martes, 07 de febrero de 2012 06:31 p.m.

CORRESPONDENCIA HOLOGRÁFICA

En 1997, Juan Maldacena descubrió (utilizando ingredientes de la teoría de cuerdas) un MUY sorprendente enunciado de equivalencia:

Teorías Cuánticas de Campos en d dimensiones	=	Teorías de Gravedad Cuántica en $D>d$ dim

Este tipo de igualdad se conoce como correspondencia o dualidad holográfica, AdS/CFT, norma-gravedad, norma-cuerdas, bulto/frontera o de Maldacena.

Esta idea involucra el concepto más general de dualidad, que se usa precisamente para describir la conexión entre 2 teorías que de entrada parecen distintas pero resultan ser completamente equivalentes — es decir, se trata simplemente de 2 lenguajes distintos para hablar de un mismo sistema físico, y existe un diccionario que traduce de un lenguaje a otro. Podemos pensar en una dualidad entonces como un (nada obvio) cambio de variables (='redefinición de campos'). [Ver p.ej., Polchinski 1412.5704.]

martes, 07 de febrero de 2012 06:55 p.m.

La palabrita es bastante vieja – todos recordamos p.ej. la frase "dualidad onda-partícula", que tiene una acepción similar.

Conocemos (desde antes de '97) ejemplos de dualidades de varios tipos.

* **Teoría de Campos A = Teoría de Campos B**

P.ej.,

• "Bosonización": en 1+1 dimensiones (y también en 2+1) teorías con campos fermiónicos pueden reescribirse en términos de campos bosónicos. El ejemplo más conocido con interacciones es la equivalencia entre el "modelo de Thirring" masivo,

$$\mathcal{L}_{ferm} = i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi - \frac{g}{2}\bar\psi\gamma^\mu\psi\,\bar\psi\gamma_\mu\psi\,,$$

y el "modelo de sine-Gordon" (o seno-Gordon), (acoplamiento)

$$\mathcal{L}_{bos} = -\tfrac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{\alpha}{\beta^2}(\cos\beta\varphi - 1)\,,$$

$$\cos\beta\varphi - 1 = -\tfrac{1}{2}\beta^2\varphi^2 + \tfrac{1}{24}\beta^4\varphi^4 - \dots$$

con las identificaciones $m\bar\psi\psi = \frac{\alpha}{\beta^2}\cos\beta\varphi$, $\bar\psi\gamma^\mu\psi = -\frac{\beta}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi$,

y $\frac{\pi}{\pi+g} = \frac{\beta^2}{4\pi}$ ($g\to\infty$ es $\beta\to 0$, $\beta\to\infty$ es $g\to-\pi$)

[Coleman 1975; ver p.ej. Rajaraman capítulo 7].

martes, 07 de febrero de 2012 06:55 p.m.

- "Dualidad electromagnética" en teoría de Maxwell $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ en 3+1 dimensiones,

$$F_{\mu\nu} \leftrightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho}, \text{ es decir, } \vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$$

(e intercambiando fuentes eléctricas y magnéticas).

- "Dualidad S (o de Montonen-Olive)" en Yang-Mills con $\mathcal{N}=4$ supersimetría ($\equiv$ SYM $\mathcal{N}=4$):

SYM $\mathcal{N}=4$ con g_{YM} = SYM $\mathcal{N}=4$ con $\tilde{g}_{YM} = 1/g_{YM}$

$$\mathcal{L}_{SYM} = -\frac{1}{2g_{YM}^2} \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \ldots\right) \qquad \mathcal{L}_{\tilde{SYM}} = -\frac{1}{2\tilde{g}_{YM}^2} \mathrm{Tr}\left(\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \ldots\right)$$

objetos con carga eléctrica (magnética) $\leftrightarrow$ objetos con carga magnética (eléctrica)

¡Notar que $g_{YM} \to \begin{matrix}\infty \\ 0\end{matrix}$ $\leftrightarrow$ $\tilde{g}_{YM} \to \begin{matrix}0 \\ \infty\end{matrix}$!

[Ver p.ej. Harvey, hep-th/9603086.]

- "Dualidad de Seiberg" en teorías tipo QCD con $\mathcal{N}=1$:

Una prima de QCD con grupo de norma $SU(N_c)$ (N_c colores) y $N_s > N_c + 1$ sabores de quarks = Otra prima de QCD con grupo de norma $SU(\tilde{N}_c)$ ($\tilde{N}_c$ colores) y $\tilde{N}_s$ sabores de quarks

¡con $N_s - N_c = \tilde{N}_c$, $N_s = \tilde{N}_s$!

[Ver p.ej. Strassler, hep-th/0505153.]

En esta equivalencia nuevamente al menos una de las 2 teorías tiene acoplamiento fuerte. Esto es recurrente: es justo lo que permite que el comportamiento NO sea obvio, y haya margen entonces para la existencia de una descripción alternativa.

En resumen, ¡las teorías cuánticas de campos pueden hacer cosas asombrosas en el régimen de acoplamiento fuerte!

* **Teoría de Cuerdas A = Teoría de Cuerdas B**

P.ej.,

- "Dualidad S" (en "teoría tipo IIB", o entre "teoría tipo I" y "Heterótica $SO(32)$", etc.):

  Teoría de Cuerdas con acoplamiento g_c = Teoría de Cuerdas con acoplamiento $\tilde{g}_c$

  con $g_c = 1/\tilde{g}_c$ ($g_c \to \infty$ es $\tilde{g}_c \to 0$)

- "Dualidad T" (entre teorías "tipo IIA" y "IIB", o "Heterótica $SO(32)$" y "Heterótica $E_8 \times E_8$", etc.):

  Teoría de Cuerdas en espacio con tamaño R = Teoría de cuerdas en espacio con tamaño $\tilde{R}$

martes, 07 de febrero de 2012 07:33 p.m.

¡con $R \propto 1/\tilde{R}$ ($R \to \begin{matrix}0\\\infty\end{matrix}$ es $\tilde{R} \to \begin{matrix}\infty\\0\end{matrix}$)!

(Aquí $g_c = \tilde{g}_c$; pero hay acoplamiento fuerte en otro sentido.)

- "Simetría de Espejo": ¡espacios con distintas topologías!

En resumen, ¡las teorías de cuerdas pueden hacer cosas asombrosas en el régimen de acoplamiento fuerte!

La correspondencia norma-gravedad es un tipo distinto de dualidad, que incluye en particular casos donde

Teoría de Campos X = Teoría de Cuerdas Y

¿Por qué nos resulta interesante?

- Constituye un nuevo paradigma teórico: ¡¡equivalencia entre sistemas CON y SIN gravedad!!
- Nos permite desarrollar intuición sobre algunas teorías de campos remotamente similares a QCD o a sistemas de materia condensada, en la región de acoplamiento fuerte.
- Ofrece una perspectiva novedosa sobre algunos problemas difíciles en gravedad cuántica.
- Establece un contacto muy interesante entre el espaciotiempo, la gravedad, y conceptos de información cuántica.

- Propicia acercamiento entre distintas comunidades de físicos.

Para evitar malos entendidos, conviene hacer desde el principio algunas aclaraciones:

* ¡¡ NO afirmamos haber ya resuelto QCD, o solucionado por completo el problema de la gravedad cuántica !! Las teorías bajo control actualmente son interesantes y constituyen un avance importante, pero son apenas modelos de juguete del mundo real.

* Esta aplicación de la teoría de cuerdas es completamente ortogonal a la búsqueda de una teoría unificada (= Modelo Estándar + Gravedad + ...). Aquella meta es mucho más ambiciosa, y por lo mismo, incierta (Saúl Ramos del IF-UNAM es el experto nacional). Aquí NO estamos buscando al Modelo Estándar. Pero, lo que veremos sí Es la teoría de cuerdas, mostrando ser útil.

miércoles, 20 de abril de 2016 06:39 p. m.

Antes de iniciar con el curso propiamente dicho, conviene que hagamos un primer intento por vislumbrar cómo funciona la correspondencia AdS/CFT. Para ello, recordemos primero que entender una teoría cuántica de campos involucra la habilidad de predecir su comportamiento cuando la examinamos a distintos escalas energéticas, o equivalentemente, a distintas escalas de resolución espacial. En nuestra discusión, jugarán un papel central las llamadas teorías de campos conformes (CFTs, por sus siglas en inglés). Estas son teorías que lucen exactamente igual al examinarlas a cualquier escala. Cuando escuchamos esta definición por primera vez, parece tan remota de los fenómenos físicos familiares que podemos estar inclinados a creer que las teorías conformes son tan exóticas como son inútiles. P.ej., QCD con quarks sin masa sería una CFT a nivel clásico; pero a nivel cuántico la invariancia de escala se pierde porque el acoplamiento g_{YM} "corre" con la energía, lo cual da lugar a la

escala característica de la interacción fuerte, $\Lambda_{QCD} \sim 200$ MeV. Y a pesar de lo poco familiares que nos resultan en un primer encuentro, las teorías conformes son de hecho clave para nuestra comprensión moderna de las teorías de campos. Tan es así, que cualquier teoría de campos que esté bien definida a todas las escalas energéticas debe comportarse como una CFT cuando la examinamos a altas energías, es decir, en el UV.

En cierto sentido esto es obvio! a energías que son arbitrariamente grandes comparadas con todas las masas o cualquier otra escala intrínseca que nuestra teoría pueda poseer, el valor de estas escalas puede para todo efecto práctico tomarse como igual a cero, y de aquí se sigue que tendremos invariancia bajo reescalamientos. La única sutileza es que los acoplamientos de la teoría en general cambiarán conforme vamos a altas energías, y en lugar de aproximarse a valores constantes podrían volverse infinitos, posiblemente a energía finita. Pero esta opción es parte de lo que excluimos cuando insistimos en que nuestra

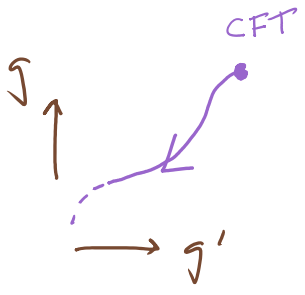
teoría esté bien definida a todas las energías, es decir, que sea "completa en el UV". Este es el caso en particular para QCD, que por efecto de su libertad asintótica se vuelve en el UV una teoría invariante de escala de quarks y gluones no masivos y no interactuantes. No existe una asociación entre el concepto de invariancia de escala y la ausencia de interacciones, por lo que las CFTs genéricas NO serán libres.

L1: 29/01/24 [22/09/20

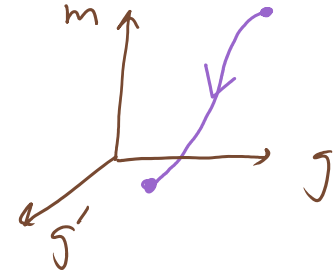
La definición más general de una teoría cuántica de campos utiliza una teoría conforme como punto de partida en el UV y le agrega términos que son despreciables a altas energías pero se vuelven importantes a bajas energías, es decir, en el IR. P.ej., en QCD encendemos un pequeño valor del acoplamiento g_{YM} y de las masas m de los quarks, y luego evolucionamos hacia el IR. El formalismo adecuado para analizar todo esto es lo que se conoce como el grupo de renormalización, y en ese lenguaje, lo que hemos dicho hasta ahora se resume en la siguiente frase: todas las teorías de campos completas en el UV pueden entenderse como flujos de renormalización obtenidos como

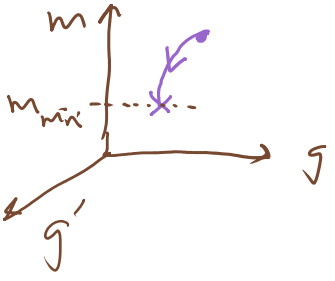
$S = S_{CFT} + S_{relevante}$

deformaciones "relevantes" de un "punto fijo" UV.

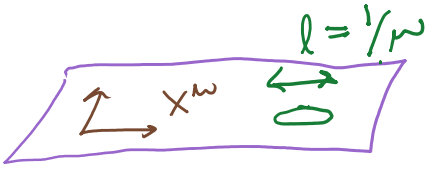


Esquemáticamente, podemos representar esto con una trayectoria en el espacio de acoplamientos para nuestra teoría, con una flecha marcando la dirección en la cual evoluciona la teoría cuando la energía va decreciendo, y un punto indicando la CFT desde la cual empezamos. A energías arbitrariamente bajas, una de dos cosas pasa: o la teoría sigue teniendo excitaciones y se vuelve entonces invariante de escala nuevamente (un punto fijo IR del flujo de renormalización), o todas las excitaciones son masivas, y por debajo de la masa más chica la teoría se vuelve (invariante de escala pero) vacía. QCD es un ejemplo de esta segunda posibilidad, puesto que todos los hadrones tienen masa $\neq 0$.



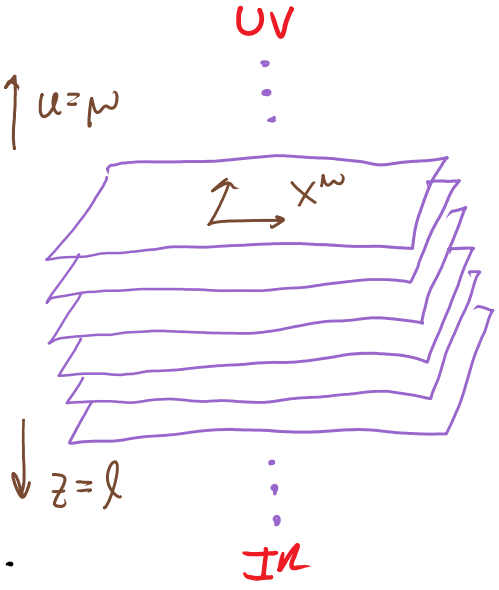


La historia principal que contaremos en este curso está muy relacionada con estas ideas: la correspondencia holográfica es, fundamentalmente, una implementación geométrica del grupo de renormalización. La manera en que esto ocurre es



que, al traducir del lenguaje original de la teoría de campos a unas nuevas variables, la escala energética μ a la cual examinamos la teoría, o equivalentemente, nuestra escala de resolución espacial $\ell \equiv 1/\mu$, se convierte en una nueva coordenada espacial, en el mismo pie que las coordenadas espaciotemporales originales, $x^\mu \equiv (t, \vec{x})$, que retienen su significado después de la traducción. La nueva coordenada espacial frecuentemente se denota $u \equiv \mu$ ó $z \equiv \ell = 1/u$, y es habitual referirse a ella como la coordenada 'radial'.

Podemos visualizar al espaciotiempo 5-dimensional resultante como una pila infinita de cartas (lo que los matemáticos y relativistas llamarían una foliación del espaciotiempo), donde cada carta de la pila (cada hoja de la foliación) representa una copia del espaciotiempo original coordinatizado por x^μ, y la altura a lo largo de la pila es lo que solía ser la escala energética μ, pero ahora se ha vuelto una dirección espacial adicional.



miércoles, 20 de abril de 2016 06:39 p. m.

La información en cada corte (a una cierta altura u ó z) describe entonces el comportamiento de la teoría de campo a esa escala (μ ó ℓ), con el UV ($u \to \infty$ ó $z \to 0$) en la parte más alta de la pila y el IR ($u \to 0$ ó $z \to \infty$) en la parte más baja. Implícita en el enunciado de que u es una nueva dimensión espacial está la idea de que la física será al menos en alguna medida local a lo largo de esta dirección radial. Parte de esta localidad en μ resulta familiar por el conocido desacoplamiento en el grupo de renormalización entre escalas muy dispares (p.ej., para hacer física atómica afortunadamente no necesitamos tener información de lo que sucede a la escala de Planck). Un grado más fino de localidad en μ surgirá solo bajo ciertas circunstancias especiales, que mencionaremos más abajo. La correspondencia AdS/CFT afirma que de hecho existe una teoría completa y autocontenida que reside en el espaciotiempo 5-dimensional, y captura exactamente la misma información que nuestra teoría de campos original: es equivalente, dual a ella.

miércoles, 20 de abril de 2016 06:39 p. m.

Como sabemos que las teorías conformes son cruciales para el grupo de renormalización, debemos empezar preguntando en qué se convertirá una CFT al pasar a la descripción geometrizada. El vacío ← estado base de una teoría conforme definida sobre el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$, además de ser invariante bajo traslaciones y Lorentz (= Poincaré) como esperamos en cualquier teoría relativista, se mantiene sin cambios también bajo reescalamientos (también conocidos como dilataciones), $x^\mu \to \lambda x^\mu$ (con $\lambda \in \mathbb{R}^+$). Estas transformaciones tienen el efecto $\mu \to \frac{\mu}{\lambda}$, es decir, $\ell \to \lambda \ell$, así que en la implementación geométrica, cambian el valor de la coordenada radial z justamente de la misma manera en que cambian a x^μ, $z \to \lambda z$. La invariancia del vacío de la CFT bajo reescalamientos implica que este cambio debe dejar a la geometría correspondiente sin modificar. Esta propiedad determina de manera única la métrica del espacio-tiempo 5-dimensional dual al vacío de una teoría conforme en $\mathbb{R}^{3,1}$. Debe tener la forma

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2\right) = L^2\left(u^2(-dt^2+d\vec{x}^2) + \frac{du^2}{u^2}\right),$$

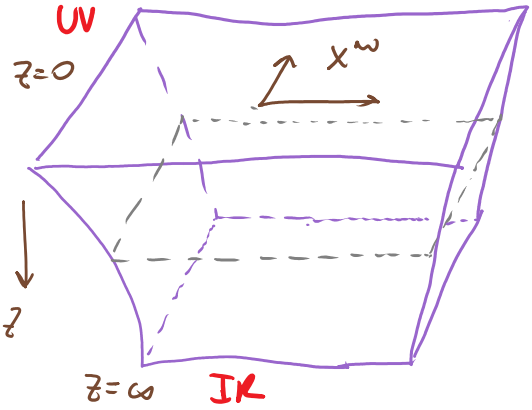
que es el espaciotiempo que los relativistas llaman anti-de Sitter (AdS). Tiene curvatura negativa constante, y por esta razón, es el espaciotiempo más sencillo después de Minkowski. El parámetro L (hasta ahora sin determinar) especifica el radio de curvatura. Podemos notar que con esta métrica la región UV $z \to 0$ $(u \to \infty)$ es infinitamente lejana en distancia propia; pero aún así, una señal viajando a la velocidad de la luz puede alcanzarla en un tiempo finito. Esta región, conocida como la frontera de AdS, puede entonces afectar la física en el interior del espaciotiempo, conocido como el 'bulto', así que al definir cualquier teoría en AdS será indispensable especificar condiciones de frontera en $z=0$. Otra propiedad de esta métrica es que existen trayectorias tipo tiempo que alcanzan la región IR $z \to \infty$ en un tiempo propio finito (es decir, nuestro espaciotiempo NO es geodésicamente completo). Sin embargo, esto toma un tiempo infinito medido con t, que como sabemos es la coordenada

temporal de la teoría de campos, por lo que uno puede describir por completo la física de nuestra CFT en $\mathbb{R}^{3,1}$ sin información alguna de lo que existe más allá de $z \to \infty$.

Podemos representar esquemáticamente la geometría que adquiere nuestra pila de cartas con la métrica de AdS

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2)$$

como en la figura de la derecha.



La invariancia de esta métrica bajo traslaciones, Lorentz y reescalamiento es evidente; pero existen 4 transformaciones adicionales que mezclan a x^μ con z y también dejan a la métrica intacta. Como veremos en detalle más adelante, el conjunto completo de isometrías (simetrías de la métrica) forma el grupo tipo Lorentz $SO(4,2)$. Y en efecto, como también veremos más adelante, las teorías conformes en 3+1 dimensiones son invariantes bajo precisamente este mismo conjunto de transformaciones, que por esta razón se conocen como el grupo conforme. Este es nuestro primer ejemplo de un acuerdo no trivial entre ambas

descripciones. Las 4 simetrías de la CFT que no habíamos mencionado hasta ahora se conocen como transformaciones conformes especiales, y esencialmente siempre aparecen como consecuencia de la invariancia de escala.

Hemos aprendido entonces por qué AdS va de la mano de una CFT. Pero hasta ahora hemos considerado solo el vacío
L1: 16/08/16
$|\Omega\rangle$ de la teoría de campos. Los estados excitados de la misma teoría, por supuesto, NO son invariantes de escala, así que NO deben ser descritos simplemente por el espaciotiempo AdS vacío. En cualquier teoría conforme, existe un mapeo biunívoco entre estados $|\psi\rangle$ y operadores locales $\mathcal{O}(x)$, dado por $|\psi_0\rangle = \mathcal{O}(0)|\Omega\rangle$. En la teoría dual, entonces, deben existir tantas maneras independientes de colocar excitaciones sobre el espaciotiempo AdS como existen operadores independientes $\mathcal{O}(x)$ en la CFT. Esto se logra teniendo un campo distinto $\phi(x,z)$ en la nueva teoría por cada uno de esos operadores, que estará excitado con un perfil particular (y que admite una descripción como un campo verdaderamente local solo bajo las condiciones especiales a las que hemos aludido ya pero

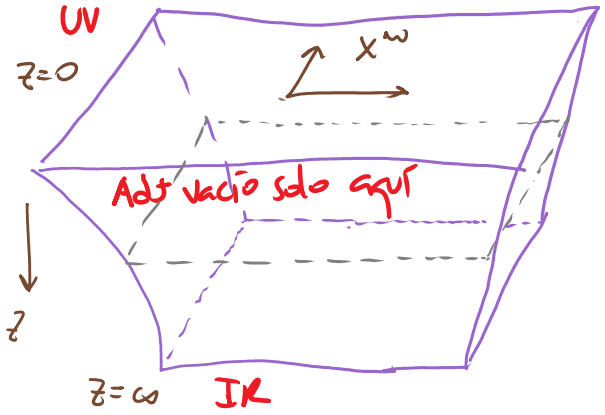
nos falta describir). El inventario de todos los operadores físicos $\mathcal{O}$ en la CFT incluye aquellos que son compuestos, y similarmente, en la nueva descripción los campos que estamos denotando ϕ no necesariamente son elementales. Gracias a la conexión $\mathcal{O}(x) \leftrightarrow \phi(x, z)$ podremos tener una correspondencia completa entre los estados de la CFT y los estados de la teoría 5-dimensional. Pero todos los estados en la CFT comparten la propiedad de que al examinarlos a altas energías se parecen al vacío, así que todas las configuraciones permitidas en la nueva teoría deben reducirse al espacio AdS vacío en la región UV $z \to 0$: deben ser asintóticamente AdS. Esto es justo lo que esperaríamos para estados que se obtienen como excitaciones físicas de AdS, porque la región cercana a la frontera de AdS tiene un volumen infinito, y por ello costaría energía infinita modificar el comportamiento de los campos ϕ ahí.

12 : 31/01/24

Ahora podemos preguntarnos en qué debe traducirse una teoría de campos genérica (completa en el UV), como QCD. Como mencionamos antes, en ese caso tenemos un flujo del grupo

$S = S_{CFT} + S_{relevante}$

de renormalización que comienza en una CFT a altas energías, deformada por términos (relevantes) que cambian la física a bajas energías. Incluso en el vacío de tal teoría, no tenemos invariancia de escala, y por tanto la teoría dual, aun en su estado de más baja energía, debe diferir de AdS, incorporando dependencia no trivial de z. Pero importantemente, esta dependencia debe apagarse en $z \to 0$, porque a altas energías nuestra teoría se vuelve conforme.



La diferencia entre esto y lo que describimos en el párrafo anterior está en cuán rápido nos aproximamos al espacio AdS vacío cerca de la frontera. Ahora estamos cambiando la teoría, no solo el estado, así que NO tenemos el requisito de que la deformación sobre AdS nos cueste una energía finita. Estamos hablando entonces de encender modos "no normalizables" de los campos ϕ, o en otras palabras, de cambiar las condiciones de frontera. Cambiar el estado dentro de una

teoría dada corresponde en cambio (en ambos lados de la dualidad) a encender modos "normalizables", que son precisamente los modos que pueden fluctuar dinámicamente y son por ello los que cuantizamos.

Como las direcciones x^μ son comunes a ambas descripciones, las propiedades de transformación bajo Lorentz $SO(3,1) \subset SO(4,2)$ de los operadores $\mathcal{O}$ y sus correspondientes campos ϕ en AdS deben coincidir. Un operador importante que está presente en todas las teorías de campo locales es el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}(x)$, cuya conservación es consecuencia de la invariancia bajo traslaciones. Su contraparte en la descripción geometrizada debe ser un campo de espín 2, $g_{mn}(x,z)$, donde $m,n=0,\dots,4$, $x^m \equiv (x^\mu, z)$. Este campo resultará ser la métrica 5-dimensional, o para ser más precisos, el campo del gravitón, que describe fluctuaciones de la métrica por encima de su valor esperado en el vacío. Esto significa que nuestra teoría de campos original (sea o no una CFT) es dual a una teoría donde el espaciotiempo mismo es

dinámico, es decir, ¡la una teoría de gravedad cuántica!
Dado que nuestra comprensión directa de la gravedad cuántica es limitada, al menos hasta ahora la correspondencia se ha entendido por completo solo en casos en los que la descripción gravitacional tiene un límite clásico, con baja curvatura, porque solo en esos casos somos capaces de reconocer a la gravedad como tal. La experiencia nos ha enseñado que la aparición de una geometría 5-dimensional suave, con radio de curvatura grande ($L \gg \ell_p$, ℓ_p ← longitud de Planck), requiere que la teoría de campos tenga un número muy grande de grados de libertad en cada punto, $N \to \infty$. Para N grande pero no estrictamente infinito, las interacciones entre los campos ϕ estarán controladas por $\frac{1}{N} \sim \frac{\ell_p}{L}$, y pueden por tanto pueden ser estudiadas de forma perturbativa. Aun en este caso, para que la dinámica de la teoría gravitacional sea manejable, se necesita tener una gran separación en el espectro de de la teoría ($m_{pesados}$ (muchos) $\gg m_{ligeros}$ (pocos)), de tal forma que sea una buena aproximación considerar únicamente al gravitón junto con unos cuantos campos ligeros, en lugar de la torre completa de

ϕ's. En la teoría de campos, la existencia de una L24/09/20
brecha muy grande en el espectro (de masas o de dimensiones de los operadores $\mathcal{O}$) requiere que el acoplamiento sea enorme. El hecho extremadamente afortunado es entonces que el exigir algo de control cuantitativo sobre la descripción gravitacional nos empuja al régimen de acoplamiento fuerte de la teoría de campos, donde NO tenemos tal control. En sentido inverso, el régimen débilmente acoplado de la teoría de campos, al cual sí tenemos acceso directo, contiene información sobre la teoría de gravedad cuántica en la situación poco familiar donde es necesario considerar a muchos campos ϕ (infinitos si $N \to \infty$) en el mismo pie que a la métrica.

En el caso particular en el que del lado no gravitacional tenemos una teoría de norma no abeliana, la teoría de gravedad resultará ser una teoría de cuerdas completa. Como veremos más adelante, este hecho se había anticipado de varias maneras desde la década de los 70. La teoría de cuerdas de hecho nació como un intento para explicar los hadrones.

martes, 07 de febrero de 2012 10:37 p.m.

0. Motivación y Antecedentes

La correspondencia holográfica establece una conexión entre 2 de los problemas más importantes de la física teórica moderna:

- Entender el comportamiento de teorías de campos en el régimen de acoplamiento fuerte.
- Formular una teoría de gravedad cuántica.

En esta sección repasaremos algunos antecedentes relacionados con estos 2 temas.

* TEORIA DE CAMPOS

La teoría cuántica de campos es el lenguaje básico que utilizamos para describir (¡muy exitosamente!) la estructura microscópica del universo.

