definición de los correladores) y productos de operadores de campo en *orden normal* (que son los que facilitan el cálculo dentro de valores esperados en el vacío, porque al tener los operadores de aniquilación hasta la derecha, aniquilan a $|0\rangle$). La fórmula general, para N arbitrario, la puedes encontrar p.ej. en la p. 397 del curso
`http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/indice.html#campos`
(o en cualquier libro de texto de campos), donde lo que se llama la 'contracción' de $\hat{\phi}(x_1)$ y $\hat{\phi}(x_2)$ (y se denota conectando los 2 operadores con una línea por debajo de ellos) no es otra cosa más que al propagador de Feynman $G(x_1, x_2)$ (que es simplemente un número y por tanto puede meterse o sacarse libremente de la instrucción de orden normal). Comprueba explícitamente que la fórmula es válida en el caso más sencillo, $N = 2$. Es decir, que $T\{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\} =: \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) : +G(x_1, x_2)$.

6. Sobre la expansión perturbativa para el campo escalar libre

a) Para el campo escalar con interacción cuártica que discutimos en la clase, dibuja todos los diagramas de Feynman relevantes para calcular el correlador de 2 puntos ($\equiv$ propagador) de la teoría interactuante, $G_2(x_1, x_2)$ por medio de la expansión perturbativa, hasta (es decir, incluyendo) orden λ^2.

b) Asígnale un nombre a la posición de cada vértice interno en los diagramas anteriores, y traduce cada diagrama a una fórmula.

c) Imagina que en lugar de tener la interacción cuártica, agregramos una interacción cúbica, $\mathcal{L}_{int} = -g\phi^3/3!$. Dibuja el potencial clásico para esta teoría. ¿Notas algo raro?

d) Para esta interacción cúbica, ¿cuál es la constante de acoplamiento?

e) Al hacer la expansión perturbativa de esta teoría (ignorando olímpicamente el problema que detectaste 2 incisos arriba), ¿qué tipo de vértices tendrás en los diagramas de Feynman, y cuál será la regla para su contribución a las fórmulas correspondientes?

f) Dibuja el o los diagramas relevantes para calcular $G_3(x_1, x_2, x_3)$ hasta (es decir, incluyendo) primer orden en la constante de acoplamiento.

g) Dibuja el o los diagramas relevantes para calcular $G_4(x_1, x_2, x_3)$ hasta (es decir, incluyendo) segundo orden en la constante de acoplamiento.