Su principal enseñanza es que el "particulero" es en realidad un "campista": el mundo está hecho de campos $\varphi(x^\mu) = \varphi_{\vec{x}}(t)$ $\left(\leftrightarrow \varphi(p^\mu) \equiv \int d^4x\, e^{ip\cdot x}\varphi(x)\right)$ — sistemas con un número infinito de grados de libertad —,

y las partículas de cada tipo son pequeñas excitaciones cuánticas del campo correspondiente:

Electrón y Antielectrón (espín 1/2) $\longleftrightarrow$ Campo del electrón $\psi_\alpha(x)$ (espinor de Dirac) $\alpha = 1,2,3,4$

(y similarmente para quarks y otros leptones)

Fotón (espín 1) $\longleftrightarrow$ Campo electromagnético $A_\mu(x)$ (cuadrivector) $\mu = 0,1,2,3$

(y similarmente para gluones, W y Z)

Partícula de Higgs (espín 0) $\longleftrightarrow$ Campo de Higgs $\Phi(x)$ (escalar) Complejo

Más en detalle, para un campo libre (acción cuadrática $\leftrightarrow$ ecuación de movimiento lineal), como p.ej.

$$S[\varphi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right)$$

campo de Klein-Gordon,

escalar; $\eta = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$

L2: 18/08/16

$\equiv \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ densidad lagrangiana

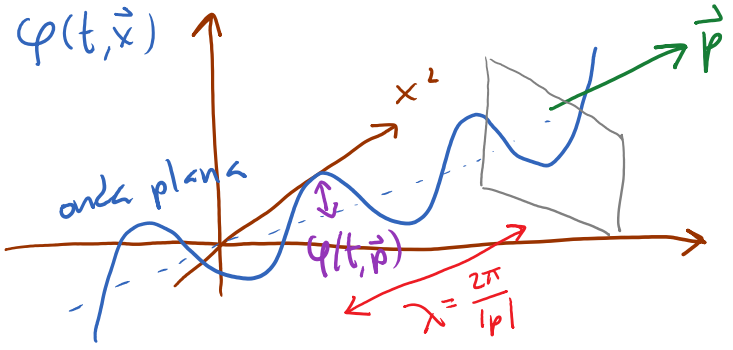
al cuantizar canónicamente

(densidad de) momento conjugado

$$\left(\varphi(x), \pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} \right) \longrightarrow \varphi(x), \pi(x) \quad \text{operadores}$$

en relaciones de conmutación $[\varphi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{x}')] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$

las partículas son cuantos de ondas planas por encima del valor preferido del campo (normalmente cero):



Cada modo de Fourier es un oscilador armónico, y distintos modos están desacoplados

Equivalentemente, podemos cuantizar por integral de camino (= integral funcional), donde φ sigue siendo una función clásica, y sumamos sobre todos los $\varphi(t,\vec{x})$ posibles (sin usar ec. de mov.):

$$\langle \varphi_f(\vec{x}) | \varphi_i(\vec{x}) \rangle = \mathcal{N} \int_{\varphi(t_i,\vec{x})=\varphi_i(\vec{x})}^{\varphi(t_f,\vec{x})=\varphi_f(\vec{x})} \mathcal{D}\varphi(t,\vec{x})\, e^{iS[\varphi]}, \quad \mathcal{D}\varphi(t,\vec{x}) \equiv \prod_{t,\vec{x}} d\varphi_{t,\vec{x}} .$$

Cuando agregamos términos cúbicos o más altos a $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$, las partículas interactúan unas con otras (y contigo mismas).

P.ej., en

$$S[\varphi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{g}{4!}\varphi^4 \right)$$

Teoría φ^4

g es la constante de acoplamiento, y controla la intensidad de las interacciones.

En cualquier teoría de campos, el objetivo principal es calcular los correladores = funciones de correlación o de Green,

(orden temporal; vacío (estado base))

$$G_n(x_1,\cdots,x_n) \equiv \langle \Omega | T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\} | \Omega \rangle$$

$$= \frac{\int D\varphi\, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\exp(iS)}{\int D\varphi \exp(iS)},$$

que físicamente representan algo así como la amplitud de probabilidad de empezar con cierto número de partículas en algunos puntos del espaciotiempo y terminar con otro número en los sitios restantes. (Salvo que para definir adecuadamente a las partículas necesitamos separarlas mucho y pasar al espacio de momentos: amplitudes de dispersión.)

Toda la información física de la teoría puede extraerse de estas funciones de correlación.

Si la teoría está débilmente acoplada (es decir, las constantes de acoplamiento son pequeñas), entonces está cerca de ser libre, y es posible calcular las $G_n(x_1,\ldots)$ en una expansión perturbativa (una serie en potencias de las constantes de acoplamiento). La receta se basa en diagramas de Feynman, construidos a partir de 2 tipos de ingredientes que se leen directamente del Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2}_{\text{propagación libre}} - \underbrace{\frac{g}{4!}\varphi^4}_{\text{interacción}}$$

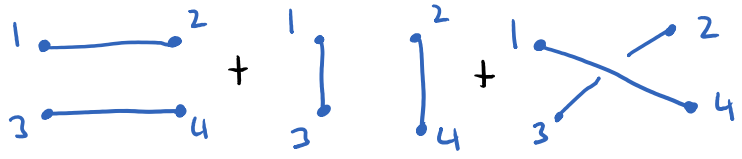
↳ propagador $\xrightarrow{\quad p \quad}$ $= \dfrac{-i}{p^2+m^2}$

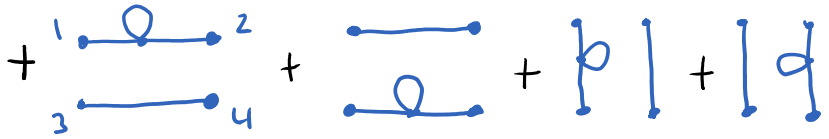
vértice (de 4 patas) $\times$ $= -ig$

P.ej.

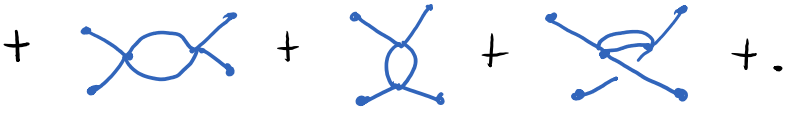
$$G_4(x_1,\cdots,x_4) \equiv \langle 0|\,T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_4)\}\,|0\rangle$$

= Suma sobre todos los diagramas con 4 puntos externos (y sin pedazos completamente desconectados de esos puntos)

$= \quad$  $\quad \mathcal{O}(g^0)$

$+$  $\Big\}\ \mathcal{O}(g^1)$

$+$

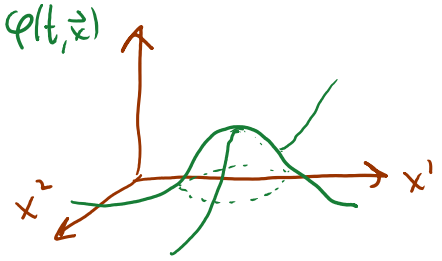
$+$  $+\ldots \quad \mathcal{O}(g^2)$

$+$ etc.

Cada diagrama se traduce en una fórmula, pero además nos cuenta la historia de un proceso en el espaciotiempo, donde vemos que en etapas intermedias partículas ("virtuales") aparecen y desaparecen.

Para $g \ll 1$, es una buena aproximación quedarnos solo con unos cuantos diagramas de los más sencillos; pero cuando la teoría está fuertemente acoplada ($g \gg 1$), la expansión perturbativa se vuelve completamente inútil, y perdemos nuestro método de cálculo y de visualización. Importantemente, aún cuando $g \ll 1$ la serie perturbativa NO converge, de modo que no captura toda la física de la teoría - existen efectos "no perturbativos".

Un ejemplo es la existencia en algunas teorías de excitaciones grandes pero localizadas del campo (con energía finita $E \sim 1/g^2$) conocidas como solitones.



Esto sirve para recordarnos que el campo es el concepto primario, y las partículas son apenas un tipo de excitaciones de él.

Entender el comportamiento de teorías de campos en el régimen de acoplamiento fuerte es una tarea pendiente.

* CROMODINÁMICA CUÁNTICA

El ejemplo paradigmático de una teoría de campos donde los efectos de acoplamiento fuerte son importantes es la cromodinámica cuántica, o QCD, que describe a la interacción fuerte (responsable de la existencia de los núcleos y el brillo de las estrellas).

Recordemos primero a su pariente más sencillo, asociado a la interacción electromagnética: la electrodinámica cuántica, o QED. Ésta involucra al campo de Maxwell (vectorial, real, abeliano)

$A_\mu(x)$ (cuadri)potencial electromagnético $\longleftrightarrow$ Fotones

junto con un campo de Dirac (espinorial, con 4 componentes complejos)

$\psi(x) \equiv \psi_\alpha(x)$ $\longleftrightarrow$ Electrones/antielectrones (u otras partículas con carga eléctrica),

$S = \int d^4x \, \mathcal{L}$

con dinámica descrita por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{QED}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu\psi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \mathcal{L}_{Dirac}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu\psi) + \mathcal{L}_{Maxwell}(F_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{int}(A_\mu, \psi, \bar{\psi})$$

constante de acoplamiento = carga eléctrica

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

γ^μ: matrices de Dirac 4×4 tales que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$

$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$

$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ intensidad de campo

(y p.ej. $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \equiv \bar{\psi}_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta$)

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu$ derivada covariante $\left(F_{\mu\nu} = \frac{1}{iq}[D_\mu, D_\nu]\right)$

$\mathcal{L}_{QED}$ es invariante bajo las transformaciones de norma

$\equiv e^{iq\theta(x)} \in$ grupo de Lie $U(1)$ (abeliano)

$$\psi(x) \to \psi'(x) = U(x)\psi(x)$$

rotación local de fase

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = U(x)\left(A_\mu(x) - \frac{i}{q}\partial_\mu\right)U^{-1}(x)$$

$$= A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x)$$

$$\Rightarrow D_\mu \psi(x) \to D'_\mu \psi'(x) = U(x) D_\mu \psi(x)$$ propiedad básica de D_μ.

La parte global (con $\theta = cte.$) es una simetría de la teoría, pero la parte local o "de norma" ($\theta = \theta(x)$, con $\theta(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$) expresa el hecho de que la teoría es redundante: el campo $A_\mu(x)$ tiene (por covariancia bajo Lorentz) 4 componentes, pero 2 de ellas salen sobrando, porque el fotón tiene solo 2 estados de espín (helicidad) ± 1 $\longleftrightarrow$ fotones con polarización circular derecha / izquierda.

Más en general, una teoría de norma es una teoría redundante, con más variables que grados de libertad físicos (y la redundancia se manifiesta a través de invariancia bajo ciertas transformaciones locales).

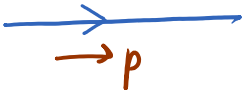
Toda la información física está contenida en cantidades invariantes de norma, como $F_{\mu\nu}(x)$ en el caso de QED.

Si cuantizamos QED de manera covariante bajo Lorentz (tratando a las 4 componentes $A_\mu(x)$ en el mismo pie), es vital para la consistencia de la teoría que la

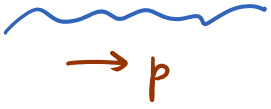
invariancia de norma se preserve, porque nos asegura, p.ej., que los estados ¡con norma negativa! creados por $A_0(x)$ NO son físicos.

(La alternativa es eliminar toda la redundancia a nivel clásico, imponiendo condiciones sobre $A_\mu(x)$ que "fijen la norma" —es decir, que nos impidan realizar transformaciones de norma adicionales—, y después cuantizar únicamente a las variables que sí representan grados de libertad físicos. P.ej., en QED podemos fijar la "norma de Coulomb" $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, A_0 = determinado por $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. La desventaja de este procedimiento es que no es manifiestamente covariante bajo Lorentz.)

A partir de $\mathcal{L}_{QED}$ podemos deducir los factores asociados a los ingredientes de la expansión perturbativa:

Propagador del electrón 

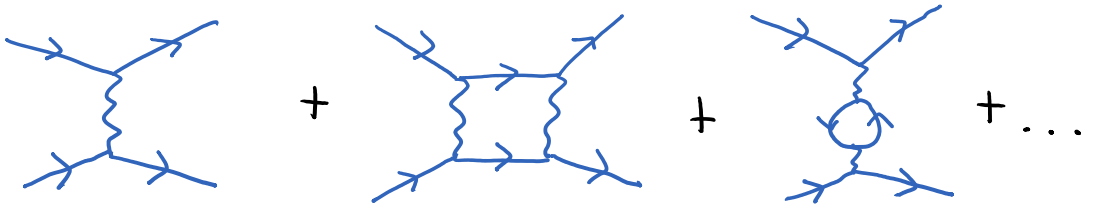
$= \dfrac{-i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2+m^2}$

Propagador del fotón 

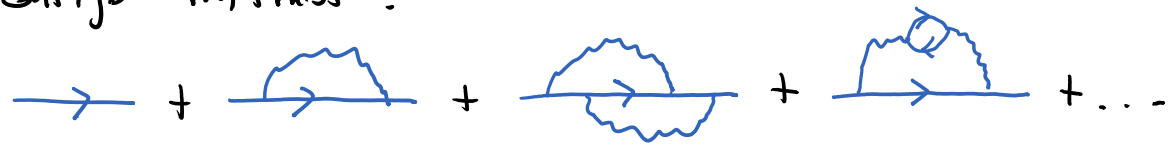
$= \dfrac{i\eta^{\mu\nu}}{p^2}$

Vértice de interacción
$= -ig\gamma^\mu$

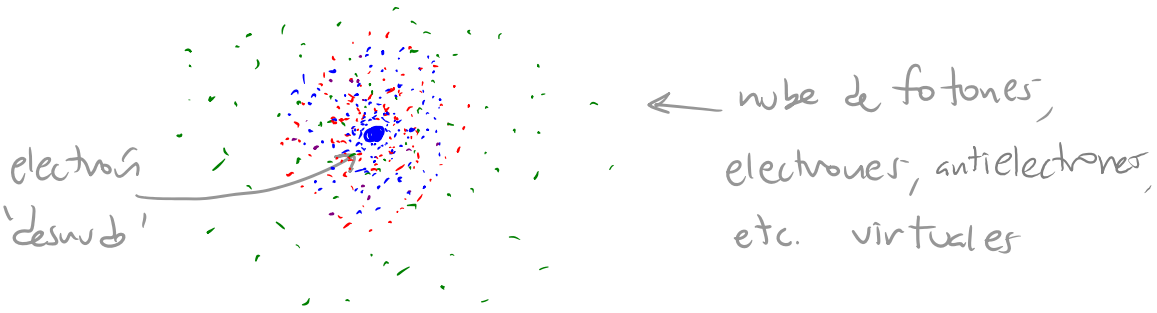
Dado que $q \neq 0$, los electrones (o antielectrones) se pueden hablar uno al otro intercambiando fotones:



Pero (como en cualquier teoría de campos) esto implica de manera inevitable que también pueden interactuar consigo mismos:



En lugar de lo que hubiera sido un electrón "desnudo" (si $q=0$), debemos entonces visualizar al electrón del mundo real ("estado asintótico" $\leftrightarrow$ polo en G_n) como un objeto más complicado:



Un punto muy importante es que las características medibles (masa, carga eléctrica, ...) de este objeto físico No coinciden directamente con los parámetros

"desnudos" que aparecen en el lagrangiano original, a los que ahora denotaremos con subíndices "0":

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}_0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi_0 - \frac{1}{4} F_{0\mu\nu} F_0^{\mu\nu} - q_0 \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0 A_{0\mu}$$

$$F_{0\mu\nu} = \partial_\mu A_{0\nu} - \partial_\nu A_{0\mu}$$

Podemos definir a los parámetros (y campos) <u>físicos</u> m, q ($y\ \psi \equiv \frac{\psi_0}{\sqrt{Z_\psi}}$, $A_\mu \equiv \frac{A_{0\mu}}{\sqrt{Z_A}}$) haciendo referencia directa a algunas mediciones experimentales, y dependerán entonces de la escala energética μ involucrada en estas mediciones:

$m(\mu)$, $q(\mu)$ describen al electrón físico cuando lo examinamos a una distancia $l \sim 1/\mu$ (e incluimos por tanto solo una cierta porción de su nube de partículas virtuales).

Podemos reescribir la expansión perturbativa en términos de los parámetros físicos, paso conocido como renormalización, separando el lagrangiano original en 2 partes:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{0\mu\nu} F_0^{\mu\nu} + \bar{\psi}_0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi_0 - q_0 \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0 A_{0\mu}$$

$$\equiv \mathcal{L}_{QED,ren} + \mathcal{L}_{QED,ct} ,$$

donde el "Lagrangiano renormalizado" es

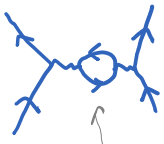
$$\mathcal{L}_{QED,ren} \equiv -\frac{1}{4} \underbrace{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

y los "contratérminos" se definen como la diferencia

$$\mathcal{L}_{QED,ct} \equiv -\frac{1}{4} \underbrace{(Z_A - 1)}_{\equiv \delta Z_3} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \underbrace{(Z_\psi - 1)}_{\equiv \delta Z_2} \bar{\psi} i \not{\partial} \psi$$

$$- \underbrace{(Z_\psi m_0 - m)}_{\equiv \delta m} \bar{\psi}\psi - \underbrace{\underbrace{(Z_\psi \sqrt{Z_A}\, q_0 - q)}_{\equiv Z_1 q}}_{(Z_1 - 1) q \equiv \delta Z_1 q} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

Con $\mathcal{L}_{QED}$ reescrito de esta forma, tenemos nuevos vértices de interacción que se originan de $\mathcal{L}_{QED,ct}$, y se encuentra que $\delta Z_3, \delta Z_2, \delta Z_1, \delta m$ absorben todas las divergencias ultravioleta de los diagramas



con lazos (por partículas virtuales con energías arbitrariamente grandes, que exploran distancias arbitrariamente pequeñas).

Los cálculos perturbativos nos permiten deducir la manera en que los parámetros físicos/renormalizados dependen de la energía μ involucrada en su definición, llamada la escala de renormalización. En particular, se encuentra que q tiene una dependencia de μ codificada en la "función beta (o de Callan-Symanzik)"

$$\beta(q) \equiv \underbrace{\mu \frac{\partial q}{\partial \mu}}_{\frac{\partial q}{\partial (\ln \mu)}} = 0 + \frac{q^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(q^5),$$

($\beta(q)$: normalmente denotada e; 0: nivel árbol (q adimensional); $\frac{q^3}{12\pi^2}$: 1 lazo; $\mathcal{O}(q^5)$: 2 lazos, etc.)

En términos de la combinación

$$\alpha_{em} \equiv \frac{q^2}{4\pi} \quad \text{("constante de estructura fina")},$$

esto equivale a

$$\beta(\alpha_{em}) \equiv \mu \frac{\partial \alpha_{em}}{\partial \mu} = 0 + \frac{2\alpha_{em}^2}{3\pi} + \mathcal{O}(\alpha_{em}^3),$$

e implica que

martes, 14 de febrero de 2012 10:02 a.m.

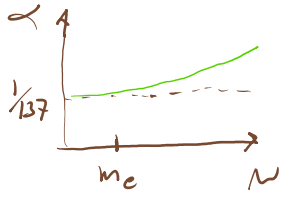
energía de referencia (↔cte. de integración)

$$\alpha_{em}(\mu) = \frac{\alpha_{em}(\mu_{ref})}{1 - \frac{2}{3\pi}\alpha_{em}(\mu_{ref})\ln\left(\mu/\mu_{ref}\right)}$$

Esta expresión es válida solo para $\mu >> m_e$, es decir, para distancias menores que el radio de Compton del electrón, o lo que es lo mismo, el tamaño de su nube de partículas virtuales, $r_c \equiv 1/m_e \sim 1/0.5\,MeV \sim 2\times10^{-12}\,m$.

Para $\mu < m_e$, α_{em} se aproxima exponencialmente al valor familiar $\alpha_{em}(0) \simeq 1/137$, así que al usar la fórmula de arriba podemos simplemente tomar

$\mu_{ref} = m_e$ y $\alpha_{em}(\mu_{ref}) \sim 1/137$.



La fórmula dice que $q \leftrightarrow \alpha_{em}$ aumenta logarítmicamente (es decir, lentamente) con la energía (equivalentemente, disminuye con la distancia). Este aumento es por supuesto consecuencia de que $\beta(\alpha_{em}) > 0$. α_{em} de hecho sería divergente a una energía finita

$$\mu_{div} = \mu_{ref}\exp\left(\frac{3\pi}{2\alpha_{em}(\mu_{ref})}\right) \quad (\text{"polo de Landau"})$$

si pudiéramos seguir confiando en esta fórmula a tales energías, lo cual obviamente NO es el caso: $g(\mu) \gtrsim 1$ invalida la expansión perturbativa. Efectos de acoplamiento fuerte podrían modificar el comportamiento.

Queda muy en duda entonces si QED pudiera realmente considerarse como una teoría autoconsistente a distancias arbitrariamente pequeñas. Por supuesto, dado que $\mu_{div} \sim 10^{277}$ GeV $>> 10^{2}$ GeV ~ escala electrodébil), esta es solo una preocupación teórica que no es relevante para QED en el mundo real (pero sí para la "hipercarga" g_1 asociada al grupo $U(1)_Y$ en el Modelo Estándar).

Habiendo recordado la estructura y propiedades básicas de QED, podemos ahora proceder a QCD, que nos interesa más para este curso. QCD es simplemente una hermana no abeliana de QED:

- En lugar del electrón (u otras partículas con carga eléctrica), en QCD figuran partículas con carga fuerte que llamamos quarks, descritas por campos de Dirac ($\leftrightarrow$ espín 1/2)

L3: 07/02/24 (05/02 fue inhábil)

martes, 14 de febrero de 2012 10:18 p.m.

$\psi^{(s)}_{\alpha c}(x)$ con $\alpha = 1,2,3,4$ (índice espinorial)

$c = 1,2,3 \leftrightarrow$ rojo, verde, azul

3 colores: tipos de carga fuerte

que se mezclan entre sí bajo el grupo de norma

$SU(3) \equiv \{$ Matrices 3×3 unitarias y "especiales" $\}$

$= \{ U_{cc'},\ c,c' = 1,2,3 \mid UU^\dagger = 1,\ \det U = 1 \}$

grupo de Lie no abeliano

$= \{ \exp(i\theta^I t^I_{cc'}),\ I = 1,\dots,8 \mid t^I = t^{I\dagger},\ \mathrm{tr}(t^I) = 0 \}$

parámetros (suma sobre I implícita) ↑ generadores de $SU(3)$: base para "álgebra de Lie" (como $\frac{\sigma^i}{2}$ para $SU(2)$)

Transformación de norma mezcla

$$\psi^{(s)}(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi^{(s)}_{c=1}(x) \\ \psi^{(s)}_{2}(x) \\ \psi^{(s)}_{3}(x) \end{pmatrix} \to \psi'^{(s)}(x) = U(x)\psi^{(s)}(x) = \exp(i\theta_I(x)t^I)\psi^{(s)}(x),$$

es decir, $\psi'^{(s)}_{c'}(x) = U_{c'c}(x)\psi^{(s)}_{c}$ (suma implícita)

$\leftrightarrow$ el campo del quark $\psi^{(s)}(x)$ transforma en la representación fundamental de $SU(3)$ $(\equiv \underline{3})$

$s = 1,2,\dots,6 \leftrightarrow$ arriba, abajo, ..., belleza

6 sabores: especies de quarks

martes, 14 de febrero de 2012 10:46 p.m.

(En el Modelo Estándar = QCD + Teoría Electrodébil,

en realidad $S \equiv (I, i)$ con

$I = 1,2$ "isoespín débil": tipos de carga débil

↑ ó $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ p.ej. $U \equiv \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix}$

$i = 1,2,3$ "generación" ↳ sabor U ó $C \equiv \begin{pmatrix} c(x) \\ s(x) \end{pmatrix}$ ó $T \equiv \begin{pmatrix} t(x) \\ b(x) \end{pmatrix}$.)

- En lugar del fotón, en QCD tenemos al gluón como partícula mensajera de la interacción fuerte, descrito por un campo vectorial ($\leftrightarrow$ espín 1)

$$A^{\mu}_{cc'}(x) \equiv A^{\mu I}(x)\, t^{I}_{cc'} \qquad c, c' = 1,2,3 \qquad I = 1, \ldots, 8$$

campo gluónico (matriz 3x3 hermitiana y sin traza)

que bajo transformaciones de norma $SU(3)$ cambia a

$$A_{\mu}(x) \to A'_{\mu}(x) \equiv U(x)\left(A_{\mu} - \frac{i}{g_f}\partial_{\mu}\right) U(x)^{-1},$$

g_f: cte. de acoplamiento fuerte (g_s en inglés), análoga a q

es decir,

$$\left[A'_{\mu}(x)\right]_{cc'} = \left[\exp\left(i\theta^{I}(x) t^{I}\right)\right]_{cc''} \left[A_{\mu}(x) - \frac{i}{g_f} \mathbb{1}\partial_{\mu}\right]_{c''c'''} \left[\exp\left(-i\theta^{J}(x) t^{J}\right)\right]_{c'''c'}$$

Este campo de norma nos permite definir la derivada covariante

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i g_f A_\mu^{(x)}$$

que tiene la importante propiedad de que

$$D_\mu \psi^{(s)}(x) \equiv \partial_\mu \psi^{(s)}(x) + i g_f \underbrace{A_\mu(x)}_{[A_\mu]_{cc'}} \underbrace{\psi^{(s)}(x)}_{[\psi^{(s)}]_{c'}}$$

transforma igual que $\psi^{(s)}(x)$:

$$D_\mu \psi^{(s)}(x) \longrightarrow D'_\mu \psi'^{(s)}(x) = U(x) D_\mu \psi^{(s)}(x)$$

Si tomamos $\theta_I(x) \ll 1$, podemos deducir que

$$A'_\mu(x) \equiv A'^I_\mu t^I$$

$$\simeq (\mathbb{1} + i\theta^J t^J)\left(A^K_\mu t^K - \frac{i}{g_f}\mathbb{1}\partial_\mu\right)(\mathbb{1} - i\theta^L t^L)$$

$$= A^K_\mu t^K + i\theta^J A^K_\mu \underbrace{[t^J, t^K]}_{\equiv i f^{JKL} t^L} - \frac{1}{g_f}\partial_\mu \theta^L t^L$$

donde f^{JKL} ← totalmente antisimétrico son las constantes de estructura de $SU(3)$, las cuales codifican la regla de multiplicación de las $U \in SU(3)$ (recordar el caso de $SU(2)$: $\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}\right] = i\epsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2}$) ↑ ctes. de estructura

Es decir,

$$A_\mu^I \to A'^I_\mu = A_\mu^I + f^{IJK} A_\mu^J \theta^K - \frac{1}{g_f}\partial_\mu \theta^I .$$

El último término nos es familiar (porque aparecía ya en QED), y está ausente si $\theta^I(x) = cte.$
El segundo término claramente se debe a que nuestro grupo de norma es no abeliano, y nos dice que A_μ^I $(I = 1, \dots, 8)$ transforma en la representación adjunta de $SU(3)$ $(\equiv \underline{8})$.

En efecto, esta representación se define como

$$\left[t^I_{adj}\right]_{JK} \equiv i f^{JIK} \qquad J, K = 1, \dots, 8 ,$$

así que un objeto A^I en ella transforma como

$$A^I \to A'^I = \left[\exp\left(i\theta^L t^L_{adj}\right)\right]_{IJ} A^J$$

$$\simeq A^I + i\theta^L \underbrace{[t^L_{adj}]_{IJ}}_{if^{ILJ} = -if^{IJL}} A^J \quad \checkmark$$

L3: 29/09/20

A partir de $A_\mu(x)$ podemos definir también la intensidad de campo

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{ig_f}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_f \underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{\neq 0 \text{ en general}}$$

que se puede expresar por tanto como

$$F_{\mu\nu}(x) = F^I_{\mu\nu}(x)\, t^I ,$$

donde

$$F^I_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\mu - g_f f^{IJK} A^J_\mu A^K_\nu .$$

L3: 23/08/16

Es fácil verificar que la intensidad de campo transforma de acuerdo con

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \exp(i\theta^I(x) t^I)\, F_{\mu\nu}(x) \exp(-i\theta^J(x) t^J) ,$$

o lo que es lo mismo,

$$F^I_{\mu\nu} \to F'^I_{\mu\nu} + f^{IJK} F^J_{\mu\nu} \theta^K + \mathcal{O}(\theta^2)$$

(representación adjunta), de modo que en el caso no abeliano NO es invariante de norma.

Tampoco lo es el escalar de Lorentz

$$F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \longrightarrow \exp(i\theta^I(x)t^I)F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\exp(-i\theta^J(x)t^J),$$

pero sí su traza

$$\underbrace{Tr(F^2(x))}_{\equiv [F_{\mu\nu}(x)]_{cc'}[F^{\mu\nu}(x)]_{c'c}} \longrightarrow Tr\left(U(x)F^2(x)U^{-1}(x)\right) = Tr(F^2(x))$$

(por ciclicidad de la traza)

Considerando solo al campo gluónico, la teoría más sencilla que podemos escribir está dada entonces por la acción de Yang-Mills (-Shaw)

$$S_{YM}[A_\mu] \equiv \int d^4x\, \mathcal{L}_{YM}(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}Tr\left[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right]\right).$$

tomando normalización $Tr(t^I t^J) = \frac{1}{2}\delta^{IJ}$ (fundamental)

Es importante notar que, a pesar de ser la generalización natural del lagrangiano de Maxwell $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $\mathcal{L}_{YM}$ contiene términos cúbicos y cuárticos y NO es por tanto una teoría libre: a diferencia de los fotones, los

gluones asociados al campo de Yang-Mills $A_\mu(x) \equiv A_\mu^I(x) t^I$ interactúan entre sí. Como hemos visto, esto es consecuencia directa de la existencia de la invariancia local no abeliana!

El lagrangiano para los quarks libres sería el de Dirac,

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi) = \bar{\psi}_c^{(s)} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m^{(s)}) \psi_c^{(s)}$$

(que es invariante bajo transformaciones globales $SU(3)$, $\theta^I(x) = \text{cte.}$), y al igual que en el caso abeliano, podemos acoplar la materia al campo de norma reemplazando $\partial_\mu \to D_\mu$, procedimiento conocido como "acoplamiento mínimo".

En conjunto tenemos entonces la acción de QCD

$$S_{QCD} = \int d^4x \left[\mathcal{L}_{YM}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu) + \mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\psi, \bar{\psi}, D_\mu \psi) \right],$$

es decir,

$$\boxed{S_{QCD} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \bar{\psi}^{(s)} (i\gamma^\mu D_\mu - m^{(s)}) \psi^{(s)} \right]}$$

o más explícitamente,

$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i g_f [A_\mu, A_\nu]$, $D_\mu \equiv \partial_\mu + i g_f A_\mu^{(x)}$

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{2} Tr\{ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + 2 i g_f (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)[A^\mu, A^\nu] - g_f^2 [A_\mu, A_\nu][A^\mu, A^\nu] \}$$

$$+ \bar{\psi}^{(s)} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m^{(s)}) \psi^{(s)} - i g_f \bar{\psi}^{(s)} \gamma^\mu A_\mu \psi^{(s)} .$$

Vale la pena resaltar que, al ser QCD una teoría no quiral, es decir, donde los espinores de Weyl con quiralidad izquierda/derecha

$$\psi_{\substack{I \\ D}}(x) \equiv \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)\psi(x) , \quad \gamma^5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 ,$$

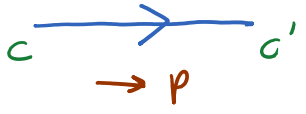
transforman de igual manera bajo el grupo de norma, No hay ningún obstáculo para agregar términos de masa $m \bar{\psi}\psi = m \bar{\psi}_I \psi_D + m \bar{\psi}_D \psi_I$.

(A diferencia p.ej. de lo que sucede en la teoría electrodébil, que es una teoría quiral porque las transformaciones débiles $SU(2)_I$ actúan sobre ψ_I pero no sobre ψ_D, y $m \neq 0$ solo en presencia del Higgs.)

Ahora que conocemos la forma explícita de $\mathcal{L}_{QCD}$, confirmamos que g_f en verdad juega el papel de constante de acoplamiento fuerte: es la magnitud de la carga fuerte que controla la intensidad con que los quarks se acoplan c los gluones, y también la intensidad con que los gluones se acoplan entre sí (como ya habíamos anticipado). Este mismo número g_f es el que figuraba ya en la acción de Yang-Mills (cuando no teníamos todavía quarks), y por esta razón es habitual denotarlo igualmente como g_{YM}.

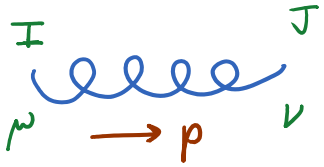
Las reglas de Feynman para QCD se pueden leer en forma detallada a partir de $\mathcal{L}_{QCD}$, y son (después de fijar la norma de manera covariante bajo Lorentz y en la "norma de Feynman" $\xi = 1$):

Propagador del quark



$$= \frac{i(-\gamma^\mu p_\mu + m)\delta_{cc'}}{p^2 + m^2}$$

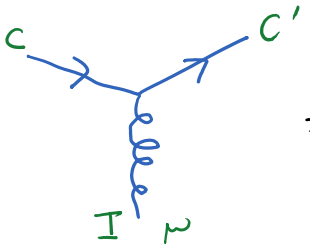
Propagador del gluón



$$= \frac{-i\delta^{IJ}\eta_{\mu\nu}}{p^2}$$

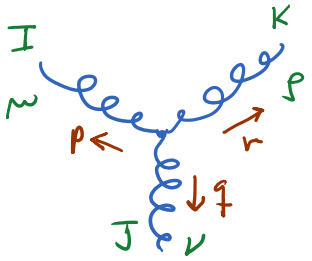
miércoles, 15 de febrero de 2012 09:53 a.m.

Vértice quark-gluón



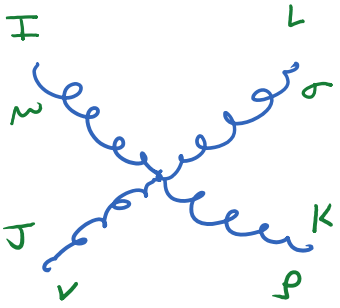
$$= -ig_{YM}\,\gamma^{\mu}\,t^{I}_{cc'}$$

Vértice cúbico del gluón



$$= -g_{YM} f^{IJK}\Big[(q-r)_{\mu}\,\eta_{\nu\rho} + (r-p)_{\nu}\,\eta_{\rho\mu} + (p-q)_{\rho}\,\eta_{\mu\nu}\Big]$$

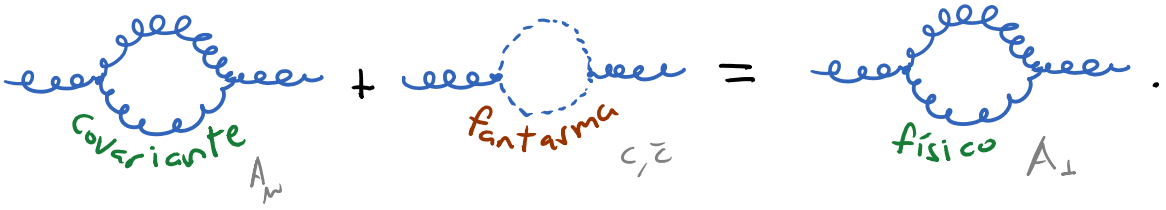
Vértice cuártico del gluón



$$= -ig^{2}_{YM}\Big[f^{IJM}f^{KLM}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}-\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + f^{IKM}f^{LJM}(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu}-\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) + f^{ILM}f^{JKM}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}-\eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu})\Big]$$

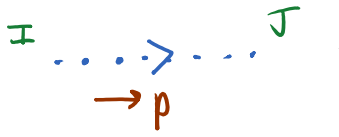
El procedimiento para fijar la norma de manera covariante en el caso no abeliano involucra además a los llamados "fantasmas de Faddeev-Popov" $c^{I}(x)$, $\bar{c}^{I}(x)$, que son campos auxiliares que están acoplados a

los gluones de tal manera que su efecto en lazos es cancelar la propagación de las polarizaciones no físicas en los lazos de gluones. Esquemáticamente,



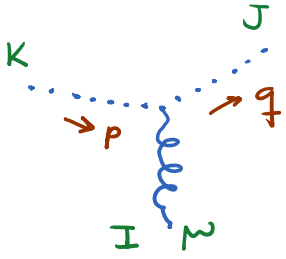
Los fantasmas dan lugar a 2 ingredientes más en los diagramas de Feynman:

Propagador del fantasma



$$= \frac{i\delta^{IJ}}{p^2}$$

Vértice fantasma-gluón



$$= -g_{YM} f^{IJK} q_\mu .$$

Con estas reglas es posible hacer todo tipo de cálculos perturbativos, y en particular, deducir la función beta para la constante de acoplamiento,

$$\beta(g_{YM}) \equiv \mu \frac{\partial g_{YM}}{\partial \mu} = -\frac{1}{3}(11N_c - 2N_s)\frac{g_{YM}^3}{16\pi^2} + O(g_{YM}^5),$$

o lo que es lo mismo,

$$\beta(\alpha_{YM}) \equiv \frac{\partial \alpha_{YM}}{\partial(\ln\mu)} = -\frac{1}{3}(11N_c - 2N_s)\frac{\alpha_{YM}^2}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha_{YM}^3),$$

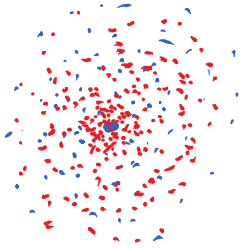
$\equiv b_0$

donde $\alpha_{YM} \equiv \frac{g_{YM}^2}{4\pi} \equiv \alpha_f$, y para mayor generalidad hemos escrito el resultado para un número de colores N_c ($\leftrightarrow$ grupo de norma $SU(N_c)$) y sabores N_s arbitrario. (N_c^2-1 generadores)

La propiedad más importante de este resultado es que, para $11N_c > 2N_s$ (y en particular, en QCD con $N_c = 3$ y $N_s \leq 16$), $\beta(\alpha_{YM}) < 0$, es decir

la constante de acoplamiento decrece con la energía ($\leftrightarrow$ aumenta con la distancia).

Si miramos de cerca el signo en frente del término con N_s, vemos que en realidad los quarks virtuales tienen el mismo efecto sobre la carga fuerte que los electrones virtuales sobre la carga eléctrica: la "apantallan", es decir, hacen que decrezca a distancias



mayores ($\leftrightarrow$ energías más bajas).

Pero el término en N_c tiene el signo contrario, así que los gluones tienen el efecto opuesto: "antiapantallan" a la carga fuerte, es decir, hacen que aumente a distancias mayores ($\leftrightarrow$ energías menores).

Integrando la función beta, encontramos que

$$\alpha_{YM}(\mu) = \frac{\alpha_{YM}(\mu_{ref})}{1 + \frac{1}{6\pi}(11N_c - 2N_s)\alpha_{YM}(\mu_{ref})\ln(\mu/\mu_{ref})}.$$

(μ_{ref}: energía de referencia)

Según esta fórmula, $\alpha_{YM}(\mu) \to 0$ logarítmicamente a altas energías, fenómeno conocido como libertad asintótica (cuyo descubrimiento resultó en un Premio Nobel para Gross, Wilczek y Politzer — y no para 't Hooft, quien encontró el resultado antes pero no lo publicó). Esto implica que la expansión perturbativa es una muy buena aproximación a altas energías, y también, que QCD es una teoría de campo interactuante que está perfectamente definida a distancias

arbitrariamente pequeñas: es completa en el UV.

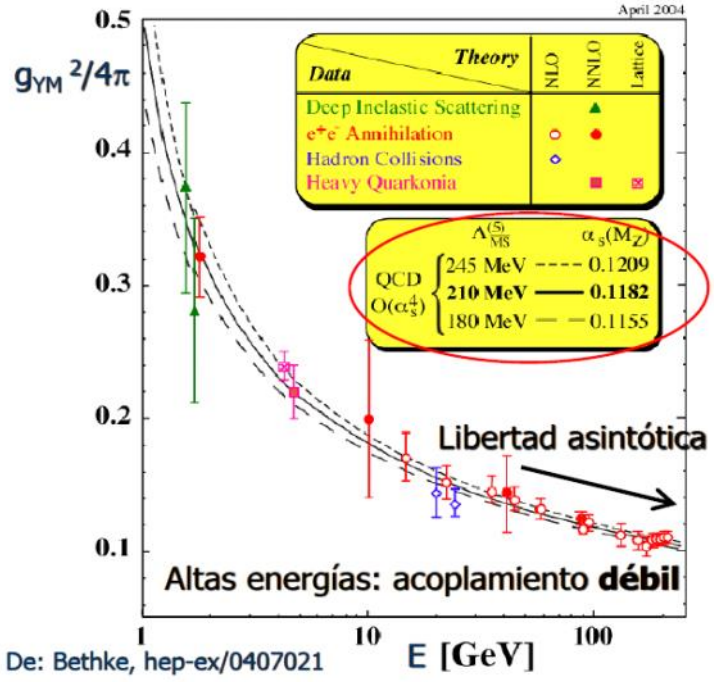
Por supuesto, la otra cara de la moneda es que $\alpha_{YM}(\mu)$ aumenta a bajas energías, y, si pudiéramos creerle a la fórmula de arriba, de hecho sería divergente a una energía finita

$$\mu_{div} \equiv \mu_{ref} \exp\left(-\frac{6\pi}{(11N_c - 2N_f)\alpha_{YM}(\mu_{ref})}\right).$$

Naturalmente, no podemos creer literalmente en esta divergencia, pero μ_{div} sí representa una escala energética característica de QCD, alrededor de y por debajo de la cual la interacción fuerte se vuelve fuertemente acoplada. Es habitual llamarle $\Lambda_{QCD} \equiv \mu_{div}$, y reescribir la evolución de la cte. de acoplamiento en términos de ella,

$$\alpha_{YM}(\mu) = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}(11N_c - 2N_f)\ln(\mu/\Lambda_{QCD})}.$$

Los datos experimentales permiten comprobar que α_{YM} en verdad "corre" de este modo, y deducir que $\Lambda_{QCD} \simeq 200$ MeV. (se denomina "transmutación dimensional a esta aparición de un parámetro característico con dimensiones, Λ_{QCD}, a partir de lo que en la teoría clásica era una constante adimensional, g_{YM}.)



Para $\mu \lesssim \Lambda_{QCD}$ ($\leftrightarrow$ distancias $\ell \gtrsim 5\times10^{-15}$ m), la interacción fuerte se vuelve muy intensa y la expansión perturbativa no es válida. El efecto de las interacciones es tan drástico que experimentalmente NO observamos nunca a los ingredientes básicos de la teoría, quarks y gluones, de manera aislada ($\leftrightarrow$ estados asintóticos $\leftrightarrow$ polos en correladores). Lo que observamos son solo combinaciones NEUTRAS

bajo la fuerza fuerte, que llamamos hadrones:
mesones (quark-antiquark con colores opuestos),
bariones (N_c quarks con colores distintos),
glubolas (combinación de gluones con colores opuestos),
y posibles variantes exóticas (pentaquarks, etc.).
A esta obligación de los quarks y gluones de armar combinaciones neutras de color se le llama confinamiento.

(A pesar de ser en conjunto neutros, los hadrones pueden todavía interactuar a través de una fuerza fuerte residual, análoga a la fuerza de van der Waals entre átomos o moléculas.)

El confinamiento es un hecho experimental, pero no se ha demostrado rigurosamente de forma analítica.

En la región de acoplamiento fuerte, prácticamente la única herramienta teórica que tenemos para estudiar sistemáticamente a la interacción fuerte es a través de cálculos numéricos en un espaciotiempo

discretizado y acotado (para tener un número grande pero finito de variables dinámicas), empresa conocida como QCD en la retícula (lattice QCD en inglés, que es la especialidad de Wolfgang Bietenholz del ICN-UNAM). Este método ha logrado predecir exitosamente las masas de muchos hadrones a partir de primeros principios en QCD, y ha verificado también la existencia del confinamiento. Da muchos resultados muy valiosos, pero no tanta intuición.

La idea básica del confinamiento se puede entender considerando al campo gluónico $A_\mu(x)$ acoplado únicamente a un quark y un antiquark tan pesados que es posible tratarlos simplemente como fuentes puntuales clásicas de $A_\mu(x)$ en la representación fundamental (y antifundamental).

Los cálculos de la energía de este sistema permiten deducir el potencial quark-antiquark (observable que más adelante definiremos de manera más precisa), que resulta ser lineal para separaciones $\ell \gtrsim 10^{-15}$ m,

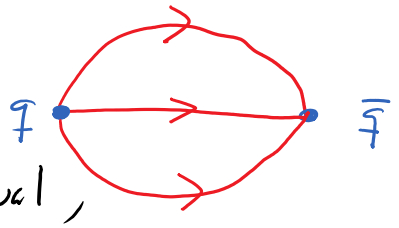
$$V_{q\bar{q}}(\ell) \simeq \sigma \ell \qquad \text{con} \quad \sigma \sim 0.2 \text{ GeV}^2 ,$$

martes, 21 de febrero de 2012 10:21 p.m.

y Coulombiano para separaciones pequeñas,

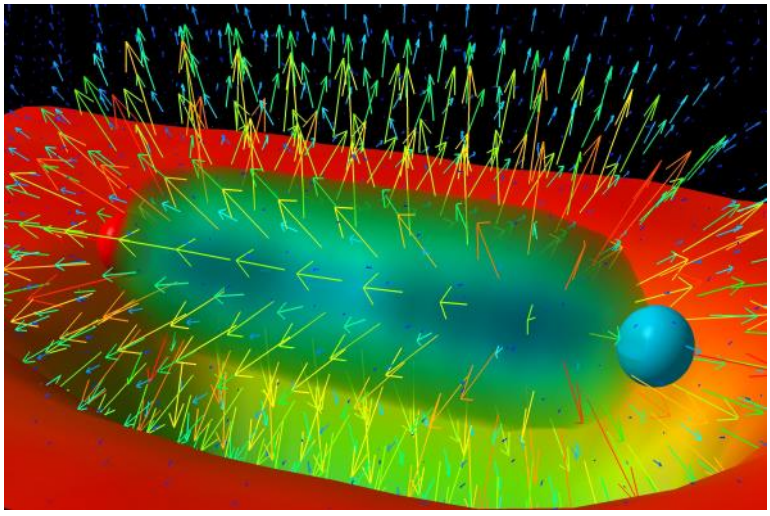
$$V_{q\bar{q}}(l) \sim \frac{\alpha_{YM}}{l} \qquad l \lesssim 10^{-16}\ m .$$

La explicación intuitiva es que a distancias pequeñas las líneas del campo gluónico forman el patrón dipolar usual,



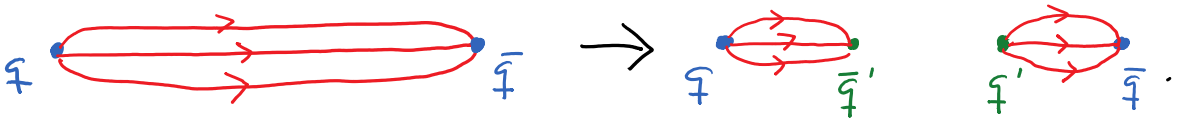
pero a distancias grandes, el hecho de que los gluones interactúan fuertemente entre sí hace que las líneas de campo formen un tubo de diámetro constante e independiente de l.

Este "tubo de flujo cromoelectromagnético" o "cuerda de QCD" es directamente visible en cálculos de QCD en la retícula de la densidad de energía entre el quark y el antiquark.



www.physics.adelaide.edu/theory/staff/leinweber/VisualQCD/Nobel

El parámetro σ que aparece en $V_{q\bar{q}}(l)$ representa precisamente la tensión (energía por unidad de longitud) de este tubo de flujo o cuerda de QCD, y la razón por la cual no podemos aislar al quark es que al separarlo del antiquark nos cuesta energía crear más cuerda, y costaría una energía infinita lograr que $l \to \infty$. Si incluimos de vuelta quarks con masa finita, en cierto punto se vuelve energéticamente favorable crear un par quark-antiquark en lugar de seguir estirando la cuerda. En ese momento la cuerda se rompe, pero terminamos con 2 pares quark-antiquark:



Esto sugiere que en algunas circunstancias podría ser una buena aproximación modelar a un mesón como un quark y un antiquark

conectados por una liga o cuerda delgada con tensión σ. Este modelo fenomenológico basado en la cuerda de QCD reproduce correctamente el llamado comportamient

"de Regge" en el espectro experimental de hadrones,

$J = \alpha' m^2 + \alpha_0$ con $\alpha' \equiv \frac{1}{2\pi\sigma}$ pendiente de Regge.

↑ momento angular

Este fue de hecho el origen histórico de la teoría de cuerdas, alrededor de 1970, como un candidato a describir la fuerza fuerte, anterior a la formulación de QCD (~1973). En la era post-QCD, la teoría de cuerdas parecía haber fracasado como teoría de la interacción fuerte, y en el período ~1975-95 se le estudió como candidata a una teoría cuántica de la gravedad y el resto de las interacciones (con una tensión de la cuerda mucho mayor, $\sigma \sim m_{Planck}^2 \sim 10^{36}\,GeV^2$ en lugar de $\sim \Lambda_{QCD}^2$).

Con el descubrimiento de la correspondencia holográfica, la teoría de cuerdas ha vuelto entonces a sus orígenes, como herramienta para entender algunas generalizaciones de QCD. Y las décadas anteriores ciertamente No fueron una pérdida de tiempo, porque muchos de los ingredientes explorados en esos años (como dimensiones adicionales

y "branas") han resultado absolutamente cruciales.

Regresando a nuestra discusión de las propiedades de QCD, es importante tener presente que el acoplamiento fuerte es necesario, aunque NO suficiente, para tener confinamiento.

Imaginemos que calentamos un gas de hadrones (o el vacío, creando a los hadrones). Conforme la temperatura aumenta, disminuye el acoplamiento $\alpha_{YM}(T)$. Esperaríamos entonces que a una temperatura suficientemente alta, el acoplamiento no sea ya suficientemente alto como para inducir confinamiento. Es decir, debemos tener una transición a una fase desconfinada (donde los quarks y gluones no están ya obligados a encontrarse dentro de combinaciones neutras de color), que llamamos el Plasma de Quarks y Gluones (QGP).

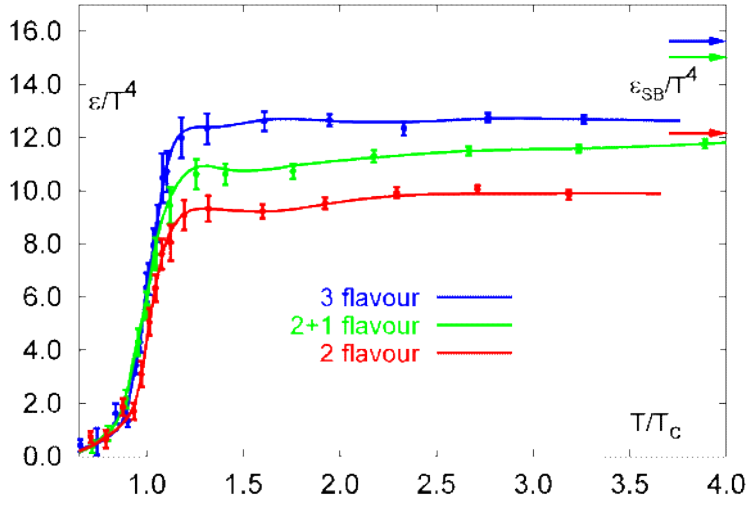
Adivinando, estimaríamos que la temperatura de desconfinamiento debiera ser

$$T_c \sim \Lambda_{QCD} \simeq 200\,\text{MeV},$$

o en otras palabras, ¡2×10^{12} grados Kelvin!

Cálculos en la retícula lo confirman, con $T_c \simeq 160-190$ MeV.

Para un gas ideal, la densidad de energía $\varepsilon \propto T^4$, y ε/T^4 es proporcional al número de especies de partículas, es decir, de grados de libertad. La gráfica muestra entonces un aumento drástico y repentino de grados de libertad alrededor de $T \sim T_c$, que pasan a ser de



de: F. Karsch, hep-lat/0106019

$O(N_c^0)$ (esencialmente 3 piones)

a $O(N_c^2)$ ($2 \times 8 = 16$ gluones + $2 \times 2 \times 3 \times N_s = 24-36$ quarks).

(partículas/antipartículas; espín; color^2; espín; color)

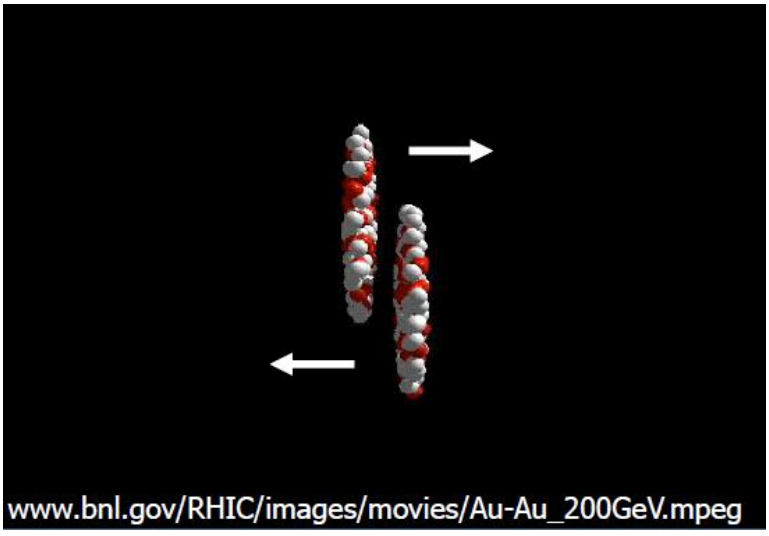
14: 12/02/24

En la gráfica se observa además que para $T_c < T \lesssim 4T_c$ la densidad de energía se comporta como la de un gas ideal, pero con un coeficiente que es ~0.80 del del gas ideal (Stefan-Boltzmann). Esto resulta ser aproximadamente cierto también para la entropía y la presión, y solía considerarse como una indicación

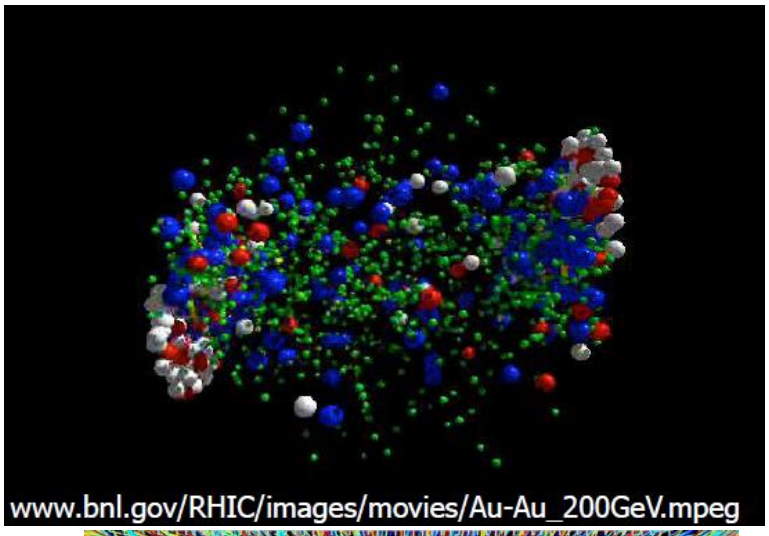
de que, para $T \gtrsim T_c$, el QGP podría ser modelado aproximadamente como un gas ideal: las interacciones solo daban una corrección del 20%.

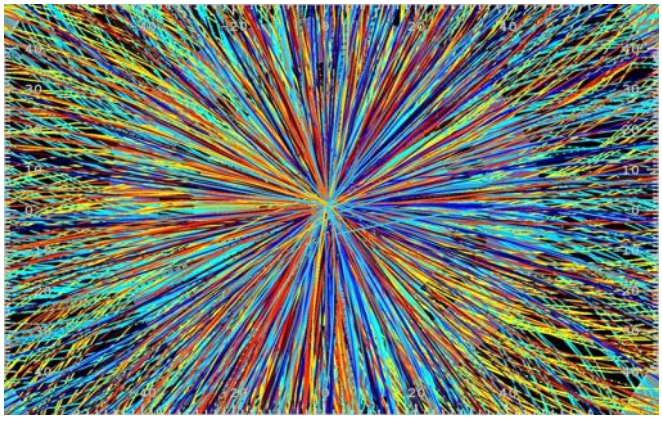
Increíblemente, desde la década pasada el QGP pudo ser generado experimentalmente en colisiones de iones pesados relativistas, primero en el acelerador RHIC, en E.U.A. (con colisiones de núcleos de oro, analizados por los detectores STAR, PHENIX, PHOBOS y BRAHMS), y más recientemente en el LHC, en CERN (con colisiones principalmente de núcleos de plomo, analizados por los detectores ALICE, CMS y ATLAS).

En estos experimentos colisionan ~400 nucleones con una energía de 100 GeV/nucleón en RHIC ~3 TeV/nucleón en LHC,



y después del choque los detectores registran miles de hadrones, leptones, etc. (alrededor de 5,000 en RHIC, y 12,000 en LHC). Las mediciones permiten deducir que en una etapa intermedia se logran densidades de energía suficientemente altas para alcanzar el deconfinamiento (~ 5 GeV/fm^3 en RHIC, ~ 15 GeV/fm^3 en LHC), de modo que durante un tiempo muy breve ($\sim 10^{-22}$ s) y en una región espacial muy pequeña ($\sim 10^{-14}$ m) se tiene un plasma de quarks y gluones, a una temperatura $T \sim (1\text{-}2)\,T_c$ en RHIC, y un poco más alta en LHC (donde quizás eventualmente se alcance $T \sim 5T_c$).





Después de su producción y termalización inicial, el QGP se expande rápidamente y se enfría hasta $T \sim T_c$, como resultado de lo cual "hadroniza".

LG: 01/10/20

El estudio de esta nueva fase de la materia es interesante porque nos enseña más sobre las propiedades de QCD, y también porque representa el estado primordial de la materia en el universo, alrededor de 10^{-12} segundos después del Big Bang.

Diversas mediciones experimentales (p.ej., la pérdida significativa de energía de quarks pesados en el plasma) indican que, contrario a lo que muchos esperaban, el QGP producido en RHIC y LHC está fuertemente acoplado (como de hecho parece lógico, dado que $T \sim T_c \sim \Lambda_{QCD}$).

En resumen, hemos visto que QCD es una teoría de norma no abeliana que en muchas situaciones de interés está fuertemente acoplada. (En el contexto de física más allá del Modelo Estándar se pueden encontrar otros ejemplos, como las teorías de "technicolor" que intentan proveer una alternativa al Higgs.)

L4: 25/08/16

En este régimen, la expansión perturbativa es inútil. Los cálculos en la retícula (euclídeana) son útiles para

determinar propiedades estáticas (p.ej., el espectro de hadrones, la entropía del QGP sin número bariónico neto); pero No dinámicas (p.ej., amplitudes de dispersión, o la viscosidad del QGP). Para estos últimos casos podemos intentar formular modelos fenomenológicos ("adivinar y cruzar los dedos" - p.ej., hacer cálculos perturbativos), o cambiarnos a alguna teoría distinta (pero, esperamos, similar), un modelo de juguete, donde de algún modo SÍ podamos hacer cálculos no perturbativos de primeros principios.

Los 2 enfoques pueden ser informativos, y en cierta manera, complementarios. En este curso nos interesa por supuesto el segundo camino: utilizando a la correspondencia norma-gravedad, estudiaremos a algunas primas de QCD que son interesantes en sí mismas desde el punto de vista teórico, y en algunos casos constituyen modelos de juguete de QCD que, como veremos, ya nos han enseñado varias lecciones cualitativas (e incluso semicuantitativas) sobre la interacción fuerte.

miércoles, 22 de febrero de 2012 10:29 a.m.

* ALGUNAS PRIMAS DE QCD

- La simplificación más obvia es considerar a "QCD" SIN quarks ($N_s=0$), es decir, a Yang-Mills con grupo de norma $SU(3)$. Esta es una teoría interactuante donde todavía se tiene libertad asintótica y confinamiento. Desafortunadamente, entenderla resulta tan complicado como entender a QCD, porque no existe ningún parámetro pequeño con respecto al cual podemos hacer una expansión en serie de potencias.
- Otra generalización que a primera vista pareciera complicarnos la vida pero acaba siendo muy útil, es tomar a Yang-Mills (con o sin quarks) con grupo de norma $SU(N_c>3)$, es decir, con un mayor número de colores. Esto sigue preservando la libertad asintótica y el confinamiento.

Surge entonces una posibilidad interesante, sugerida por 't Hooft en 1974: podemos tomar

acoplamiento de 't Hooft

$$N_c \to \infty \quad \text{con} \quad \lambda \equiv g_{YM}^2 N_c \ \text{fija} \qquad (\text{y } N_s \text{ fija}).$$

Si bien esto implica que $g_{YM}^2 \to 0$, la teoría No se vuelve libre — como veremos en breve, la amplitud para que un gluón con color dado interactúe tiende a cero, pero hay gluones de $O(N_c^2)$ colores distintos, y la amplitud de interactuar con alguno de ellos es finita y $\propto \lambda$. En particular, la función beta sigue siendo finita (y negativa):

$$\frac{\partial \alpha_{YM}}{\partial(\ln\mu)} = -\frac{1}{3}(11N_c - 2N_s)\frac{\alpha_{YM}^2}{2\pi} \qquad \text{y} \quad \alpha_{YM} = \frac{g_{YM}^2}{4\pi} = \frac{\lambda}{4\pi N_c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \lambda}{\partial(\ln\mu)} = -\frac{11}{3}\frac{\lambda^2}{8\pi^2} + \dots,$$

así que aún en el límite $N_c \to \infty$ tenemos todavía libertad asintótica y confinamiento. Lo novedoso es que ahora sí tenemos a $1/N_c$ como parámetro pequeño, así que al menos para $N_c \gg 1$ podemos intentar describir

$$SU(N_c) \simeq SU(\infty) + \mathcal{O}(1/N_c^2)$$

¿Pero acaso $3 \gg 1$?

↳ correcciones podrían ser pequeñas incluso para $N_c = 3$

Cálculos con QCD en la retícula (donde N_c se puede ajustar a $4, 5, 6, 7, \ldots$) muestran que para algunas cantidades físicas, ¡$N_c = \infty$ de hecho no da una mala aproximación al caso de interés $N_c = 3$! [ver p.ej. artículos de revisión 1309.3638, 0912.3339].

Dado que el número de grados de libertad de gluones escala como N_c^2, y el de quarks sólo como $N_c \cdot N_f$, para $N_c \gg N_f$ esperaríamos que los gluones dominen la dinámica, así que por un rato ignoraremos a los quarks, concentrándonos entonces en YM, en lugar de QCD.

Como vimos, bajo transformaciones $SU(N_c)$ globales, el campo de norma transforma en la rep. adjunta,

$$[A_\mu(x)]_{cc'} \to [A'_\mu(x)]_{cc'} = \left[\exp\left(i\theta^I t^I\right)\right]_{cc''} \left[A_\mu(x)\right]_{c''c'''} \left[\exp\left(-i\theta^J t^J\right)\right]_{c'''c'},$$

ignoramos término ∂_μ porque $\theta^I = \text{cte.}$ aquí

o lo que es lo mismo,

$$[A'_\mu(x)]_{cc'} = [\exp(i\theta^I t^I)]_{cc''} [\exp(-i\theta^J t^J)]^T_{c'c'''} [A_\mu(x)]_{c''c'''}.$$

Vemos entonces que el primer índice de $[A_\mu]_{cc'}$ transforma en la rep. fundamental ($\underline{N_c}$), mientras que el segundo índice transforma en otra rep. N_c-dimensional cuyos generadores son $-(t^I)^T = -(t^I)^*$.

(Es fácil verificar que

$$[t^I, t^J] = i f^{IJK} t^K \longleftrightarrow [-(t^I)^T, -(t^J)^T] = i f^{IJK} (-t^K)^T.$$

(* ó T))

Esta es la llamada representación antifundamental ($\underline{\bar{N}_c}$), y es justo la misma en que transforma

$$\bar{\psi}_c \equiv \psi_c^\dagger \gamma^0 \to \psi_{c'}^\dagger \gamma^0 [\exp(-i\theta^I t^I)]_{c'c}.$$

↑ operador que aniquila antiquarks (y crea quarks)

Frecuentemente denotaremos entonces al campo glúnico como $[A_\mu(x)]_{c\bar{c}'}$, para enfatizar que uno de los índices es de color y el otro de anticolor (es por esto que hablamos de un glúon verde-anticazul, etc.).

martes, 28 de febrero de 2012 10:35 p.m.

Queremos ahora examinar en cierto detalle los factores de N_c y g_{YM}^2 (o N_c y $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c$) en la expansión perturbativa de YM.

Como vimos, en la normalización habitual ("canónica") para el campo gluónico, tenemos $D_\mu \equiv \partial_\mu + i g_{YM} A_\mu$ y

$$S_{YM} \sim \int d^4x \left\{ \mathrm{Tr}(\partial A \partial A) + g_{YM} \mathrm{Tr}(AA\partial A) + g_{YM}^2 \mathrm{Tr}(AAAA) \right\}.$$

Pero el análisis nos resultará más fácil si usamos

$(A_\mu)_{aquí} \equiv g_{YM} (A_\mu)_{usual}$, de modo que

$D_\mu = \partial_\mu + i A_\mu$ y

$$S_{YM} \sim \underbrace{\frac{1}{g_{YM}^2}}_{\equiv \frac{N_c}{\lambda}} \left\{ \mathrm{Tr}(\partial A \partial A) + \mathrm{Tr}(AA\partial A) + \mathrm{Tr}(AAAA) \right\}.$$

trazas darán factores de N_c

El propagador (función de 2 ptos.) toma entonces la forma

$$\langle A^\mu_{c\bar{c}'}(x) A^\nu_{d\bar{d}'}(0) \rangle =$$

martes, 28 de febrero de 2012 11:01 p.m.

g_{YM}^2, porque propagador es inverso de $\mathcal{L}_{libre}$

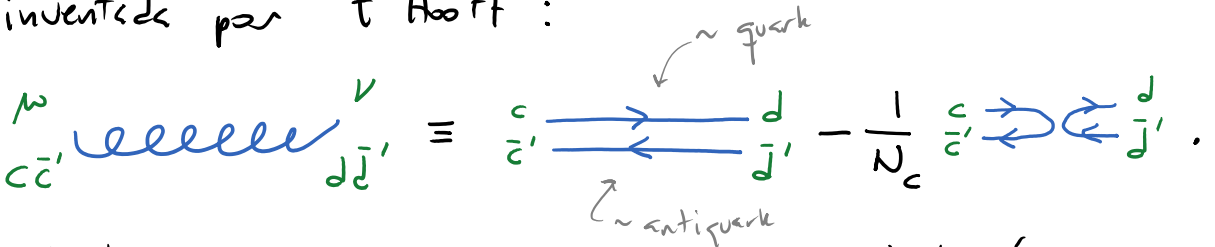
$$\propto \frac{\lambda}{N_c}\frac{\eta^{\mu\nu}}{x^2}\left(\delta_{cd}\delta_{\bar{c}'\bar{d}'} - \frac{1}{N_c}\delta_{c\bar{c}'}\delta_{d\bar{d}'}\right)$$

Transformada de Fourier de $1/p^2$

dice que el gluón al propagarse NO cambia su color/anticolor

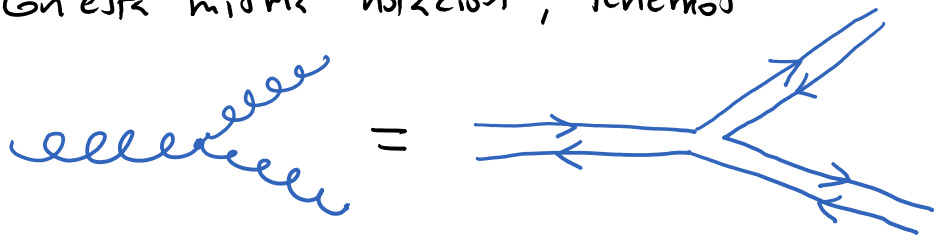
presente porque $Tr(A_\mu) = A_\mu^I Tr(t^I) = 0$, dado que el grupo es $SU(N_c)$ y no $U(N_c)$

Una manera muy útil de seguirle la pista a esta estructura de color es con la notación de doble línea inventada por 't Hooft:



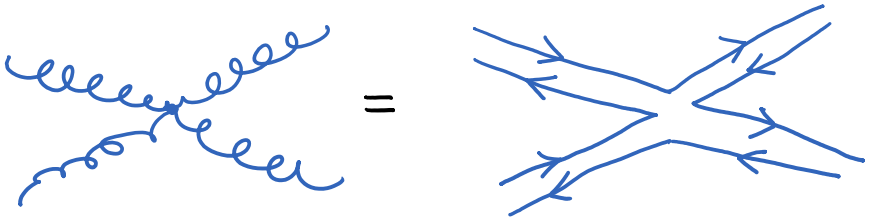
En lo que sigue estudiaremos solo la contribución dominante a cada amplitud cuando $N_c \gg 1$, así que podemos ignorar el segundo término (aunque por supuesto tendríamos que incluirlo de vuelta si quisiéramos calcular contribuciones subdominantes). En otras palabras, la diferencia entre $SU(N_c)$ y $U(N_c)$ se vuelve imperceptible cuando $N_c \to \infty$.

En esta misma notación, tenemos



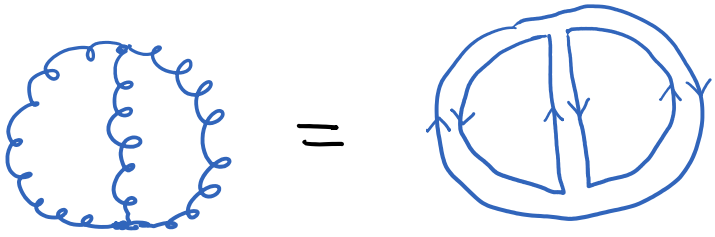
$\propto \frac{N_c}{\lambda}$

y



$\propto \frac{N_c}{\lambda}$. ($\frac{1}{g_{YM}^2}$)

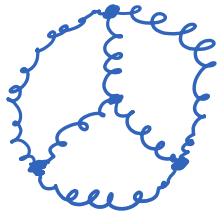
En estas reglas, podemos calcular la dependencia de N_c y λ de cualquier diagrama. Consideremos primero algunos de los diagramas que contribuyen a la amplitud de vacío (función de cero puntos, o "burbujas de vacío"):



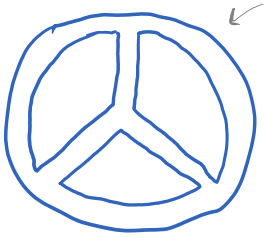
martes, 28 de febrero de 2012 11:26 p.m.

$$= \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^3 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^2 (N_c)^3 = N_c^2 \lambda \,, \qquad (\leftarrow g_{YM}^2 N_c)$$

por 3 propagadores → ; por 2 Vértices ↑ ; ↑ por 3 lazos "de quark": elecciones de color que quedan sin determinar, donde debemos entonces sumar sobre N_c opciones ($\leftrightarrow$ factor de N_c por traza)

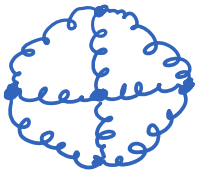


$=$

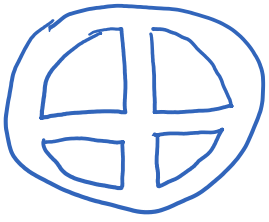


(← omitiremos flechas)

$$= \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 N_c^4 = N_c^2 \lambda^2 \,,$$



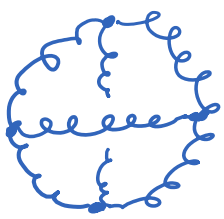
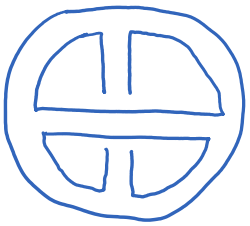
$=$



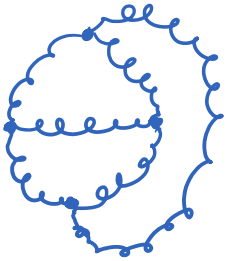
$$= \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^8 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^5 N_c^5 = N_c^2 \lambda^3 \,.$$

Todos estos son diagramas planares : pueden dibujarse en una hoja sin cruzar líneas. Para ellos, a L lazos, se obtiene $\propto N_c^2 \lambda^{L-1}$.

Existen también diagramas NO planares, como p.ej.,

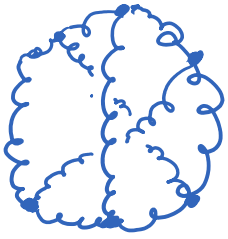
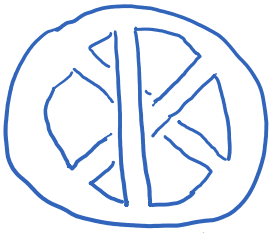

$=$

$= \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 N_c^2 = N_c^0 \lambda^2 .$

Notar que esto es distinto a


$=$

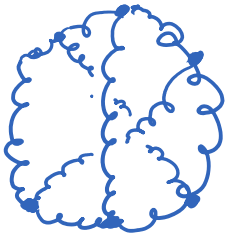
$= \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 N_c^4 = N_c^2 \lambda^2 ,$

que <u>sí</u> es planar — a pesar de que la diferencia radica solo en el flujo del color y por tanto no es visible en la notación estándar. Otro ejemplo es


$\supset$

$= \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^9 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^6 N_c^3 = N_c^0 \lambda^3 ,$

en ejemplos anteriores debíéramos también haber incluido inclusión en lugar de igualdad

vs.


$\supset$

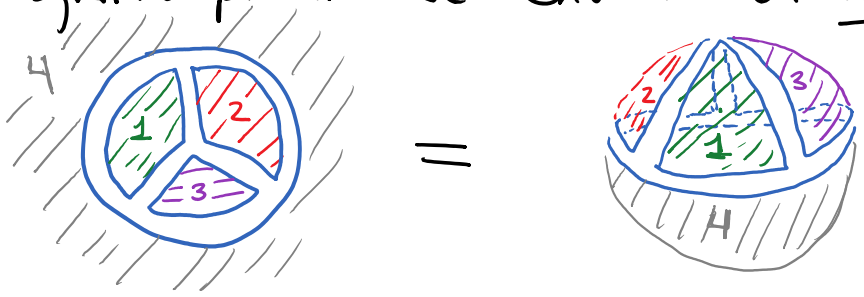
$= \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^9 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^6 N_c^1 = N_c^{-2} \lambda .$

Todos estos diagramas están suprimidos por factores adicionales de $1/N_c^2$ con respecto a los diagramas planares.

Aprendemos entonces que el límite de 't Hooft, $N_c \to \infty$ con $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c$ fija simplifica la teoría porque elimina todos los diagramas no planares. Por esta razón, N_c grande es sinónimo del "límite planar"

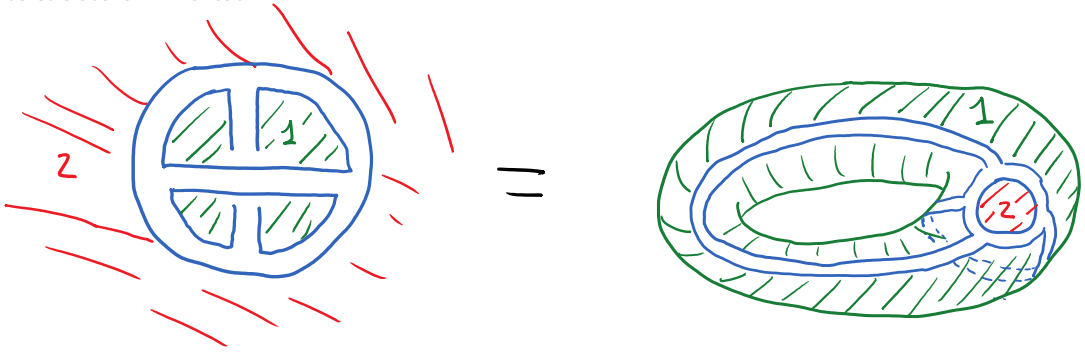
Sucede algo interesante si rellenamos los agujeros de los diagramas de doble líneas, es decir, si interpretamos cada "lazo de quark" (incluyendo al lazo exterior, agregando el punto en infinito) como la cara de una superficie.

Los diagramas planares se convierten en esferas:



Los no planares se convierten en toros o superficies con más manijas:

miércoles, 29 de febrero de 2012 01:00 a.m.



Un diagrama con V vértices (= vértices del poliedro que representa a la superficie), A propagadores (= aristas del poliedro asociado a la superficie) y C lazos "de quark" (= caras del mismo poliedro) es proporcional a

$$\left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^A \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^V N_c^C = \underbrace{N_c^{V-A+C}}_{N_c^{\chi}} \lambda^{A-V},$$

donde $\chi \equiv V-A+C$ es el número de Euler de la superficie asociada al diagrama. χ es un invariante topológico de la superficie (NO depende del tipo de poliedro con que la representemos), que puede reescribirse como

$$\boxed{\chi = 2-2m},$$ con m el número de manijas.

Esto da otra manera de explicar por qué los

diagramas no planares (que corresponden a $m \geq 1$) están suprimidos.

L5: 14/02/24 L5: 06/10/20

En los diagramas de vacío que estamos considerando hasta ahora, todos los propagadores representan a partículas virtuales, y podemos por tanto decir que el número de lazos en un diagrama (es decir, de momentos sin determinar, que deben ser integrados) es

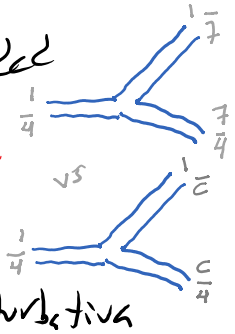
vértices: delta de Dirac que conservan el momento

$$L = A - V + 1 .$$

propagadores: número de partículas virtuales (↔ integrales sobre momento)

delta de Dirac que implementa conservación del momento total del diagrama (que en este caso es $\delta^{(4)}(0) = VT$)

La dependencia que tenemos del acoplamiento de 't Hooft es entonces $\lambda^{A-V} = \lambda^{L-1}$, justo como encontramos en los ejemplos. Así que en verdad es λ y no g_{YM}^2 quien controla la expansión perturbativa, que es válida solo para $\lambda \ll 1$.



Concluimos entonces que la expansión perturbativa para la amplitud de vacío tiene la forma

$$\mathcal{A} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N_c}\right)^{-\chi} \sum_{L=0}^{\infty} \lambda^{L-1} C_{m,L} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N_c}\right)^{-\chi} A_m(\lambda),$$

$-\chi = 2m-2$

- m: manijas ("género")
- L: lazos
- $C_{m,L}$: cte. independiente de λ y N_c

donde cada $A_m(\lambda)$ se calcula con diagramas dibujados sobre superficies (sin borde) de distinto "género":

$$\mathcal{A} = \quad + \quad + \quad + \ldots$$

$$N_c^2 A_0(\lambda) \qquad N_c^0 A_1(\lambda) \qquad N_c^{-2} A_2(\lambda)$$

Curiosamente, ¡¡esto tiene exactamente la misma forma que la expansión perturbativa para la amplitud de vacío en una teoría de cuerdas cerradas con acoplamiento de cuerdas $g_c = 1/N_c$!! Como veremos,

$$\mathcal{A} = \sum_{m=0}^{\infty} g_c^{-\chi} A_m(l_c)$$

l_c: longitud de cuerda

diagramas de Feynman para cuerdas

$$= \quad + \quad + \quad + \ldots$$

$$g_c^{-2} A_0(l_c) \qquad g_c^0 A_1(l_c) \qquad g_c^2 A_2(l_c)$$

cuerdas se pueden partir en dos

L5: 30/08/16

Por supuesto, este análisis apenas sugiere una conexión con alguna teoría de cuerdas, puesto que en YM no tenemos verdaderas superficies.

- Para $\lambda \ll 1$, la expansión perturbativa es válida, y sabemos que dominan los diagramas con pocos vértices, que distan mucho de parecer superficies suaves porque tienen hoyos muy grandes.
- Para $\lambda \gg 1$, la expansión perturbativa es inútil, y NO sabemos bien qué pasa. Pero ingenuamente, esperamos que dominen los diagramas con muchos vértices, con lo cual uno podría especular que quizás los hoyos se acaban llenando para dar verdaderas superficies.

En caso de que esto fuera cierto, la expansión que se hace en la hipotética teoría de cuerdas en potencias de $\alpha' \equiv \ell_c^2 \equiv \frac{1}{2\pi T_F}$ (tensión de la cuerda) podría estar asociada a la expansión en YM en potencias de $1/\lambda$ (porque mayor $\alpha' \longleftrightarrow$ menor $T_F \longleftrightarrow$ hoja de mundo de la cuerda fluctúa más

↔ superficie es menos suave

↔ hoyos más grandes en diagramas YM ↔ menor λ).

Vislumbramos entonces la intrigante posibilidad de que, al menos para $N_c \gg 1$ y $\lambda \gg 1$, YM pudiera quizás reformularse como una teoría de cuerdas cerradas débilmente acopladas, con acoplamiento $g_c \sim 1/N_c$.

Vale la pena resaltar que el argumento de 't Hooft que hemos presentado aplica no solo para YM, sino para cualquier teoría (confinante o no) con campos puramente en la rep. adjunta de $U(N_c)$ ó $SU(N_c)$, con acoplamientos que puedan ser eliminados de la acción salvo por un factor común al frente (que llamaríamos $1/g_{YM}^2 \equiv N_c/\lambda$).

Por supuesto, incluso si la conexión sugerida con cuerdas no es solo una casualidad, el argumento no nos dice cuál es la teoría de cuerdas involucrada. Como veremos más adelante, la correspondencia norma-gravedad hace todo esto muy preciso.

miércoles, 29 de febrero de 2012 09:56 a.m.

Habiendo ya analizado a YM para N_c grande, una inquietud natural es preguntar qué ocurre cuando agregamos quarks para volver a QCD.

Sabemos que el lagrangiano correspondiente es

$$\mathcal{L}_{Dirac}(\bar{\psi}, D_\mu \psi) = \bar{\psi}\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu) - m\right]\psi \quad ,$$

↑ en nueva normalización

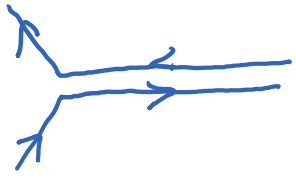
así que si reescalamos

$$\psi(x) \longrightarrow \psi_{nuevo}(x) \equiv \sqrt{\frac{\lambda}{N_c}}\,\psi_{usual}(x) \quad ,$$

logramos tener

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \frac{N_c}{\lambda}\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi \quad ,$$

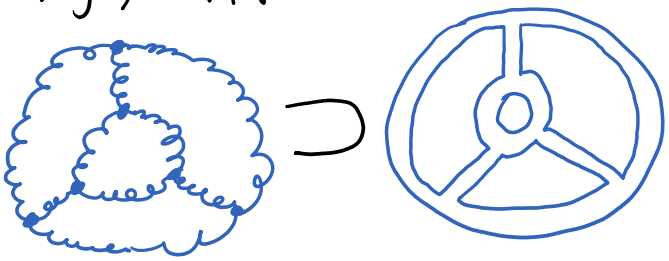
con lo cual el propagador del quark es de orden λ/N_c, tal como el del gluón, y el vértice quark-gluón es de orden N_c/λ, tal como los vértices cúbico y cuártico del gluón.



La única novedad es que ahora pueden aparecer en los diagramas propagadores de quark, que portan un solo índice de color.

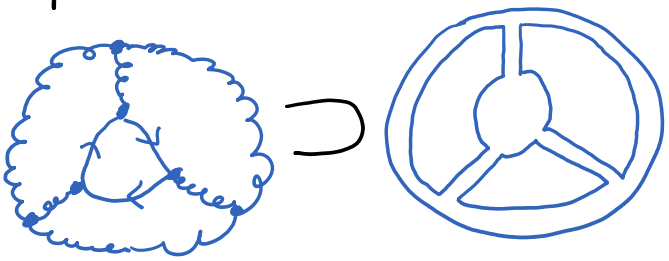
martes, 06 de marzo de 2012 10:43 p.m.

P.ej., además de

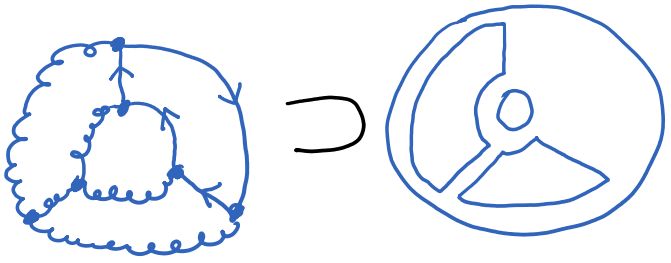


$$\propto \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^9 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^6 N_c^5 = N_c^2 \lambda^3 ,$$

podemos tener

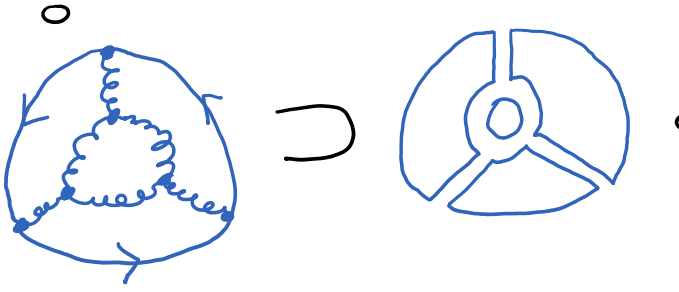


$$\propto \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^9 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^6 N_c^4 = N_c^1 \lambda^3 ,$$



$$\propto \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^9 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^6 N_c^4 = N_c^1 \lambda^3$$

ó

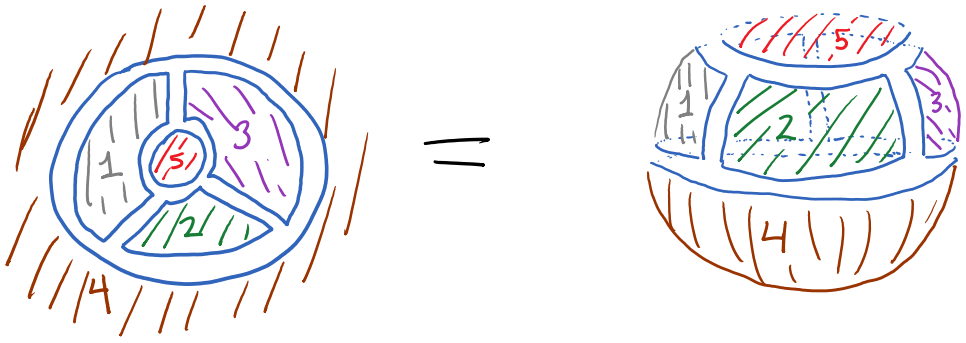


$$\propto \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^9 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^6 N_c^4 = N_c^1 \lambda^3 ,$$

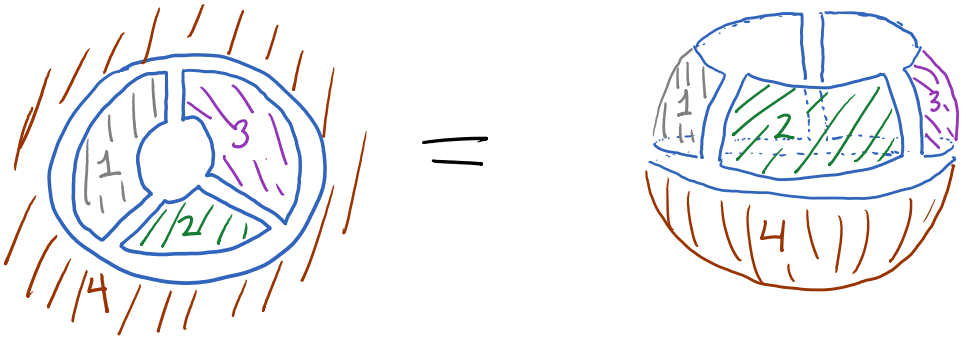
que son subdominantes por un factor de $1/N_c$ con respecto al diagrama con puros gluones.

Más en general, los diagramas con verdaderos lazos de quark corresponden a superficies a las que les

faltan caras, es decir, que tienen bordes.
P.ej., los 2 primeros diagramas recién mencionados corresponden a



vs.



.

Cada reemplazo de 1 lazo de gluón por 1 lazo de quark agrega un borde a la superficie ($\leftrightarrow$ desaparece una cara) y disminuye por 1 el exponente de N_c.
La dependencia entonces sigue siendo

$$N_c^{\chi}\,\lambda^{L-1}, \qquad \chi = V - A + C$$

donde ahora el número de Euler $\chi \equiv V - A + C$ es

$$\boxed{\chi = 2 - 2m - b}\ .$$

m: número de manijas; b: número de bordes

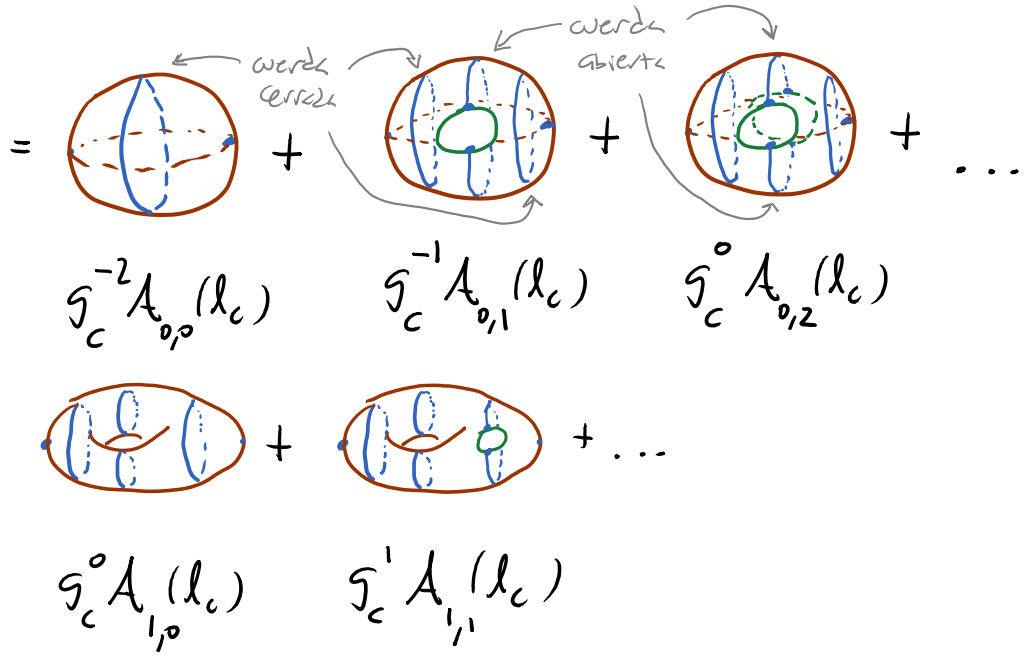
Vemos entonces en total generalidad que los diagramas con lazos de quarks están suprimidos, a menos que en lugar del límite de 't Hooft, $N_c \to \infty$ con λ y N_f fijos, tomemos el "límite de Veneziano", $N_c \to \infty$ con λ fija y $N_f \propto N_c$.

En términos de la hipotética teoría de cuerdas, la aparición de superficies con bordes indica que la inclusión de quarks, o más en general, de campos en la representación fundamental de $SU(N_c)$, corresponde a una teoría de cuerdas donde existen cuerdas abiertas además de cuerdas cerradas:

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} g_c^{-\chi} A_{m,b}(I_c)$$

miércoles, 07 de marzo de 2012 12:04 a.m.

cuerdas se pueden romper además de dividir



(Es posible hacer otras generalizaciones. P.ej., si el grupo de norma es $SO(N_c)$ en lugar de $SU(N_c)$, entonces los campos son reales, los propagadores No tienen flechas e incluyen

y esto da lugar a superficies no orientables, como el plano proyectivo o la botella de Klein, características de una teoría de cuerdas no orientadas.)

Hasta ahora solo hemos analizado explícitamente diagramas de vacío, pero podemos igualmente examinar el comportamiento de funciones de correlación de n puntos.

Podríamos calcular, como es habitual, correladores de los campos básicos $A_\mu(x)$ y $\psi(x)$, pero los resultados son dependientes de nuestra elección de norma. Toda la información física puede extraerse de las funciones de correlación de operadores invariantes de norma. Éstos son necesariamente operadores compuestos. Las posibilidades más sencillas son del tipo

$$M(x) \propto \bar{\psi}(x)\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) D_\mu \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) F_{\mu\nu}(x) D_\lambda \psi(x), \text{ etc.},$$

que al actuar sobre el vacío crean mesones; o

$$G(x) \propto \mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)\right], \quad \mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}(x) D_\lambda F_{\rho\sigma}(x)\right], \text{ etc.},$$

que al actuar sobre el vacío crean glubolas.

El operador local e invariante de norma más general puede escribirse como una suma sobre productos de

estos $M(x)$'s y $G(x)$'s.

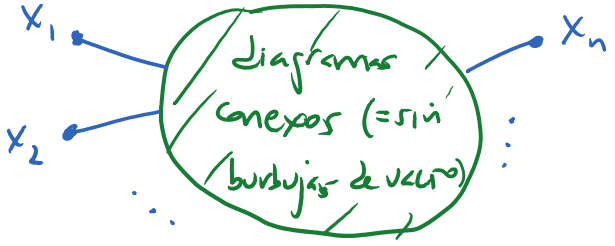
Antes de proceder, vale la pena recordar que en cualquier teoría de campos (p.ej., escalar), al realizar el cálculo de correladores de alguno de los campos básicos $\varphi(x)$, resulta útil definir al campo renormalizado

$$\varphi_{desnud}(x) \longrightarrow \varphi_{renorm}(x) \equiv \frac{\varphi_{desnud}(x)}{\sqrt{Z_\varphi}}$$

("constante de renormalización de la función de onda"),

de tal modo que Z_φ ayude a absorber las divergencias UV en los correladores,

$$\underbrace{\langle 0|T\{\hat{\varphi}_{desn}(x_1)\cdots\hat{\varphi}_{desn}(x_n)\}|0\rangle}_{\equiv \langle \varphi_{desn}(x_1)\cdots\varphi_{desn}(x_n)\rangle} =$$



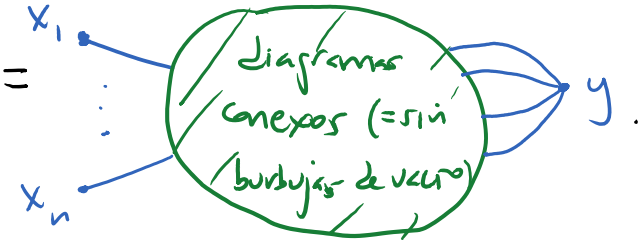
Y de manera similar, al calcular correladores de operadores compuestos, como p.ej., $\varphi^4(x)$, es útil definir una versión renormalizada del operador,

$$\varphi^4_{ren}(x) \equiv \frac{\varphi^4_{desnudo}(x)}{\sqrt{Z_{\varphi^4}}} \quad \left(\neq (Z_\varphi)^4\right)$$

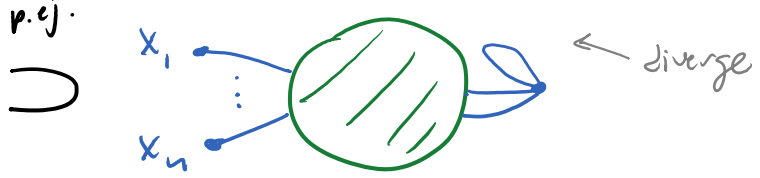
(+ contribuciones de otros operadores con igual o menor dimensión que φ^4),

para ayudar a absorber las divergencias UV adicionales en los correladores,

$$\langle \varphi_{desn}(x_1) \cdots \varphi_{desn}(x_n)\, \varphi^4_{desn}(y) \rangle =$$



p.ej.

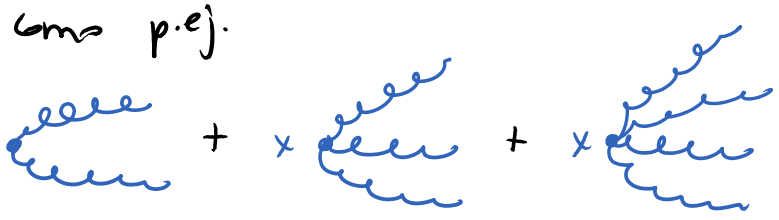


En otras palabras, se requiere cierto cuidado para que un operador como $\varphi^4(x) \sim \lim_{y,z,w \to x} \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\varphi(w)$ esté bien definido [ver p.ej. Collins, capítulo 6]. Por esta razón, la dimensión Δ (dependencia de la escala energética μ) de un operador compuesto en general NO puede inferirse ingenuamente a partir de la del campo básico.

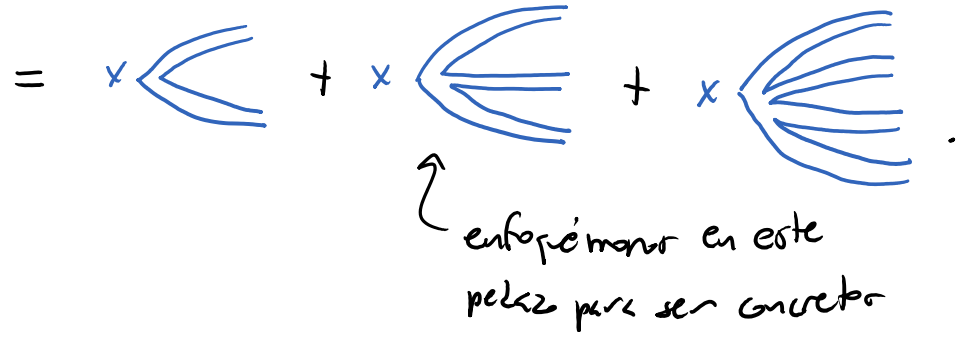
L6: 19/02/24

Consideremos ahora correladores de los operadores de globales $G(x)$, como p.ej.

$$Tr(F^2(x)) =$$

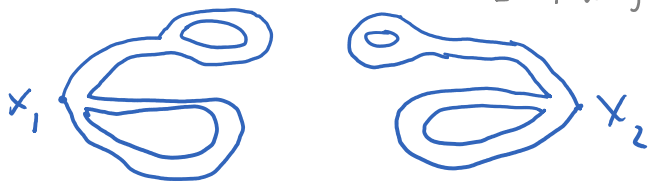


$\partial A \partial A + A A \partial A + A A A A$



Podemos ver que $\langle G(x_1)\,G(x_2)\rangle$ incluye diagramas disconexos (= "conexos" pero no completamente conexos) como

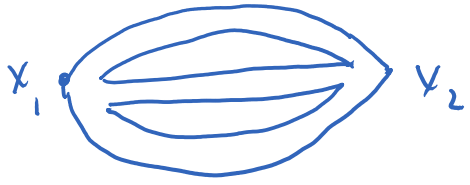
≡ sin burbujas de vacío



$$\propto \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^{3\cdot 2}\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^{1\cdot 2} N_c^{3\cdot 2} = N_c^2\,\lambda^4$$

sin incluir posible factor por puntos externos

y (completamente) conexos como



$$\propto \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^{3}\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^{0} N_c^{3} = N_c^0\,\lambda^3 .$$

Es un hecho genérico que para $N_c \gg 1$, los diagramas conexos están suprimidos. La manera más fácil de deducir esto es notar que, si normalizáramos

$$G(x) \to \frac{N_c}{\lambda}\,G(x),$$

los puntos externos contribuyan justo el mismo

factor N_c/λ que los vértices de interacción, así que el conteo es idéntico al que vimos para amplitudes de vacío. Sabemos que cada "burbuja de vacío" planar es proporcional a N_c^2, así que la contribución dominante proviene de los diagramas con el mayor número de burbujas posible, es decir, del diagrama totalmente disconexo:

$$N_c^n \langle G_1(x_1) \cdots G_n(x_n) \rangle = \underbrace{N_c^n \langle G_1(x_1) \rangle \cdots \langle G_n(x_n) \rangle}_{\propto N_c^{2n} \sim n \text{ burbujas de vacío}}$$

↑ de factor de normalización $\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^n$

$$+ \underbrace{N_c^n \langle G_1(x_1) G_2(x_2) \rangle_{\text{conexo}} \langle G_3(x_3) \rangle \cdots \langle G_n(x_n) \rangle}_{\propto N_c^{2(n-1)} \sim n-1 \text{ burbujas de vacío}}$$

$$+ \cdots + \underbrace{N_c^n \langle G_1(x_1) G_2(x_2) \cdots G_n(x_n) \rangle_{\text{conexo}}}_{\propto N_c^2 \sim 1 \text{ burbuja de vacío}} .$$

Este resultado se conoce como factorización para N_c grande. Aprendemos entonces que (SIN $\frac{N_c}{\lambda}$ enfrente)

$$\langle G_1(x_1)\cdots G_n(x_n)\rangle \simeq \langle G_1(x_1)\rangle\cdots\langle G_n(x_n)\rangle \propto N_c^n$$

y

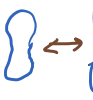
$$\langle G_1(x_1)\cdots G_n(x_n)\rangle_{conexo} \propto N_c^{2-n} .$$

El caso $n=2$ en particular nos dice que

$$\langle G(x_1)G(x_2)\rangle_{conexo} \propto N_c^0 \quad (\text{p.ej., } x_1 \text{ } x_2),$$

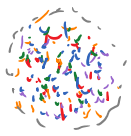
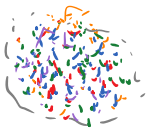
es decir, nuestros operadores están normalizados de modo tal que en el límite $N_c\to\infty$ tienen una amplitud finita de crear una glueball a partir del vacío. Esta normalización resulta conveniente, y con ella tenemos

$$\langle G_1(x_1)G_2(x_2)G_3(x_3)\rangle_{conexo} \propto \frac{1}{N_c},$$

justo como acerta cerrada:  $\propto g_c = 1/N_c$

$$\langle G_1(x_1)G_2(x_2)G_3(x_3)G_4(x_4)\rangle_{conexo} \propto \frac{1}{N_c^2}, \text{ etc.},$$

lo cual significa físicamente que las glueballs no interactúan entre sí en el límite $N_c\to\infty$, y cuando $N_c \gg 1$ están débilmente acopladas entre sí, con acoplamiento $1/N_c$. Es importante notar que esta notable simplificación del límite de N_c grande se presenta (o al menos, los diagramas sugieren que se

presenta) a pesar de que YM/QCD en sí mismo No esté débilmente acoplado (como vimos, la constante de acoplamiento es λ, que corre con la energía y se vuelve grande para $\mu \lesssim \Lambda_{QCD}$), y los gluones sí interactúan fuertemente para formar a una glubla. Es solo la interacción entre distintas glublas que se vuelve débil.
L6: 09/10/20

En otras palabras, aun cuando la teoría es interactuante, y p.ej. los operadores compuestos $G(x)$ tienen en general una "dimensión anómala" $\Delta - \Delta_0$ (← análisis dimensional) (es decir, una dependencia no obvia de la escala energética, μ), al orden más bajo en la expansión en $1/N_c$ los $G_i(x)$ se comportan como campos libres, y podemos reconocer limpiamente que

$G(x)$ ($\sim$ p.ej. $\mathrm{Tr}(F^2(x))$) $\longleftrightarrow$ crea 1 glubla

$G_1(x)G_2(x)$ ($\sim$ p.ej. $(\mathrm{Tr}(F^2(x)))^2$) $\longleftrightarrow$ crea 2 glublas, etc.

dimensión $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ tal como si $G(x)$ fuera $\varphi(x)$ de Klein-Gordon

Cuando N_c es grande pero finito, los operadores $G(x)$ se comportan como campos débilmente interactuantes,

y no crean ya por tanto únicamente estados de 1 glubla (el operador que crea exactamente a 1 glubla sería del tipo $G(x) + \frac{1}{N_c} G(x)G(x) + \dots$).

L6: 01/09/16

De manera similar, es fácil mostrar que los operadores de mesones, con la normalización

$$M(x) \equiv \sqrt{N_c}\,\bar\psi(x)\psi(x),\ \sqrt{N_c}\,\bar\psi(x) F_{\mu\nu}(x) D_\lambda \psi(x),\ \text{etc.},$$

↑ elegido para que $\langle M(x_1) M(x_2)\rangle_{\text{conexo}} \propto N_c^0$

tienen correladores que también se factorizan para N_c grande,

$$\langle M_1(x_1)\cdots M_n(x_n)\rangle = \underbrace{\langle M_1(x_1)\rangle \cdots \langle M_n(x_n)\rangle}_{\propto N_c^{n/2}}$$

$$+ \underbrace{\langle M_1(x_1) M_2(x_2)\rangle_{\text{conexo}} \langle M_3(x_3)\rangle \cdots \langle M_n(x_n)\rangle}_{N_c^{n/2-1}} + \dots,$$

$$\langle M_1(x_1)\cdots M_n(x_n)\rangle_{\text{conexo}} \propto N_c^{1-\frac{n}{2}}.$$

En otras palabras, los mesones también se vuelven libres para $N_c \to \infty$, e interactúan débilmente cuando $N_c \gg 1$, con acoplamiento $\frac{1}{\sqrt{N_c}}$. Justo como cuerda abierta: $\} \leftrightarrow \} \propto \sqrt{g_c} \sim \frac{1}{\sqrt{N_c}}$

Se puede mostrar además que

$$\langle G_1(x_1)\cdots G_n(x_n)\, M_1(y_1)\cdots M(y_m)\rangle_{\text{Gnexo}} \propto N_c^{1-n-\frac{m}{2}},$$

lo cual implica que los mesones también interactúan débilmente con las glublas.

A diferencia de las glublas y mesones, que son creados por operadores con un número finito de campos básicos, los bariones son por definición estados ligados de N_c quarks con índices de color totalmente antisimetrizados, creados por operadores como

$$B(x) \equiv \epsilon^{c_1 c_2 \cdots c_{N_c}} \psi_{c_1}(x)\,\psi_{c_2}(x)\cdots\psi_{c_{N_c}}(x)$$

singulete de glon

(que son $\begin{matrix}\text{fermiónicos}\\ \text{bosónicos}\end{matrix}$ para N_c $\begin{matrix}\text{impar}\\ \text{par}\end{matrix}$).

Esto implica que los bariones se vuelven infinitamente pesados en el límite $N_c \to \infty$, con energía $E \propto N_c$, y solo son visibles entonces como solitones construidos a partir de los campos mesónicos. Su energía es $E \propto (1/\sqrt{N_c})^{-2} \sim$ (acoplamiento entre mesones)$^{-2}$, usual para solitones.

- Para entender mejor el régimen de acoplamiento fuerte y la conexión con una teoría de cuerdas, nos convendrá cambiar a una prima teoría aún más lejana de QCD.

Mantendremos el grupo de norma $SU(N_c)$, y por tanto el campo gluónico $(A_\mu(x))_{c\bar{c}'}$, $c,\bar{c}' = 1,\dots,N_c$.

No incluiremos a los quarks $(\psi(x))_c$;

pero sí a algunos campos de materia inusual:

+ 6 campos escalares reales sin masa en la representación adjunta de $SU(N_c)$,

$$(\Phi^e(x))_{c\bar{c}'} = \Phi^e_I(x)\, t^I_{c\bar{c}'} \quad \text{con} \quad e = 1,2,\dots,6, \quad I = 1,\dots,N_c^2-1$$

$c,\bar{c}' = 1,\dots N_c$

(o, equivalentemente, 3 campos escalares complejos

$$X \equiv \Phi^1 + i\Phi^2, \quad Y \equiv \Phi^3 + i\Phi^4, \quad Z \equiv \Phi^5 + i\Phi^6)$$

+ 4 espinores de Weyl izquierdos sin masa en la representación adjunta de $SU(N_c)$,

$$(\psi^f(x))_{c\bar{c}'} = \psi^f_I(x)\, t^I_{c\bar{c}'} \quad \text{con} \quad f = 1,2,3,4.$$

LF: 21/02/24

martes, 13 de marzo de 2012 10:28 p.m.

Recordemos que un espinor de Dirac ψ en 3+1 dimensiones se puede descomponer en espinores de Weyl izquierdo (= con quiralidad negativa) y derecho (= con quiralidad positiva),

$$\psi = \psi_I + \psi_D$$

$$\psi_I \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)\psi \quad , \quad \psi_D \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)\psi \, ,$$

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \qquad (\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \, , \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

que transforman por separado bajo el grupo de Lorentz restringido (≡ rotaciones + empujones).

En la base de Weyl se tiene

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \sigma^\mu \equiv (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \\ \bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} ,$$

Notación de Van der Waerden

y por tanto

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \alpha = 1,2 \, .$$

Con estas definiciones, es fácil mostrar que $\psi_I^* = (\lambda_\alpha)^*$ transforma como $i\sigma^2 \psi_D = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \bar\chi^{\dot\beta}$

$\bar\lambda_{\dot\alpha}$ $\qquad \varepsilon^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(y en sentido inverso, $\psi_D^* = (\bar\chi^{\dot\alpha})^* \equiv \chi^\alpha$ transforma igual que $i\sigma^2 \psi_I \equiv \varepsilon^{\alpha\beta} \lambda_\beta$), así que podemos reescribir cualquier teoría puramente en términos de espinores de Weyl izquierdos, o puramente en términos de espinores derechos. Esto es lo que estamos haciendo en la prisa de QCD que nos interesa, donde nuestros 4 campos de Weyl izquierdos son equivalentes a 2 campos de Dirac.

Al tener 6 campos Φ^e con las mismas propiedades, es natural exigir que nuestra teoría sea invariante bajo transformaciones que los mezclen, $\Phi^e(x) \to R^{ee'} \Phi^{e'}(x)$, donde R es una matriz de rotación $\in SO(6)$. Similarmente, podemos exigir invariancia bajo rotaciones $SU(4)$ de los 4 campos fermiónicos entre sí, $\psi^f(x) \to R^{ff'} \psi^{f'}(x)$. Y aprovechando que (los 2 álgebras de Lie correspondientes a)

estos 2 grupos son isomorfos (as), $SO(6) \simeq SU(4)$ (relación similar a $SO(3) \simeq SU(2)$), podemos identificar las rotaciones de los Φ^e con las de los ψ^f, es decir, exigir que nuestra teoría tenga a (una sola copia de) $SO(6) \simeq SU(4)$ como simetría interna global, con Φ^e en la representación fundamental de $SO(6)$ ($\leftrightarrow$ antisimétrica $\Phi^{ff'}$ de $SU(4)$) y ψ^f en la rep espinorial de $SO(6)$ ($\leftrightarrow$ fundamental de $SU(4)$).

Para implementar la invariancia local $SU(N_c)$, usaremos como es habitual a la derivada cobriante $D_\mu \equiv \partial_\mu + i A_\mu$, donde es importante que A_μ sea una matriz en la rep. en la cual transforman nuestros campos de materia, la adjunta:

$$D_\mu \Phi^e \equiv \left(\delta_{JK}\partial_\mu + i t^I_{adj} A^I_\mu\right) \Phi^e_K t^J_{c\bar{c}'} = \partial_\mu \Phi^e + i \left[A_\mu, \Phi^e\right]$$

($\Phi^e_K t^K_{c\bar{c}'}$; $I,J,K = 1,\dots,N_c^2-1$; $A^I_\mu t^I_{c\bar{c}'}$)

p.41 $(t^I_{adj})_{JK} = i f^{JIK}$

p.40 $A^I_\mu \Phi^e_K i f^{IKJ} t^J_{c\bar{c}'}$

y lo mismo para los fermiones,

$$D_\mu \psi^f = \partial_\mu \psi^f + i [A_\mu, \psi^f].$$

Acoplaremos a los campos A_μ, Φ^e, ψ^f en vértices cúbicos y cuárticos elegidos en cierta forma para preservar las simetrías de interés, obteniendo la teoría conocida como

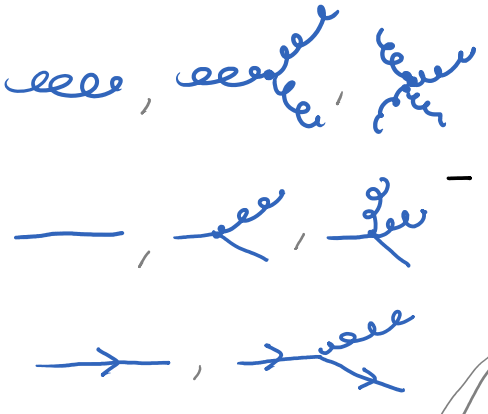
Yang-Mills con $\mathcal{N}=4$ supersimetrías (SYM $\mathcal{N}=4$)

ó Yang-Mills máximamente supersimétrica (MSYM):

normalizado SIN g_{YM} adentro — presente en YM y QCD

$$\mathcal{L}_{MSYM} = \mathrm{Tr}\left\{ -\frac{1}{2g_{YM}^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta_{YM}}{8\pi^2} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \right.$$

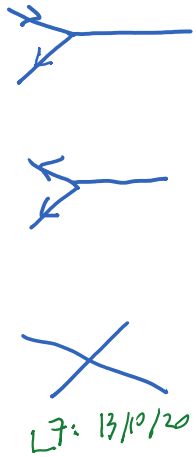
$$\tilde{\zeta} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$$



(conjugado complejo (notación Dirac))

$$- \sum_e D_\mu \bar{\Phi}^e D^\mu \Phi^e - \sum_f i\bar{\psi}^f \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi^f$$

Podríamos también reescalar $\Phi^e \to \Phi^e / g_{YM}$, $\psi^f \to \psi^f / g_{YM}$



$$+ \sum_{e,f,f'} g_{YM} C^e_{ff'} \psi^f [\Phi^e, \psi^{f'}]$$

$$+ \sum_{e,f,f'} g_{YM} \bar{C}^e_{ff'} \bar{\psi}^f [\bar{\Phi}^e, \bar{\psi}^{f'}]$$

$$\left. + \frac{g_{YM}^2}{2} \sum_{e,e'} [\bar{\Phi}^e, \Phi^{e'}]^2 \right\},$$

L7: 13/10/20

donde θ_{YM} es el ángulo teta (zeta) o de instantones (que multiplica una derivada total, pero es relevante en configuraciones topológicamente no triviales), y los $C^{e}_{ff'}$, $\bar{C}^{e}_{ff'}$ son coeficientes de Clebsch-Gordan, relacionados con las matrices de Dirac $\gamma^{e}_{ff'}$ para $SO(6) \simeq SU(4)$, necesarios para formar un escalar bajo esta simetría interna.

Es importante no dejar que el nombre esotérico de SYM $\mathcal{N}=4$ ó MSYM nos haga perder de vista el hecho de que se trata simplemente de una teoría de campos más (con ciertas propiedades especiales que nos serán útiles y resaltaremos en breve).

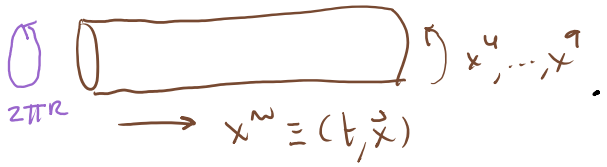
La manera más fácil/compacta de recordar su acción es notando que puede entenderse como un reescrito de super-Yang-Mills con supersimetría $\mathcal{N}=1$ (SYM $\mathcal{N}=1$) en 9+1 dimensiones

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g_{YM}^2} \mathrm{Tr}\left\{ F_{MN} F^{MN} - i\bar{\Psi}\Gamma^{M} D_{M}\Psi \right\},$$

(F_{MN}: gluón (campo de norma); Ψ: gluino (fermión); Tr: rep. adjunta)

$M, N = 0, 1, \cdots, 9$,

donde Γ^M son las matrices de Dirac en $q+1$ dim, Ψ es un espinor de Majorana-Weyl en $q+1$ dim (con $2^{D/2+1-1-1} = 16$ componentes reales), y debemos suponer que las direcciones $M = 4, 5, \cdots, q$ son circulares y muy pequeñas:



Esta "compactificación" nos lleva a la historia de Kaluza-Klein (KK). Pasan 2 cosas:

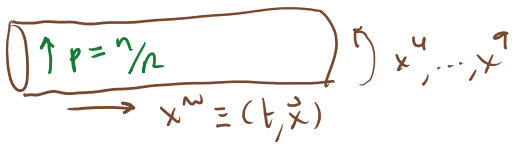
1) Cada campo no escalar bajo $SO(q,1)$ se descompone en varios campos bajo el grupo de Lorentz $SO(3,1)$, relevante para un observador que solo detecta las direcciones grandes x^μ. Concretamente, $A_M = (A_\mu, \Phi^e)$, y

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^1_\alpha \\ \psi^2_\alpha \\ \psi^3_\alpha \\ \psi^4_\alpha \end{pmatrix}$$

Φ^e: 6 campos escalares

$\psi^1_\alpha, \psi^2_\alpha, \psi^3_\alpha, \psi^4_\alpha$: 4 espinores de Weyl izquierdos ($\alpha = 1,2$).

2) Cada uno de los campos resultantes se descompone en una torre infinita de modos de KK, en este caso, modos de Fourier a lo largo de las dimensiones ocultas:



P.ej., $\Phi^e(x^\mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi^e_{(n)}(x^\mu) \exp[i p_n^{e'} x^{e'}]$ con $p_n^{e'} \equiv \frac{n_{e'}}{R}$,

cuyas masas en 3+1 son $m_n^2 \equiv -p_n p^n = -p_n p^n + \sum_{e'=1}^{6} \left(\frac{n_{e'}}{R}\right)^2$.

Para $R \to 0$, solo los modos que son constantes a lo largo de las dimensiones compactas ($p_{e'} = \frac{n_{e'}}{R} = 0$) tienen masas finitas y sobreviven, hecho conocido como reducción dimensional.

En particular, dado que

$$F_{MN} \equiv \partial_M A_N - \partial_N A_M + i[A_M, A_N]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{\mu e} = \partial_\mu \Phi_e - \partial_e A_\mu + i[A_\mu, \Phi_e] = D_\mu \Phi_e \\ F_{ee'} = \partial_e \Phi_{e'} - \partial_{e'} \Phi_e + i[\Phi_e, \Phi_{e'}], \end{cases}$$

tenemos

$$\mathrm{Tr}(F_{MN} F^{MN}) = \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + 2\,\mathrm{Tr}(F_{\mu e} F^{\mu e}) + \mathrm{Tr}(F_{ee'} F^{ee'}).$$

✓ $(D_\mu \Phi_e)^2$ ✓ $[\Phi_e, \Phi_{e'}]^2$ ✓

Los términos restantes también salen (y $C^e_{ff'} \leftrightarrow \Gamma^e$).

El término de energía potencial en MSYM,

$$-\sum_{e,e'} \mathrm{Tr}\left([\Phi_e, \Phi_{e'}][\Phi^e, \Phi^{e'}]\right),$$

implica que el estado de mínima energía debe satisfacer

$$[\Phi^e, \Phi^{e'}] = 0 \quad \forall \quad e, e' .$$

Estas condiciones tienen más de una solución, así que MSYM tiene más de 1 vacío:

- La opción más obvia es simplemente

$$\langle \Phi^e \rangle = 0 \quad \forall \quad e = 1, 2, \cdots, 6 .$$

Este vacío preserva todas las simetrías de la teoría, y se conoce como "vacío superconforme", por razones que entenderemos un poco más adelante.

- La posibilidad restante es una familia de vacíos con

$$\langle \Phi^e \rangle \neq 0 \quad \text{para al menos un valor de } e,$$

y evidentemente con los distintos Φ^e conmutando.

En este caso, la invariancia de norma se ve reducida (rota) por el mecanismo de Higgs. Esta familia de vacíos se conoce como la "rama de Coulomb" de la teoría.

La mayor parte del tiempo, cuando hablemos de "el vacío de MSYM" nos referiremos al que preserva las simetrías.

L7: 06/09/16

martes, 13 de marzo de 2012 10:29 p.m.

El "super" en el nombre de la teoría se debe por supuesto al hecho de que posee supersimetría, es decir, es invariante bajo transformaciones que mezclan entre sí a los campos bosónicos y fermiónicos.

En la presentación $(9+1)$-dimensional de la teoría, donde hay solo 2 campos $A_M(x)$ y $\Psi(x)$, la transformación en cuestión es simplemente

(es importante que $\Psi \in$ rep. adjunta)

$$\delta A_M(x) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\jmath} \Gamma_M \Psi(x) \equiv \bar{\jmath} [Q, A_M(x)],$$

(Γ^{MN}, antisimetrizado)

$$\delta \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} F_{MN}(x) \Gamma^{MN} \jmath \equiv \{Q, \Psi(x)\} \jmath,$$

donde $\jmath$ (dseda), el parámetro infinitesimal constante de la transformación, es un espinor de Majorana-Weyl en $9+1$ dimensiones (que tiene entonces 16 componentes reales).

En el segundo paso hemos definido un operador Q, también espinorial, que genera la transformación, y se conoce como la supercarga $\left(\phi(x) \to \exp(i\jmath Q)\phi(x)\exp(-i\jmath Q)\right)$.

La teoría se llama SYM $\mathcal{N}=1$ porque hay solo 1 supercarga (con 16 componentes independientes). En $9+1$ dimensiones no se puede tener supersimetría menor a esta.

LB: 26/12/24

(Esta es por cierto la misma teoría que figura en la acción efectiva a bajas energías de la teoría de cuerdas tipo I y heteróticas, salvo que el grupo de norma allí es distinto, $SO(32)$ ó $E_8 \times E_8$.)

Al descender a MSYM en 3+1 dimensiones, hemos dicho ya que cada espinor de Majorana-Weyl en 9+1 se descompone en 4 espinores de Weyl en 3+1, así que obtenemos **4 supercargas** Q^f_α $f=1,2,3,4$

$$Q \equiv \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \\ Q^4 \end{pmatrix}$$

en el nuevo lenguaje (manteniéndose por supuesto en 16 el número total de componentes independientes).

Esto explica el nombre de SYM $\mathcal{N}=4$. La designación de MSYM, "máximamente supersimétrica", se debe a que no es posible agregar más supercargas sin involucrar a la gravedad (lo cual requiere que la supersimetría sea una transformación local en vez de global, y da lugar a las teorías conocidas como supergravedad).

En lenguaje (3+1)-dimensional, la supersimetría opera de la siguiente forma:

parámetro espinorial

$$\delta\Phi^e(x) = \bar{\epsilon}^f C^e_{ff'} \psi^{f'}(x) \equiv \bar{\epsilon}^f [Q^f, \Phi^e(x)],$$

$\sim \gamma^e_{ff'}$

$$\delta\psi^f(x) = F^+_{\mu\nu}(x)\, \sigma^{\mu\nu} \epsilon^f + [\Phi^e(x), \Phi^{e'}(x)]\, i\sigma^2 C^{ee'}_{ff'} \epsilon^{f'}$$

$\equiv \frac{1}{2}[\sigma^\mu, \sigma^\nu]$

$\equiv \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu})$

$\sim (\gamma^e \gamma^{e'})_{ff'}$

$$\equiv \{Q^{f'}, \psi^f\} \epsilon^{f'},$$

$$\delta\bar{\psi}^f(x) = \bar{\epsilon}^{f'} C^e_{f'f} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \Phi^e(x) \equiv \bar{\epsilon}^{f'} \{Q^{f'}, \bar{\psi}^f\},$$

$$\delta A_\mu(x) = \epsilon^f \sigma_\mu \bar{\psi}^f(x) \equiv \epsilon^f [Q^f, A_\mu(x)].$$

Notamos aquí que todos los campos de la teoría están emparentados entre sí a través de la supersimetría, es decir, forman un solo "multiplete", conocido naturalmente como el multiplete vectorial $\mathcal{N}=4$. Es por esto que Φ^e y ψ^f deben ser campos adjuntos y sin masa.

Las teorías supersimétricas con posible relevancia para fenomenología más allá del Modelo Estándar (del tipo que se busca en el LHC) tienen solo $\mathcal{N}=1$ en

3+1 dimensiones, es decir, una sola supercarga Q (que es un espinor de Weyl, con 4 componentes independientes). En ese caso, cada campo está emparentado con otro cuyo espín difiere por $1/2$, que llamamos su **superpareja**.

En teorías con supersimetría "extendida", $\mathcal{N}>1$, hay más supercargas y por tanto más de una manera de "rotar" a una nueva superpareja. Es por esta razón que los multipletes son más grandes. El contenido de MSYM puede describirse alternativamente como

(considerando solo una de las Q^f)

1 multiplete vectorial $\mathcal{N}=4$ (A_μ, ψ^f, Φ^e) $=$ 1 multiplete vectorial $\mathcal{N}=1$ (A_μ, ψ^1) + 3 multipletes "quirales" $\mathcal{N}=1$ sin masa (Φ^1, Φ^2, ψ^2), (Φ^3, Φ^4, ψ^3), (Φ^5, Φ^6, ψ^4)

$=$ 1 multiplete vectorial $\mathcal{N}=2$
$(A_\mu, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2)$
$+$ 1 "hipermultiplete" $\mathcal{N}=2$
$(\Phi^3, \Phi^4, \Phi^5, \Phi^6, \psi^3, \psi^4)$.

Las teorías con $\mathcal{N}\geq 2$ NO son buenos candidatos para fenomenología más allá del Modelo Estándar, porque no son quirales, y el Modelo Estándar sí lo es. Pero debemos recordar que aquí NO estamos buscando al Modelo Estándar, sino una prima manejable de QCD.

8:15/10/20

En las reglas de Feynman para cualquier teoría, los lazos de fermiones van acompañados de un signo menos (porque los campos en cuestión satisfacen relaciones de anticonmutación). Dado que en las teorías supersimétricas se tiene una sincronización entre los campos fermiónicos y bosónicos y sus acoplamientos, podemos obtener cancelaciones de las contribuciones de lazo, y en particular, de las divergencias UV.

En el caso de MSYM, al calcular funciones de correlación de los campos básicos $A_\mu(x)$, $\Psi^f(x)$, $\Phi^e(x)$

miércoles, 14 de marzo de 2012 10:45 a.m.

¡¡No se encuentra divergencia UV alguna: la teoría es finita!! (Aunque para operadores compuestos sí se necesitan Z's).

hay divergencias UV que dan lugar a "dimensiones anómalas"

Por esta razón, el proceso de renormalización NO introduce dependencia de escala alguna, y se tiene

$$\beta(g_{YM}) \equiv \mu \frac{dg_{YM}}{d\mu} = -\frac{g_{YM}^3}{4\pi^2}\left(\frac{11}{12}N_c - \frac{1}{6}n_f N_c - \frac{1}{24}n_e N_c\right)$$

n_f: # de espinores de Weyl en rep. adjunta: 4

n_e: # de escalares reales: 6

$$= -\frac{g_{YM}^3}{4\pi^2}N_c\left(\frac{11}{12} - \frac{8}{12} - \frac{3}{12}\right) = 0, \quad \text{cierto}$$

a todo orden en la expansión perturbativa, e incluso a nivel no perturbativo. La constante de acoplamiento g_{YM} NO corre con la energía (aquí que no existe un análogo de Λ_{QCD}), ¡¡y la teoría es invariante bajo reescalamientos incluso a nivel cuántico!!

Cualquier teoría de campos relativista tiene como simetría al grupo de Poincaré = Lorentz $SO(3,1)$ + Traslaciones, con
$(x^\mu \to \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu)$ $(x^\mu \to x^\mu + a^\mu)$

generadores $J_{\mu\nu}$ (3 rotaciones y 3 empujones) y P_μ (4 translaciones) que satisfacen

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\rho}] = -i(\eta_{\mu\lambda} J_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} J_{\mu\rho})$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = -i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu)$$ ($\Leftrightarrow$ P_μ transforma como vector bajo Lorentz)

y cuyo efecto sobre los operadores (básicos o compuestos) es

$$[P_\mu, \mathcal{O}(x)] = i\partial_\mu \mathcal{O}(x),$$ (traslada x)

$$[J_{\mu\nu}, \mathcal{O}(x)] = [i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + M_{\mu\nu}]\mathcal{O}(x)$$ (M: matriz en alguna rep. de Lorentz (actúa sobre índices espaciotemporales de $\mathcal{O}$); $x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu$: rota x)

Si los **reescalamientos** o **dilataciones** $x^\mu \to s x^\mu$ ($s \in \mathbb{R}^+$) son también una simetría, tenemos un generador D para estas transformaciones, tal que

$$[D, P_\mu] = -iP_\mu, \quad [D, J_{\mu\nu}] = 0,$$ (P tiene dimensión 1; J tiene dimensión 0)

y conviene trabajar con una base de operadores que tengan un eigenvalor definido Δ bajo D, conocido como su **dimensión de escalamiento**,

miércoles, 14 de marzo de 2012 10:45 a.m.

$$[D, \mathcal{O}(x)] = i(-\Delta + x^\mu \partial_\mu)\mathcal{O}(x) \,,$$

(rescala a x)

lo cual equivale a decir que bajo $x^\mu \to s x^\mu$ se tiene

$$\mathcal{O}(x) \to \mathcal{O}'(x) = s^\Delta \mathcal{O}(sx) \,.$$

Las teorías relativistas invariantes bajo dilataciones normalmente son invariantes también (ver p.ej. 1302.0884) bajo las llamadas transformaciones conformes especiales

$$x^\mu \to \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b_\nu x^\nu + b^2 x^2} \,,$$

← caracterizadas por un parámetro vectorial b^μ

cuyos 4 generadores K_μ satisfacen

$$[K_\mu, K_\nu] = 0$$

$$[J_{\mu\nu}, K_\lambda] = -i(\eta_{\mu\lambda} K_\nu - \eta_{\nu\lambda} K_\mu)$$

($\leftrightarrow$ K_μ transforma como vector bajo Lorentz)

$$[P_\mu, K_\nu] = 2i J_{\mu\nu} - 2i \eta_{\mu\nu} D$$

$$[D, K_\mu] = i K_\mu \,.$$

↑ K tiene dimensión -1

Como podemos ver, las relaciones de conmutación de los 15 generadores $(P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu)$ cierran entre sí,

y forman lo que se conoce como el álgebra conforme, que codifica la tabla de multiplicación del llamado grupo conforme.

Definiendo

$$J_{\mu\nu} \equiv J_{\mu\nu}\,, \quad J_{\mu 4} \equiv \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu)\,,$$

$$J_{4-1} \equiv D\,, \quad J_{\mu -1} = \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu)\,,$$

es fácil verificar que los J_{MN} (con $M,N = -1,0,1,2,3,4$) satisfacen relaciones de conmutación idénticas a las de los $J_{\mu\nu}$ pero con $\eta_{\mu\nu} \to \eta_{MN} = \text{diag}(-1,-1,1,1,1,1)$.

En otras palabras, el grupo conforme en 3+1 dim es isomorfo al grupo $SO(4,2)$ (o, si la teoría contiene fermiones, al grupo $Espin(4,2) = SU(2,2)$). Si hacemos una rotación de Wick para pasar a 4 dimensiones euclideanas, el grupo de Lorentz se convierte en $SO(4)$, y el grupo conforme en $SO(5,1)$. De manera similar, para una teoría definida en $(d-1)+1$ dimensiones, el grupo de Lorentz es $SO(d-1,1)$ y el conforme $SO(d,2)$ (en versión euclideana, $SO(d)$ y $SO(d+1,1)$, respectivamente).

Las teorías cuánticas de campos invariantes bajo el grupo conforme se llaman **teorías de campos conformes** o **teorías conformes**, que se abrevia CFT por las siglas en inglés. MSYM es un ejemplo (interactuante), pero existen otros (con diversas cantidades de supersimetría y en diferentes números de dimensiones). Como vimos en las pp. 7-10, las CFTs son muy importantes porque gobiernan el comportamiento a **ultra-altas energías** de las teorías de campo que están bien definidas (a través de un punto fijo UV del grupo de renormalización), y también, en algunos casos, su comportamiento a **ultra-bajas energías** (a través de un punto fijo IR). QCD es un ejemplo de lo primero, y algunos sistemas de materia condensada, de lo segundo. **Las teorías de campo genéricas pueden entenderse como deformaciones de una CFT.**

Conviene tener una definición más conceptual e intuitiva de las transformaciones conformes. Para ello, supongamos que nuestra teoría de campos está definida sobre un espacio con métrica $g_{\mu\nu}(x)$. Definimos una **transformación de Weyl**

como un reescalamiento local de la métrica,

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\, g_{\mu\nu}(x)$$

← Aquí las distancias propias SÍ cambian

(sin que las coordenadas cambien). Recordando que bajo una reparametrización $x \to x'(x)$ la métrica cambia

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\, g_{\lambda\rho}(x) ,$$

definimos una reparametrización (o isometría) conforme como aquella bajo la cual

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'(x') = \omega^2(x)\, g_{\mu\nu}(x) .$$

← Aquí las distancias propias NO cambian

En este caso, el cambio en la métrica claramente se puede cancelar con una transformación de Weyl con $\Omega(x) = \omega^{-1}(x)$, y el efecto neto es precisamente lo que llamamos una **transformación conforme**:

$$\text{Transformación Conforme} \equiv \underset{\Omega(x)=\omega^{-1}(x)}{\text{Weyl}} \circ \underset{\omega(x)}{\text{Reparametrización Conforme}} .$$

$$x \to x'(x)$$
$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x)$$

L 8:00/6/16 (-15min)

Estas transformaciones se llaman conformes porque a pesar de que sí cambian las distancias propias, lo hacen solo por un reescalamiento local, de modo que No modifican los ángulos (generalizados) entre los vectores, $\cos(\sphericalangle(V,W)) = \frac{V\cdot W}{\sqrt{V\cdot V}\sqrt{W\cdot W}}$, preservando las formas.

Muchas personas (en especial los relativistas) llaman "transformaciones conformes" a las transformaciones que aquí hemos llamado "de Weyl". Si la teoría es invariante bajo reparametrizaciones arbitrarias, ambos conceptos van muy de la mano.

En el caso de mayor interés para nosotros, donde la teoría de campos vive en un espacio plano, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, es obvio que son conformes todas las transformaciones de Poincaré (porque son isometrías, $\omega(x)=1$), y las dilataciones $x^\mu \to x'^\mu = s x^\mu$ (con $\omega(x) = 1/s$). Es fácil comprobar que las transformaciones conformes especiales,

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2 b_\nu x^\nu + b^2 x^2},$$

también merecen el adjetivo de conformes, con

$\omega(x) = 1 + 2b\cdot x + b^2 x^2$.

Trabajando a nivel infinitesimal, $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$, sabemos que el cambio en la métrica sería

$$\delta_\epsilon g_{\mu\nu}(x) = \underbrace{\nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu}_{\text{en general}} = \underbrace{(\omega^2(x)-1) g_{\mu\nu}(x)}_{\text{para reparametrización conforme}}$$

contrayendo ambos lados con $g^{\mu\nu}$:

$$2\nabla_\rho \epsilon^\rho = (\omega^2(x)-1)\, d$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \nabla_\rho \epsilon^\rho g_{\mu\nu}}$$ Ec. de Killing conforme

así que en el fondo plano, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, las transformaciones conformes infinitesimales están parametrizadas por $\epsilon^\mu(x)$ que satisfacen

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \epsilon^\rho .$$

Para $d=2$ existen (a este nivel infinitesimal) infinitas soluciones, pero cuando $d>2$ las soluciones son a lo más cuadráticas en x, y se agotan con las versiones infinitesimales de las transformaciones finitas que ya hemos descrito:

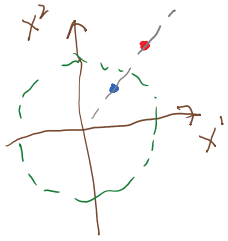
$$\epsilon^\mu = a^\mu \quad (\text{cte.}) \qquad \text{Translaciones}$$

$$\epsilon^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \text{ cte.}) \qquad \text{Lorentz}$$

$$\epsilon^\mu = \delta s\, x^\mu \quad (\delta s \text{ cte.}) \qquad \text{Dilataciones}$$

$$\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2b\cdot x\, x^\mu \quad (b \text{ cte.}) \qquad \text{Especiales}$$

Estas son entonces todas las transformaciones conformes conectadas con la identidad. Pero una novedad es que también es conforme la inversión



$$I : x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} \quad (\text{con } \omega(x) = x^2),$$

que es una transformación discreta (tal que $I^2 = 1$), claramente NO conectada con la identidad, y no contenida por tanto en $SO(d,2)$. (Análogamente, podemos recordar que el grupo de Lorentz completo en 3+1 incluye a la paridad P e inversión temporal T además de la componente restringida $SO^+(3,1)$.)

El grupo conforme es de hecho el grupo más pequeño que incluye a Poincaré y la inversión.

9:28 (02/24)

Podemos notar que tanto la inversión como las transformaciones conformes especiales mapean a algunos puntos al infinito, así que en sentido estricto, la acción del grupo conforme está bien definida no sobre Minkowski, sino sobre Minkowski + puntos en infinito. Con esto concluimos por ahora nuestra presentación de las teorías conformes, pero tendremos más que decir en el capítulo 2.

9: 20/10/20

Además de que MSYM es invariante bajo Poincaré $\subset$ Conforme, sabemos ya que es invariante bajo transformaciones generadas por las 4 supercargas Q^f ($f=1,2,3,4$ ← rep fundam. de $SU(4)$) (y sus conjugados complejos $\bar{Q}_f$ ← rep antifundamental). Estos generadores fermiónicos son espinores de Weyl que por definición satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{Q^f_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta f'}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu \delta^f_{f'} \quad (\text{"}Q\text{'s} \sim \sqrt{P}\text{"})$$

$$\{Q^f_\alpha, Q^{f'}_\beta\} = 0 \quad (\leftrightarrow \{\bar{Q}_{\dot\alpha f}, \bar{Q}_{\dot\beta f'}\} = 0)$$

$$[P^\mu, Q^f_\alpha] = 0 \quad (\leftrightarrow [P^\mu, \bar{Q}_{\dot\alpha f}] = 0)$$

[ver p.ej. Bailin & Love, Wess & Bagger, Terning o Sohnius ← Physics Reports]

← bloque 2x2 de $\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ en base de Weyl

$$[J^{\mu\nu}, Q^f_\alpha] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q^f_\beta$$

$\equiv \frac{1}{4}(\sigma^\nu \bar\sigma^\mu - \sigma^\mu \bar\sigma^\nu)$

(es decir, cada Q^f transforma como espinor izquierdo)

$\sigma^\mu \equiv (\mathbb{1}, \vec\sigma)$
$\bar\sigma^\mu \equiv (\mathbb{1}, -\vec\sigma)$

$\left(\leftrightarrow [J^{\mu\nu}, \bar Q_{\dot\alpha f}] = (\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \bar Q_{\dot\beta f}\right)$.

Las relaciones de (anti) conmutación entre los generadores bosónicos o "pares" $P_\mu, J_{\mu\nu}$ y fermiónicos o "impares" $Q^f, \bar Q_f$ claramente cierran, y tenemos entonces una **superálgebra** (conjunto de generadores bosónicos/fermiónicos pares/impares —álgebra "graduada"— que satisfacen [par, par] = par, [par, impar] = impar, {impar, impar} = par), que llamamos **super-Poincaré**.

Al reincorporar a D y K_μ al análisis, para cerrar el álgebra se requieren nuevos generadores fermiónicos $S_{\alpha f}$ y $\bar S^f_{\dot\alpha}$ (índices espinoriales especifican $[J_{\mu\nu}, \cdot]$) conocidos como **supercargas conformes**. Y figurarán los generadores bosónicos R_A $(A = 1, 2, \ldots, 15)$ en el álgebra de $SU(4) \simeq SO(6)$, que antes habíamos identificado como simetría global interna de la teoría. Estos generadores rotan a los Q^f_α entre sí (porque rotan a los ψ^f), y se conocen como **cargas R**. (En teorías $\mathcal{N}=1$, la simetría R es solo el $U(1)$ que rota la fase de Q.)

Los (anti)conmutadores no nulos son: (Q tiene dimensión 1/2)

$$[D, Q^f_\alpha] = -\frac{i}{2} Q^f_\alpha \quad \left(\leftrightarrow [D, \bar{Q}_{\dot\alpha f}] = -\frac{i}{2}\bar{Q}_{\dot\alpha f}\right)$$

$$[K^\mu, Q^f_\alpha] = (\sigma^\mu)_\alpha{}^{\dot\beta}\, \bar{S}^f_{\dot\beta} \quad \left(\leftrightarrow [K^\mu, \bar{Q}_{\dot\alpha f}] = (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot\alpha}{}^{\beta} S_{\beta f}\right)$$

(S tiene dimensión −1/2)

$$[D, S_{\alpha f}] = +\frac{i}{2} S_{\alpha f} \quad \left(\leftrightarrow [D, \bar{S}^f_{\dot\alpha}] = +\frac{i}{2}\bar{S}^f_{\dot\alpha}\right)$$

$$\{S_{\alpha f}, \bar{S}^{f'}_{\dot\beta}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} K_\mu \delta^f_{f'} \quad \text{(análogo a } \{Q, \bar{Q}\} \sim \sigma\cdot P\text{)}$$

$$[P^\mu, S_{\alpha f}] = -(\sigma^\mu)_\alpha{}^{\dot\beta}\bar{Q}_{\dot\beta f} \quad \left(\leftrightarrow [P^\mu, \bar{S}^f_{\dot\alpha}] = -(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot\alpha}{}^{\beta} Q^f_\beta\right)$$

$$\{S_{\alpha f}, S_{\beta f'}\} = 0 = \{Q^f_\alpha, \bar{S}^{f'}_{\dot\beta}\} \quad \left(\leftrightarrow \{\bar{Q}_{\dot\alpha f}, S_{\beta f'}\} = 0\right)$$

$$\{Q^f_\alpha, S_{\beta f'}\} = \varepsilon_{\alpha\beta}\left(\delta^f_{f'} D + \sum_A R_A{}^f{}_{f'}\right) + \frac{1}{2}\delta^f_{f'} J_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$$

$$[R_A, R_B] = i f_{ABC} R_C$$

(constantes de estructura de SU(4))

(SU(4) es simetría interna)

$$[R_A, P_\mu] = 0 = [R_A, J_{\mu\nu}] = [R_A, K_\mu] = [R_A, D]$$

$$[R_A, Q^f] = R^f_{Af'} Q^{f'} \quad \left(\leftrightarrow [R_A, \bar{Q}_f] = R^*_{Af}{}^{f'}\bar{Q}_{f'}\right)$$

(rep fundamental de SU(4))

$$[R_A, \bar{S}^f] = R^f_{Af'}\bar{S}^{f'}, \quad \left(\leftrightarrow [R_A, S_f] = R^*_{Af}{}^{f'} S_{f'}\right)$$

Esta estructura se conoce como el **álgebra superconforme** $\mathcal{N}=4$ en 3+1 dimensiones. Veremos que tiene como subálgebras bosónicas a $SO(4,2) \simeq SU(2,2)$ y a

$SU(4)_R \simeq SO(6)_R$, que conmutan entre sí. La lista completa de relaciones de (anti)conmutación se acomoda en el patrón

multiplicar como matriz para saber (anti)conmutadores

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{par} & \text{impar} \\ \hline \text{impar} & \text{par} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P_\mu\ K_\mu\ J_{\mu\nu}\ D & Q^f_\alpha\ \bar{S}^f_{\dot\alpha} \\ \hline \bar{Q}_{\dot\alpha f}\ S_{\alpha f} & R_A \end{array}\right),$$

y el supergrupo completo se denota $SU(2,2|4)$.

$SU(2,2) = SO(4,2)$; $4 \leftrightarrow \mathcal{N}$

El subgrupo $SU(4)_R \simeq SO(6)_R$ se conoce como simetría R, y como dijimos, se caracteriza por ser un grupo de simetría global interna que rota las supercargas (y supercargas conformes) entre sí. Su aparición no es casual. Sabemos que M5YM tiene secretamente su origen en SYM $\mathcal{N}=1$ en 9+1 dim, y al hacer la reducción dimensional a 3+1 dim el grupo de Lorentz se descompone de acuerdo con

$$SO(9,1) \longrightarrow SO(3,1) \times SO(6).$$

$SO(6) \simeq$ Espín(6)

Dado que solo retenemos los modos de Kaluza-Klein que no varían en las direcciones ocultas, el $SO(6)$ que

representa la simetría bajo rotaciones en esas direcciones se convierte en una simetría interna global de la teoría en 3+1 dim.

MSYM tiene otra propiedad muy especial. Para presentarla, conviene notar primero que los 2 acoplamientos g^2_{YM} y θ_{YM} de la teoría pueden agruparse en 1 solo acoplamiento complejo

$$\tau = \frac{\theta_{YM}}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2_{YM}},$$

de tal forma que

$$\mathrm{Tr}\left\{ -\frac{1}{2g^2_{YM}} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta_{YM}}{16\pi^2} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \right\}$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{Im}\left[\tau\, \mathrm{Tr}\left\{ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \right\} \right].$$

Ahora, tomando un vacío no conforme de MSYM (en la "rama de Coulomb") con $\langle \Phi^e \rangle = \mathrm{diag}(v^e_1, v^e_2, \ldots, v^e_{N_c}) \neq 0$ podemos romper espontáneamente

$v^e_{N_c}$ ctes.

$$SU(N_c) \longrightarrow \underbrace{U(1)\times U(1)\times \cdots \times U(1)}_{N_c - 1},$$

$N_c^2 - 1$ generadores

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & 0 \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{i\theta_{N_c}} \end{pmatrix}$$

obtenidos por el mecanismo de Higgs algunos estados (p.ej. gluones) con masa y cargas eléctricas $n_e^\ell = 0, \pm 1$ bajo el $U(1)$ número ℓ ($\ell = 1, \dots, N_c - 1$). Estos son análogos a $W^\pm$ en el Modelo Estándar. (n_e^ℓ en unidades de g_{YM})

Se pueden encontrar también solitones que portan carga magnética $n_m^\ell = 0, \pm 1$, conocidos como monopolos magnéticos (de 't Hooft-Polyakov), con un perfil de campos topológicamente no trivial (caracterizado por n_m^ℓ).

Por el argumento de discretización de carga de Dirac, el cuanto mínimo de carga magnética $\tilde{g}_{YM}$ está relacionado con el de carga eléctrica g_{YM} a través de

$$g_{YM}\,\tilde{g}_{YM} = 4\pi .$$

Los objetos que hemos mencionado arriba tienen entonces carga eléctrica

$$q_e^\ell = n_e^\ell\, g_{YM} - n_m^\ell\, g_{YM}\,\frac{\theta_{YM}}{2\pi}$$

y magnética

$$q_m^\ell = n_m^\ell\, \tilde{g}_{YM} = n_m^\ell\, \frac{4\pi}{g_{YM}} .$$

(← "efecto Witten": cuando $\theta_{YM} \neq 0$, los monopolos adquieren carga eléctrica)

Utilizando el álgebra de supersimetría, se puede mostrar que

la masa (energía en reposo) de cualquier estado en la teoría con cargas q^l_e, q^l_m satisface la cota BPS (Bogomol'nyi - Prasad - Sommerfield) [ver p.ej. Harvey 9603086, Di Vecchia 980326, ó www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/Lectures/EDC.pdf]

$$M \geq v\sqrt{q^l_e q^l_e + q^l_m q^l_m}$$

↑ valor esperado $\mathrm{Tr}\{\Phi^e \Phi^e\}_{x\to\infty} = v^2$

Todos los estados mencionados arriba de hecho saturan esta cota, es decir, tienen la mínima masa posible para las cargas dadas. Este tipo de estados son especiales (se puede mostrar que son aniquilados por algunas de las supercargas —es decir, son invariantes bajo las transformaciones correspondientes—, y viven por tanto en multipletes más cortos) y se conocen como estados BPS. Para nuestros propósitos aquí, la propiedad importante es que su masa está completamente determinada por sus cargas, y se calcula por tanto de manera exacta incluso en la región de acoplamiento fuerte.

L9: 13/09/16 (~10 min)

Es entonces muy interesante observar que la fórmula de masa para los estados BPS se puede reescribir en la

forma

$$M^2 = 4\pi v^2 \sum_{l=1}^{N_c-1} (n_e^l \; n_m^l) \frac{1}{\mathrm{Im}\,\tau} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{Re}\,\tau \\ -\mathrm{Re}\,\tau & |\tau|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_e^l \\ n_m^l \end{pmatrix},$$

y resulta ser invariante bajo las transformaciones $SL(2,\mathbb{Z})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \qquad ad-bc=1$$

que actúan de acuerdo con

$$\tau \to \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \qquad \begin{pmatrix} n_e^l \\ n_m^l \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_e^l \\ n_m^l \end{pmatrix}.$$

(solo tiene sentido para $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$)

Se cree que esta es una simetría de la teoría MSYM completa (no solo para los estados BPS), y se conoce como dualidad S (o de Montonen-Olive, o eléctrico-magnética).

El grupo $SL(2,\mathbb{Z})$ es generado por 2 transformaciones básicas: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\tau \to \tau+1$, que equivale a $\theta_{YM} \to \theta_{YM} + 2\pi$, y es una simetría porque θ_{YM} multiplica a la derivada total $\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})$, que para configuraciones topológicamente no triviales de $A_\mu(x)$ contribuye a la integral funcional un factor de $\exp(in\theta_{YM})$, con $n \in \mathbb{Z}$ (en el sector de n "instantones").

miércoles, 21 de marzo de 2012 10:50 a.m.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \tau = \frac{\theta_{YM}}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g_{YM}^2}$

- $\tau \to -\frac{1}{\tau}$, que cuando $\theta_{YM} = 0$ equivale a

$$g_{YM} \to \frac{4\pi}{g_{YM}} = \tilde{g}_{YM}$$

¡¡acoplamiento débil $\leftrightarrow$ fuerte!!

e intercambia $n_e^\ell \leftrightarrow n_m^\ell$, de modo que es una generalización de la dualidad eléctrico-magnética que se vislumbra en las ecuaciones de Maxwell. Esta transformación intercambia a los bosones W' (gluones masivos) con los monopolos magnéticos!

Con todo lo anterior, tenemos ya bastante información sobre las propiedades de MSYM. Recordando que llegamos a ella presentándola como una prima lejana de QCD, nos falta todavía preguntarnos hasta qué punto podría servirnos para aprender algo sobre la fuerza fuerte.

Si comparamos las propiedades de ambas teorías a temperatura $T=0$,

martes, 27 de marzo de 2012 08:06 p.m.

QCD en Minkowski^{3,1} vs. MSYM en Minkowski^{3,1}

- Asintóticamente libre
  $\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g^2_{YM} < 0$
  $\left(g^2_{YM}(\mu) \begin{matrix} \ll 1 \\ \gtrsim 1 \end{matrix} \text{ si } \begin{matrix} \mu \gg \Lambda_{QCD} \\ \mu \lesssim \Lambda_{QCD} \end{matrix} \right)$

- Conforme
  $\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g^2_{YM} = 0$
  $\left(g^2_{YM} = \text{cte. puede ser } \begin{matrix} \ll 1 \\ \sim 1 \\ \gg 1 \end{matrix} \right)$

- Confinada a bajas energías
- Contiene solo partículas masivas (hadrones con $m \sim \Lambda_{QCD}$)

- Desconfinada siempre
- No hay escala de masa
  $\nexists$ verdaderas partículas (= estados asintóticos)

- Con quarks (pesados/externos)
- Potencial quark-antiquark lineal
  $V(L) \simeq \sigma L$ para $L \gg \Lambda^{-1}_{QCD}$
- No supersimétrica
- Con simetría interna global
  $U_I(N_f) \times U_D(N_f) \to U(1)_{\text{barión}}$ (rompimiento de simetría quiral)
- Sin dualidad S
- Con grupo de norma $SU(N_c)$

- Sin quarks
- Potencial q-$\bar{q}$ de Coulomb
  $V(L) \propto \frac{1}{L}$ para toda L
- Máximamente supersimétrica
- Con simetría interna global
  $SU(4)_R \simeq SO(6)_R$
- Con dualidad S
- Con grupo de norma $SU(N_c)$

Veamos que son MUY diferentes (aunque definitivamente

L 10: 22/10/20

están emparentadas, y tienen en particular las mismas "amplitudes de dispersión" gluónicas a nivel árbol).

Pero la situación mejora sustancialmente si consideramos a ambas teorías con una temperatura finita $T > T_c \sim \Lambda_{QCD}$. En particular, se tiene entonces

QCD en Minkowski^{3,1} vs.	MSYM en Minkowski^{3,1}
• Aproximadamente conforme para un rango finito $T \gtrsim T_c$ pej. $E \propto T^4 V$ (retícula) ↖ p.59	• Simetría conforme rota solo por T. P.ej. $E \propto T^4 V$ (por análisis dimensional)
• Descanfinada	• Descanfinada
• Plasma no abeliano de gluones y quarks (QGP) – fuertemente acoplado para $T \gtrsim T_c$ (no para $T \gg T_c$)	• Plasma no abeliano de gluones y materia adjunta (AGP) – fuertemente acoplado si así lo decidimos (adjunta)
• Potencial apantallado por el plasma a distancias grandes	• Potencial apantallado por el plasma a distancias grandes
• No supersimétrica	• Supersimetría rota

martes, 27 de marzo de 2012 09:26 p.m.

(La supersimetría se rompe porque los ensambles térmicos de bosones y fermiones son distintos. Una manera de verlo es notar que la función de partición térmica

$$Z(\beta) \equiv Tr\left(e^{-\beta \hat{H}}\right) = \sum_{|est\acute{a}do\rangle} \langle est\acute{a}do | e^{-\frac{\hat{H}}{T}} | est\acute{a}do \rangle$$

se calcula en el formalismo de cuantización por integral de trayectoria tomando el tiempo euclídeo ($x^0_E \equiv -i x^0$) como un círculo de circunferencia β, $x^0_E \simeq x^0_E + \frac{1}{T}$, con

condiciones de frontera periódicas antiperiódicas para campos bosónicos fermiónicos.)

Aprendemos entonces que MSYM

* a temperatura cero nos sirve solo como laboratorio teórico (muy interesante en sí mismo: ¡MSYM resulta ser la teoría interactuante más sencilla! Ver p.ej. Arkani-Hamed et al. 0808.1446, Dixan 1310.5353, Bern et al. 1909.01358.)
* a temperatura finita nos sirve además como un modelo de juguete para el QGP del mundo real.

Como veremos, la dualidad holográfica afirma que podemos entender a MSYM en términos de una cierta teoría de cuerdas que vive en un cierto espaciotiempo

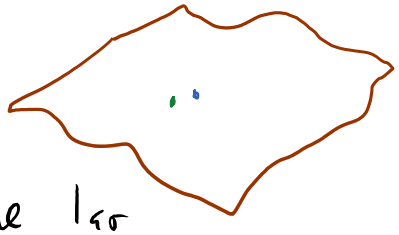
curvo. Adicionalmente, obtendremos acceso a otras otras teorías no abelianas, algunas de las cuales resultan ser primeros menos lejanos de QCD.

Antes de hablar de cuerdas, echemos un breve vistazo a la gravedad cuántica, tema que también sirve como antecedente y motivación para la correspondencia.

L10: 04/03/24

* GRAVEDAD CUÁNTICA

La relatividad general nos enseñó que la gravedad es una manifestación de la dinámica del propio espaciotiempo, codificada en la métrica $g_{\mu\nu}(x)$, que define las distancias/tiempos propios y la estructura causal.



Para entender a este sistema cuánticamente, un particulero/campista naturalmente intenta en primera instancia utilizar el enfoque que le funcionó para los otros campos: considerar pequeñas fluctuaciones del campo, y estudiar sus amplitudes de dispersión.

martes, 27 de marzo de 2012 11:04 p.m.

Claramente la métrica $g_{\mu\nu}(x)$ NO es solo un campo más, y en particular, a diferencia de lo que pasa con los otros campos, es difícil darle sentido a un estado cuántico donde su valor esperado sea $g_{\mu\nu}(x) = 0$.

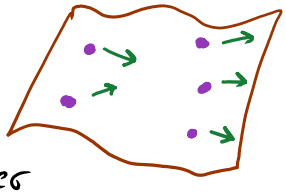
Pero lo que sí tiene sentido es separar

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + \sqrt{G_N}\, h_{\mu\nu}(x)$$

- $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$: valor de fondo (p.ej.: $\eta_{\mu\nu}$)
- $\sqrt{G_N}$: constante de Newton para que h esté normalizado canónicamente
- $h_{\mu\nu}(x)$: fluctuación que se cuantiza, dando lugar a partículas no masivas con espín 2

Gravitón: excitación mínima del espaciotiempo

Dispersión de gravitones: autointeracciones del espaciotiempo



En principio, debería ser posible estudiar este tipo de procesos experimentalmente, por lo que desde el punto de vista operativo, este parece un enfoque sensato para empezar a explorar a la gravedad a nivel cuántico.

Pero desde el punto de vista teórico, hay un problema:

la acción de la relatividad general (Einstein-Hilbert),

$$S_{E\text{-}H} = \frac{1}{16\pi G_N}\int d^D x \sqrt{-g}\, R \sim \int d^D x \left(\partial h \partial h + \sqrt{G_N}\, h \partial h \partial h + (\sqrt{G_N})^2 h h \partial h \partial h + \dots\right)$$

(donde a cada orden hay varios términos que difieren por la manera en que los índices están contraídos con $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$,) es una teoría perturbativamente No renormalizable.

Esto quiere decir que, al analizarla en una expansión perturbativa en potencias de la constante de acoplamiento $\sqrt{G_N}$ (que tiene dimensión $1-\frac{D}{2} < 0$ si $D>2$), el proceso de renormalización requiere que ajustemos un número infinito de coeficientes (utilizando un número infinito de datos experimentales) para poder eliminar todas las divergencias ultravioleta, si queremos el límite continuo $\Lambda \to \infty$. ↑ Corte UV

Ante esta dificultad, hay al menos 2 posibles reacciones:

- La culpa la tiene el método perturbativo, y hay que cuantizar entonces de manera no perturbativa. Este es el camino que siguen la Seguridad Asintótica (Asymptotic Safety, buscando un punto fijo UV fuertemente acoplado), y la Gravedad Cuántica por Lazos (Loop Quantum Gravity,

partiendo de reescribir $g_{\mu\nu}(x)$ en términos de una variable tipo $A_\mu(x)$, y utilizando una cuantización 'polimérica' que es altamente no estándar).

- La culpa la tiene la relatividad general, que debe entenderse entonces solo como una "teoría efectiva" (descripción aproximada) a bajas energías. Hace falta modificarla a distancias pequeñas de tal manera que sí pueda ser cuantizada perturbativamente. Este es el camino que sigue la Teoría de Cuerdas (sobre la cual abundaremos un poco más adelante), que, como se sabe, acaba aspirando también a unificar a la gravedad con las otras interacciones y con los ingredientes elementales de la materia.

(Estos son apenas los métodos más populares para intentar cuantizar la gravedad. Otros enfoques son la 'triangulación dinámica causal' (Ambjorn, Loll, ...), los 'conjuntos causales' (Sorkin, Dowker), la 'gravedad

de Hořava-Lifshitz' (Hořava; Germani, Kehagias, Sfetsos; etc.) la 'gravedad entrópica' (Verlinde), o la 'invariancia conforme local' ('t Hooft). Y por supuesto, bien podría ser que la descripción correcta no se nos haya ocurrido todavía...)

Hay 2 puntos que conviene resaltar aquí. Uno es que NO es obvio que cuantizar la gravedad signifique ni más ni menos que cuantizar a la relatividad general. El otro es que, si bien a bajas energías la gravedad se vuelve despreciable, y es por eso que el Modelo Estándar logra tener éxito a pesar de que no la incluye, NO es claro que en el mundo real exista algún límite en el cual las interacciones del Modelo Estándar se vuelvan despreciables con respecto a la gravedad, de modo que sea útil cuantizar a la gravedad por sí sola.

Con base en lo que hemos dicho hasta ahora, la cuantización de la gravedad parecería ser principalmente un problema técnico. Pero en realidad es también un problema conceptual bastante profundo, puesto que esencialmente equivale a preguntar ¡¡de qué están

hechos el espacio y el tiempo !! Esto va asociado a varias otras dificultades espinosas, como p.ej.

- En vista del problema de medición de la mecánica cuántica, ¿cómo se interpreta a la función de onda para el universo entero?
- ¿Cómo se trabaja con estados del tipo $|g^{(x)}_{\mu\nu}\rangle + |g'^{(x)}_{\mu\nu}\rangle$, donde la geometría del espaciotiempo es incierta?
- ¿Cuáles son las observables? Dado que ahora son los difeomorfismos (reparametrizaciones) los que juegan el papel de transformaciones de norma, las observables, para ser invariantes de norma, necesariamente tendrán que ser cantidades no locales (p.ej., el valor de cualquier campo en un punto, $\varphi(x)$, NO es invariante).
- La evolución temporal $t \to t + \delta t$ puede entenderse como un difeomorfismo. ¿Cómo puede entonces ser descrita como un proceso físico?

Otro gran problema es que la información experimental ¡¡pudiera quizás estar tacaca lejana como la escala de Planck tradicional, $\sim 10^{19}$ GeV $\sim 10^{15}$ LHC !! (Aún así, se

han buscado posibles efectos en fenómenos cosmológicos, en mediciones atómicas de alta precisión, etc. Esta industria se conoce como 'fenomenología de la gravedad cuántica', e incluye p.ej. búsquedas de posibles violaciones a Lorentz (Amelino-Camelia, Kostelecky, Urrutia, Bonder, etc.).)

Además de aclarecer los puntos conceptuales ya mencionados, a una teoría de gravedad cuántica, para ser merecedora de tal nombre, seguramente le pediríamos que:

- Sea una teoría cuántica, que se reduzca correctamente a la relatividad general a distancias grandes (en el límite semiclásico donde se recupere un espaciotiempo suave).
- Sea independiente del fondo, en el sentido de que no sea indispensable elegir un espaciotiempo dado antes de formular la teoría. En otras palabras, debe dar una descripción donde el espaciotiempo —ya sea fundamental o emergente— sea plenamente dinámico.

Para ser más precisos, podemos considerar por separado a distintas familias de espaciotiempos que difieren por sus condiciones de frontera (p.ej., asintóticamente planos, o anti-de Sitter, etc.), y como estas No son dinámicas, pudiera ser que la teoría solo describa a uno de estos 'sectores de superselección' a la vez.

- Nos permita calcular amplitudes de dispersión, que en ciertos apropiados (p.ej., asintóticamente planos) son observables válidos.
- Dé una explicación microscópica de las propiedades (teóricas, pero aparentemente confiables) de los agujeros negros.
- Resuelva las singularidades de la relatividad gral.
- Aclare el origen de la constante cosmológica.
- Acabe con la pobreza en el mundo.

(¡Notarán que cada quien agrega algunos criterios que son más bien preferencias personales!)

Es interesante profundizar un poco en las propiedades conocidas/esperadas de los agujeros negros.

En los 60s y 70s se encontró que el área del horizonte de eventos de un agujero negro, A_h, y la gravedad superficial K_s, que puede definirse para agujeros negros estacionarios y esencialmente representa la fuerza que debe ejercerse en infinito para mantener a una masa unidad en reposo justo en el horizonte del agujero negro (técnicamente, $K_s^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu k^\nu)(\nabla_\mu k_\nu)$, donde k^μ es el vector de Killing nulo asociado al horizonte), satisfacen las siguientes leyes de la mecánica de los agujeros negros:

- Ley Cero – la gravedad superficial K_s es constante en el horizonte de un agujero negro estacionario.
- Primera Ley – los cambios en masa M, área del horizonte, momento angular J y carga eléctrica Q del agujero negro estacionario más general (Kerr-Newmann $\leftrightarrow (M, Q, J)$ $\supset$ Reissner-Nordström $\leftrightarrow (M, Q) \supset$ Schwarzschild $\leftrightarrow M$) están relacionados entre sí a través de

$$dM = K_s \frac{dA_h}{8\pi} + \omega_h dJ + \Phi_e dQ ,$$

donde ω_h es la velocidad angular en el horizonte y Φ_e el potencial electrostático.

- Segunda Ley – el área del horizonte nunca decrece en procesos dinámicos (clásicos), $\Delta A_h \geq 0$.
- Tercera Ley – es imposible lograr que $K_s \to 0$ a través de un proceso físico.

Evidentemente, la numeración se ha elegido para resaltar el paralelo perfecto con las leyes familiares de la termodinámica:

- Ley Cero – la temperatura T es una constante en todos los puntos de un cuerpo en equilibrio térmico.
- Primera Ley – $dE = dC - dW$

$$= \underbrace{TdS}_{\text{calor}} - \underbrace{pdV + \omega dJ + \Phi_e dQ + \ldots}_{\text{trabajo}}$$

(S: entropía)

- Segunda Ley – La entropía nunca decrece en procesos dinámicos, $\Delta S \geq 0$.

- Tercera Ley — Es imposible alcanzar $T=0$ en un proceso físico ($\leftrightarrow$ cuando $T \to 0$ la entropía tiende a una constante, usualmente cero).

La transcripción entre estos 2 conjuntos de leyes identifica a E con M, lo cual tiene perfecto sentido físico, y requiere además que identifiquemos a $S = \frac{\alpha}{8\pi} A_h$ y $T = \frac{1}{\alpha} K_s$ como la entropía y temperatura del agujero negro, con α alguna constante de proporcionalidad.

La identificación $S \propto A_h$ fue argumentada por Bekenstein, quien, en base en experimentos pensados, propuso que la 2a. Ley de la termodinámica debía extenderse en presencia de agujeros negros a una Segunda Ley Generalizada de la Termodinámica,

$$\Delta S_{tot} \equiv \Delta S_{BH} + \Delta S_{ordinaria} \geq 0 .$$

(ΔS_{BH}: entropía de agujeros negros, $\propto A_h$)

Un obstáculo importante, por supuesto, es que clásicamente los agujeros negros son incapaces de emitir radiación, de

modo que resulta difícil creer que pudiera asignársele una temperatura verdaderamente física.

Pero a partir de un cálculo con teoría cuántica de campos libres en el fondo curvo del agujero negro, Hawking mostró que a nivel cuántico el agujero en verdad emite radiación térmica (que puede entenderse como asociada a un fenómeno de creación de pares y tunelaje en el horizonte), de tal modo que inequívocamente debe asignársele una

$$T_H = \left(\frac{\hbar}{k_B c^3}\right)\frac{K_S}{2\pi}$$

Temperatura de Hawking.

Esta a su vez fija el coeficiente de proporcionalidad en

$$S_{BH} = \left(\frac{k_B c^3}{\hbar}\right)\frac{A_h}{4G_N}$$

Entropía de Bekenstein-Hawking

(trabajaremos por supuesto con unidades donde $k_B = \hbar = c = 1$).

cte. de Boltzmann

Si bien estos resultados evidentemente no fueron deducidos utilizando una teoría cuántica de la gravedad, se cree que son confiables, porque solo requieren el uso

de teoría cuántica de campos en regiones del espacio-tiempo que no están altamente curvadas (esto incluye el horizonte si el agujero negro es grande).

El hecho de que los agujeros negros tengan una enorme entropía (p.ej., para un agujero negro de Schwarzschild con masa igual a la del sol, ¡ $S_{BH} \sim 10^{77} \sim 10^{20} S_{sol}$!), nos hace pensar que, a pesar de que clásicamente un agujero negro estacionario parece ser un estado único de la geometría (caracterizado en 3+1 dim por M, J, Q), cuánticamente debe existir una cantidad gigantesca de estados microscópicos ($N \sim e^{S_{BH}}$) compatibles con las propiedades macroscópicas dadas.

Desde los 70's se considera entonces como un reto muy importante para cualquier teoría que pretenda dar una descripción cuántica de la gravedad el poder reproducir S_{BH} (o su generalización a teorías de gravedad con más derivadas: entropía de Wald) a través de un conteo explícito en mecánica estadística cuántica.

Dicha teoría también debe poder explicar las otras propiedades del agujero negro, incluida la radiación de Hawking, que de hecho plantea un problema adicional.

En muchos casos, incluyendo el caso de Schwarzschild en un espaciotiempo asintóticamente plano, el agujero negro resulta tener un calor específico negativo, es decir, ¡se calienta al perder energía! Esto implica que No puede estar en equilibrio con un reservorio térmico, y de hecho emitirá cada vez más radiación, hasta perder toda su energía en un tiempo finito (aunque muy grande).

Esta evaporación de los agujeros negros conlleva naturalmente a la pregunta de dónde queda la información de la materia que originalmente formó el agujero negro. Esto se conoce como el problema (o paradoja) de la información.

El punto es que si la radiación emitida por el agujero es exactamente térmica, como indica el cálculo de Hawking, y el agujero negro desaparece por completo, entonces el estado puro de la materia inicial habría

evolucionado a un estado mezcla (descrito por la matriz de densidad térmica), violando la unitariedad de la mecánica cuántica. Existen varias actitudes ante este problema:

① Así es la vida — ¡tendremos que modificar a la mecánica cuántica!

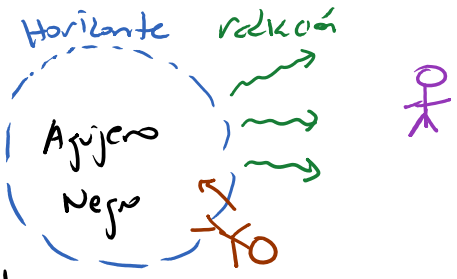
② El agujero negro deja un remanente microscópico, que codifica la información del estado inicial.

③ La radiación de Hawking no es exactamente térmica, y codifica el estado inicial, justo como cuando quemamos un libro.

La propuesta ② resulta muy problemática. (p.ej. Wald, Unruh, Susskind)

Muchos relativistas simpatizan con la opción ①. Hawking mismo apostó a favor de ①, pero después, en 2004, cambió de parecer (en parte por un artículo de Maldacena utilizando la correspondencia norma/gravedad) y pagó la apuesta.

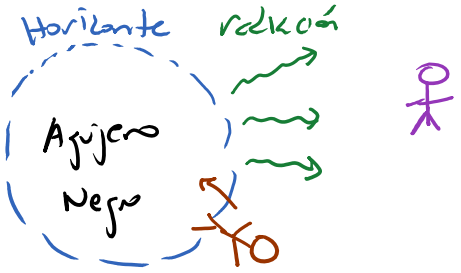
Los partículos y cuerdos naturalmente simplifican en (3), que resulta ser una opción menos conservadora de lo que parece. Implica una no localidad severa en la descripción del agujero negro [Ver Mathur, 0909.1038], y parece apuntar hacia el llamado principio de complementariedad para agujeros negros (propuesto por Susskind, Thorlacius y Uglum), que básicamente enfatiza que, para evitar contradicciones, es importante tener presente que un observador distante y uno que cae dentro del agujero negro describen a éste de 2 maneras muy distintas pero No objetables.



L 11:27/10/20

Apenas en 2012-2013, esto se volvió a cuestionar fuertemente a raíz de un trabajo de Almheiri, Marolf, Polchinski y Sully [arXiv:1207.3123]. Ellos argumentaron que la idea de que la radiación de Hawking transporta la información del agujero negro hacia el exterior es de hecho incompatible con la noción de que

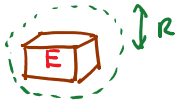
un observador en caída libre no siente nada especial en el horizonte. El problema proviene de que la primera condición requiere que los grados de libertad en el exterior inmediato del hoyo negro acaben estando muy entrelazados con la radiación, y la segunda, que estén altamente entrelazados con el interior; pero no se pueden tener ambas cosas a la vez: el entrelazamiento máximo es 'monógamo'. Esto se conoce como la "paradoja de la pared de fuego" (firewall) [Para mayores detalles, ver Harlow 1409.1231 y Polchinski 1609.04036.] En 2019 AdS/CFT condujo a avances importantes [ver Maldacena et al., 2006.06872].



← "islas" y "agujeros de gusano de réplica"

El hecho de que la entropía del agujero negro es proporcional al área del horizonte pudiera tener otra consecuencia muy radical e importante.

Considerando un sistema con energía E y radio R (para la menor esfera que pueda contenerlo) que se deja



caer gradualmente dentro de un agujero negro (a través del llamado "proceso de Geroch"), Bekenstein argumentó que, para no violar la 2da. ley Generalizada ($\Delta S_{TOT} \geq 0$, incluye ΔS_{BH}), se debe tener

$$S_{materia} \leq 2\pi ER$$ Cota de Bekenstein

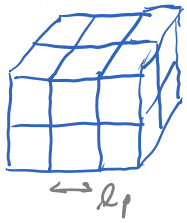
Se sabe que esta cota es válida bajo ciertas circunstancias, pero no en general (Casini demostró que es válida en QFT). Considerando un sistema de materia que, en lugar de ser arrojado dentro de un agujero negro preexistente, se colapsa para formar un agujero negro (a través de lo que algunos llaman el "proceso de Susskind"), Susskind argumentó que

$$S_{materia} \leq \frac{A}{4 G_N}$$ Cota de Entropía Esférica

donde A es el área de la esfera más pequeña que puede contener al sistema.

Lo que es sorprendente de esta cota es que escala con el área de la región, en lugar del resultado proporcional al volumen que obtendríamos, por localidad, en una

teoría de campos, incluso después de imponer un corte UV "gravitacional" a la escala de Planck, dividiendo el espacio en cubitos de lado $\sim l_p$ donde la máxima energía posible es $\sim l_p^{-1}$. El origen de esta discrepancia es que, mucho antes de poder excitar estados de energía l_p^{-1} en muchos "átomos de espacio" contiguos, el sistema habría colapsado para formar un agujero negro.



Basados en esta línea de razonamiento, en los 90's 't Hooft y Susskind propusieron como una propiedad fundamental de la gravedad cuántica el

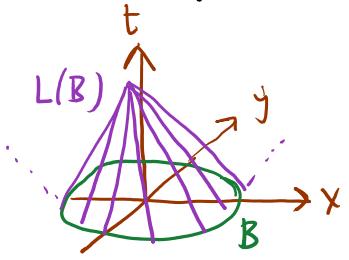
Principio holográfico: una región del espacio cuya frontera tiene área A puede ser descrita de manera exhaustiva por no más de $A/4G_N$ grados de libertad, es decir, por ~ 1 grado de libertad por área de Planck.

Esta propuesta no generó mucho interés, hasta que la correspondencia AdS/CFT mostró ser (como veremos) una encarnación concreta de ella.

Un problema de la cota de entropía esférica (y por tanto

de la versión del principio holográfico que está inspirada en ella) es que no es válida en todas las circunstancias (p.ej., en espaciotiempos cosmológicos).

En 1999, Bousso propuso una generalización covariante de la cota, que en lugar de considerar a un volumen V y al área de su frontera $B \equiv \partial V$, comienza directamente con una superficie B y construye su "hoja de luz" $L(B)$ —una hipersuperficie nula que se obtiene siguiendo rayos de luz que emanan ortogonalmente a B, siempre y cuando no se expandan— y afirma que la entropía contenida en $L(B)$ satisface necesariamente



$$S(L(B)) \leq \frac{A(B)}{4G_N}$$

Cota de Entropía Covariante o de Bousso

Esta cota NO puede deducirse a partir de las leyes de agujeros negros, pero se cumple para todos los sistemas físicos razonables (incluyendo espaciotiempos cosmológicos).

Conduce naturalmente a una versión modificada del principio holográfico:

Principio Holográfico Covariante: una teoría cuántica del espaciotiempo y la materia debe ser tal que el número de grados de libertad necesarios para describir a una hoja de luz $L(B)$ no excedan de $A(B)/4G_N$.

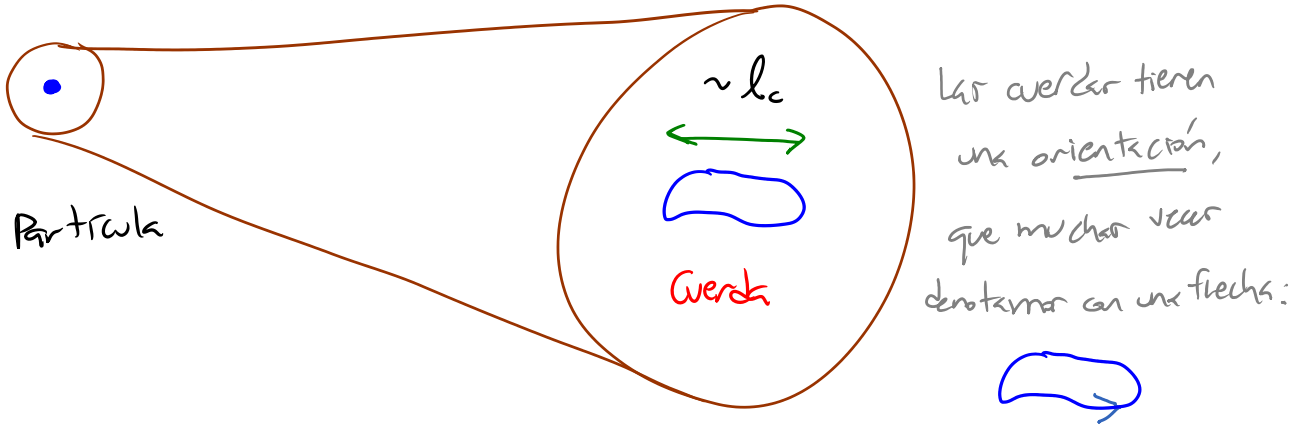
[Para más detalles, ver Bousso, hep-th/0203101]

1. Deducción de la Correspondencia

* BREVE REPASO DE CUERDAS Y D-BRANAS

La **Teoría de Cuerdas** es uno de los caminos más prometedores que tenemos para cuantizar la gravedad e incorporarla en un marco unificado con el Modelo Estándar. Su punto de partida es una idea que resulta sorprendentemente sencilla: postular que las excitaciones básicas no son partículas – objetos puntuales sin tamaño alguno –, sino **cuerdas**: objetos

extendidas en una dimensión, que podemos visualizar como 'ligas' infinitesimalmente delgadas, que tienen una cierta longitud característica ℓ_c ($\leftrightarrow$ tensión $\frac{1}{2\pi\ell_c^2}$)

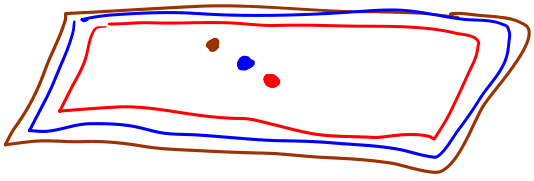


Semejante objeto podría, además de moverse como un todo, oscilar en un número infinito de maneras distintas (análogas a las distintas notas de una cuerda de violín). En una descripción cuántica, cada uno de estos modos de vibración resulta tener las propiedades básicas de un tipo específico de partícula (masa, espín, cargas). Así que, a partir de lo que en realidad es 1 solo tipo de cuerda, ¡obtenemos lo que parecen ser un número infinito de partículas!

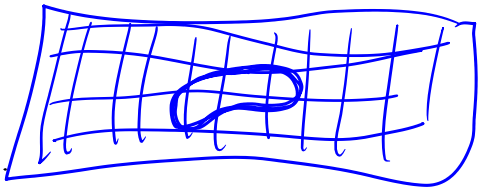
miércoles, 11 de abril de 2012 08:39 a.m.

Es importante resaltar que, así como entendemos que las partículas de cada tipo son pequeñas 'onditas' en una 'gelatina' determinada (el campo asociado), las cuerdas representan igualmente pequeñas fluctuaciones de una especie de 'gelatina' mucho más complicada, que es básicamente lo que llamamos el "campo de cuerdas".

En esencia, la propuesta de la teoría de cuerdas es entonces



reemplazar al espaciotiempo y a los campos del Modelo Estándar por un solo 'multicampo' ('multigelatina')

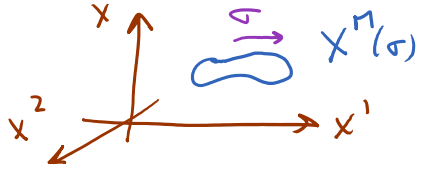


con excitaciones unidimensionales.

11:05/03/24

El primer dato que podemos obtener en una teoría de cuerdas, su espectro libre, nos informa entonces sobre las distintas maneras en que el campo de cuerdas $\Phi[X^M(\sigma)]$ puede vibrar.

$M = 0, 1, \ldots, D-1$



En teorías de cuerdas cerradas sobre un fondo plano, $\Phi[X^\mu(\sigma)] = \Phi_{\text{Minkowski}} + \Phi_{\text{fluct}}[X(\sigma)]$ se obtiene una torre infinita de estados con masas progresivamente más altas,

$$m^2 = \frac{4}{l_c^2}(N-a)$$

N denota nivel de excitación de la cuerda

$N = 0, 1, 2, 3, \ldots$

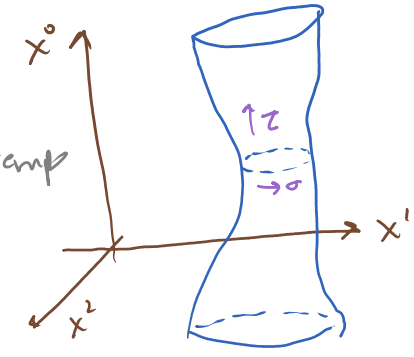
$a = \text{cte.}$ ← depende de la teoría

En la práctica, es más fácil obtener este resultado cuantizando no el campo de cuerdas ("segunda cuantización"), sino una cuerda directamente ("primera cuantización"). Al desplazarse en el espaciotiempo, una cuerda libre barre una superficie conocida como su hoja de mundo, que puede describirse como

$$X^\mu(\tau,\sigma) \qquad \mu = 0, 1, \ldots, D-1$$

← dim del espaciotiempo

con τ y σ 2 parámetros arbitrarios.



La acción natural para una cuerda relativista es (con $a,b = 0,1$ $\sigma^a = (\tau,\sigma)$)

$$S_{NG}[X] = -\text{Tensión} \times \text{Área} = -\frac{1}{2\pi l_c^2}\int d\tau\, d\sigma \sqrt{-\det\left(\eta_{MN}\,\partial_a X^M \partial_b X^N\right)}$$

← Nambu-Goto

$\eta_{MN}\,\partial_a X^M \partial_b X^N$: métrica inducida

cuyo tensor de energía-momento es $T_{ab} = 0$.

Eligiendo (τ,σ) tal que $\eta_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \propto \eta_{ab}$, S puede reescribirse

$$S_P[X] = -\frac{1}{4\pi l_c^2}\int d\tau\, d\sigma\, (-\partial_\tau X\cdot\partial_\tau X + \partial_\sigma X\cdot\partial_\sigma X),$$

← Polyakov

$\cdot$ ← contracción con $\eta_{\mu\nu}$

que formalmente puede reinterpretarse como !!! la acción de D campos escalares ($X^M(\tau,\sigma)$) libres no masivos en 1+1 dimensiones ((τ,σ)) !!!

Al cuantizar, tendremos entonces operadores a_n^M, $a_n^{M\dagger}$ (p_0 es discreto) y estados del tipo $a_{n_1}^{M_1\dagger}\cdots a_{n_L}^{M_L\dagger}|0;p^M\rangle$ ($X^M(\tau,\sigma) = x^M + p^M\tau + \cdots$)

Los estados físicos satisfacen $(T_{ab})_+|\text{fís}\rangle = 0 \Rightarrow m^2 = -p^2 = \frac{4}{\ell_c^2}(N-a)$.

Para modelos de unificación (más allá del Modelo Estándar), $10^4\,\text{GeV} < m_c \equiv \ell_c^{-1} \sim m_{\text{Planck}} < 10^{19}\,\text{GeV}$.

Para aplicaciones tipo QCD (origen histórico de la teoría de cuerdas), $m_c \equiv \ell_c^{-1} \sim \Lambda_{QCD} \lesssim 1\,\text{GeV}$.

En este curso nos interesará la teoría de cuerdas conocida como Tipo IIB, donde además de $X^M(\tau,\sigma)$ hay campos $\psi^M(\tau,\sigma)$ (espinores en 1+1 dim). Esta teoría vive en $D = 9+1$ y tiene espectro $m^2 = \frac{4N}{\ell_c^2}$. Los estados no masivos resultan ser idénticos a estados de partículas correspondientes a los siguientes campos:

- Bosones en "Sector NS-NS" (Neveu-Schwarz – Neveu-Schwarz)

$\varphi(x^M)$ Dilatón / Campo del dilatón
↳ 1 componente física

$h_{MN}(x^L)$ Gravitón / Métrica (señal de que el propio espaciotiempo es dinámico)
$M,N = 0,\ldots,9$
↳ 35 componentes físicas

↔ modos izquierdos y derechos de ψ^M pueden ser periódicos o antiperiódicos ⇒ 4 "sectores"

$B_{MN}(x^L)$ Antisimetrión / Campo de Kalb-Ramond (o de tensor antisimétrico)

↖ 28 componentes físicos

- Bosones en "sector R-R" (Ramond-Ramond)

$C(x^M)$ Axión o Escalar R-R / Campo del Axión

↖ 1 componente física

$C_{MN}(x^L)$ 2-forma R-R

↖ 28 componentes físicos

$C^+_{MNPR}(x^L)$ 4-forma "autodual" ← ver más abajo

↖ 35 componentes físicos

B_{MN}, C_{MN} y C^+_{MNPR} son campos de norma (potenciales) generalizados, cuyas intensidades de campo asociadas,

↖ generalización de A_M

$H_{MNP} \equiv \frac{1}{2!}\partial_{[M}B_{NP]}$ ← antisimetrización en los índices

generalización de $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$

$G_{MNP} \equiv \frac{1}{2!}\partial_{[M}C_{NP]}$,

$G^+_{MNPQR} \equiv \frac{1}{4!}\partial_{[M}C^+_{NPQR]}$,

son invariantes bajo las respectivas transformaciones de norma (que dejarán también invariante la acción de la teoría)

$$B_{MN} \to B_{MN} + \partial_{[M}\xi_{N)}\,, \qquad C_{MN} \to C_{MN} + \partial_{[M}\Lambda_{N]}\,,$$

$$C^{+}_{MNPQ} \to C^{+}_{MNPQ} + \partial_{[M}\Lambda_{NPQ]}\,.$$

(arbitrarios)

L12: 29/10/20

El superíndice "+" en C^{+}_{MNPQ} y G^{+}_{MNPQR} se refiere al hecho de que G^{+}_{MNPQR} es "autodual", es decir,

$$G^{+}_{MNPQR} = *\,G^{+}_{MNPQR}\,,$$

donde $*$ denota al dual de Hodge, (que antes habíamos denotado con tilde: $\tilde{F}_{MN} = \frac{1}{2}\epsilon_{MNPQ}F^{PQ}$)

$$*T_{M_1\cdots M_{D-n}} \equiv \frac{\sqrt{-g}}{n!}\,\epsilon_{M_1\cdots M_{D-n}}{}^{N_1\cdots N_n}\,T_{N_1\cdots N_n}$$

($D=10$; p.ej., si $g_{MN}=\eta_{MN}$, $*T_{0123} = T_{456789}$)

$\epsilon_{012\cdots D-1} = +1$ Levi-Civita

- Fermiones en "sector NS-R y R-NS"

λ^{1}_{s}, λ^{2}_{s} 2 Dilatinos (espinores de Majorana-Weyl con la misma quiralidad)

2×8 componentes físicos ← 16/2 por ec. de Dirac

↳ IIB es teoría quiral

χ^{1}_{Ms}, χ^{2}_{Ms} 2 Gravitinos (vector × espinor Maj.-Weyl con quiralidad opuesta a la de los dilatinos)

2×56 componentes físicos

L10: 20/09/16 (dejando gravedad cuántica para lectura en casa)

Tenemos entonces un total de

128 estados bosónicos + 128 estados fermiónicos = 256 estados

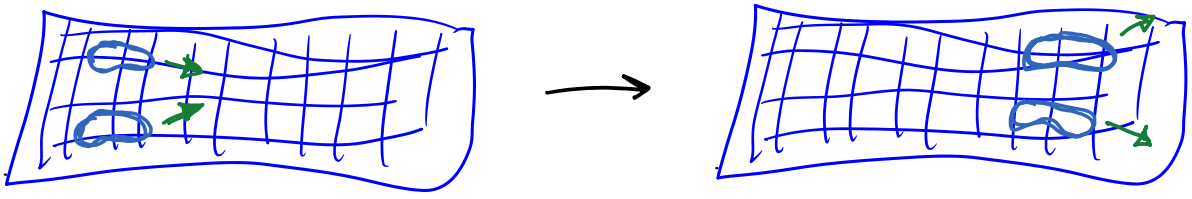
con $m^2 = 0$

(y 32,768 + 32,768 = 65,536 = 256^2 estados con $m^2 = 4/\ell_c^2$, etc.).

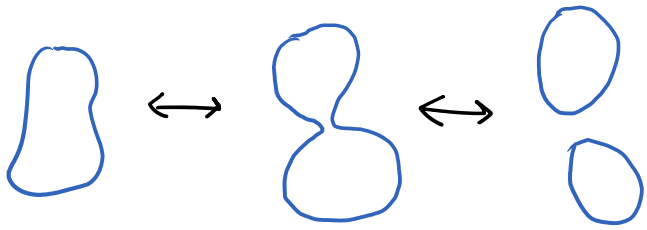
32 supersimetrías en total

Estos resultan estar todos emparentados entre sí a través de supersimetría $\mathcal{N} = 2$ (2 supercargas $Q_s^{1,2}$ Majorana-Weyl) en $D = 9+1$ dimensiones — de aquí el nombre de "tipo II". Se trata de SUSY local.

Una vez entendidas las maneras en que el reemplazo cuerdero del espaciotiempo puede fluctuar, podemos determinar la manera en que estas fluctuaciones interactúan entre sí:



La interacción básica es simplemente



Su amplitud de probabilidad está controlada por la constante de acoplamiento de cuerdas, g_c, que resulta estar relacionada con el valor de fondo del campo del dilatón a través de

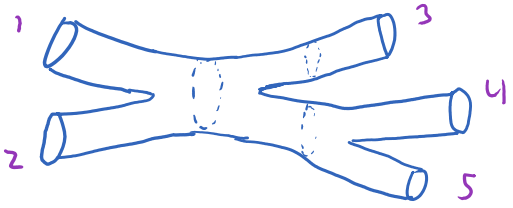
$$g_c = e^{\varphi}$$

¡curiosamente, la propensidad que tienen las cuerdas a partirse está determinada por el entorno!

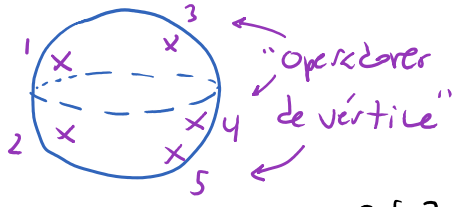
Dependiendo de la manera en que estén vibrando la(s) cuerda(s) inicial(es) / final(es), esta única interacción puede dar lugar a un acoplamiento entre 3 gravitones, o 2 gravitones y 1 dilatón, o 2 antisimetriones y 1 gravitón, o 2 gravitinos y 1 gravitón, etc. Y, en apariciones simultáneas de la misma interacción, se reproducen procesos de más de 3 patas, como 4 gravitones, 2 antisimetriones + 4 gravitones + 1 dilatón, etc.

Todas estas interacciones resultantes se pueden resumir en una acción que involucra a los infinitos campos de la

teoría de cuerdas. La forma de esta acción se puede deducir calculando amplitudes de dispersión de cuerdas. Se utilizan diagramas de Feynman generalizados, como p.ej.



Transf. conforme en 1+1 ⟷



↑ estados asintóticos →

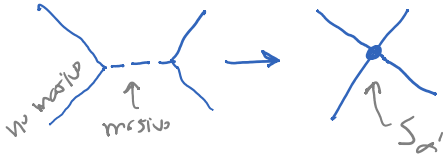
$$= \int_{S^2} \mathcal{D}X^{\mu}(\tau,\sigma)\, V_1(k_1)\cdots V_5(k_5)\, e^{-S_p[X]}.$$

(Alternativamente, se puede obtener la misma información exigiendo un fondo no trivial (p.ej., métrica no plana) de los campos en cuestión, y exigiendo que la invariancia de Weyl en la hoja de mundo de la cuerda se preserve incluso a nivel cuántico.)

Para bajas energías, $E \ll \ell_c^{-1}$, tiene sentido utilizar una acción efectiva que solo involucra a los campos no masivos:

$$S^{IIB}_{cuer,ef} = S^{IIB}_{SUGRA} + S_{\alpha'}$$

(solo 2das. derivadas; 3eras., 4tas., etc. derivadas)



donde el primer término, dominante a bajas energías, define la teoría de campos conocida como supergravedad (SUGRA) Tipo IIB en $D = 9+1$ dimensiones,

miércoles, 18 de abril de 2012 09:55 a.m.

$$S^{IIB}_{SUGRA} = \frac{1}{16\pi G_N}\int d^{10}x\sqrt{-g}\Big\{e^{-2\phi}\Big(R + 4\partial_M\phi\partial^M\phi - \frac{1}{12}H^{MNP}H_{MNP}\Big) - \frac{1}{2}\partial_M C\,\partial^M C - \frac{1}{12}G'^{MNP}G'_{MNP} - \frac{1}{480}G'^{+MNPQR}G'^{+}_{MNPQR}\Big\}$$

$$- \frac{1}{32\pi G_N}\int d^{10}x\,\frac{1}{4!\,3!^2}\big(C^{+}_{0123}H_{456}G_{789} \pm \text{permut.}\big)$$

(ojo; intensidad de campo de B_{MN}; subir índices con g^{MN}; $\frac{1}{4!\,3!^2}\big(C^{+}_{0123}H_{456}G_{789}\pm\text{permut.}\big) = C^{+}_{(4)}\wedge H_{(3)}\wedge G_{(3)}$ "Término de Chern-Simons"; producto exterior)

$+$ fermiones,

con $$16\pi G_N \equiv 2\kappa_{10}^2 = (2\pi)^7 g_c^2 \ell_c^8,$$

(intensidad de campo de C_{MN})

$$G'_{MNP} = G_{MNP} - C\,H_{MNP},$$

$$G'^{+}_{MNPQR} = G_{MNPQR} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 2!\,3!}\big(B_{[MN}G_{PQR]} - C_{[MN}H_{PQR]}\big)}_{\frac{1}{2}\left(B_{(2)}\wedge G_{(3)} - C_{(2)}\wedge H_{(3)}\right)},$$

y debemos imponer a mano la condición de autodualidad

$$*\,G'^{+}_{MNPQR} = +\,G'^{+}_{MNPQR}$$

a nivel de las ecuaciones de movimiento.

L12: 11/03/24

Hemos escrito S^{IIB}_{SUGRA} en el llamado "marco de cuerdas", donde figura la métrica $g_{MN}(x)$ que directamente siente la cuerda, a través de la acción

$$S_p[X] = \frac{1}{4\pi l_c^2} \int d\tau d\sigma \, g_{MN}(X(\tau,\sigma)) \, \partial_a X^M \partial_b X^N \eta^{ab} + \dots$$

(Polyakov)

Por medio de una transformación de Weyl en el espaciotiempo (que NO es una simetría, sino simplemente una redefinición de campos)

$$g_{MN}(x) = e^{\varphi(x)/2} \, g^E_{MN}(x),$$

pasamos al "marco de Einstein", donde la acción de supergravedad toma la forma

$$S^{IIB}_{SUGRA} = \int d^{10}x \sqrt{-g_E} \left\{ R_E - \frac{1}{2}(\partial_M \varphi)^2_E - \frac{1}{12} e^{-\varphi} H_{MNP} H^{MNP}_E + \dots \right\}$$

Einstein-Hilbert ← signo correcto: energía $= \dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2$

Así que, increíblemente, ¡¡a partir de campos libres en 1+1 dim es posible obtener la gravedad de Einstein en 9+1 dim!!

La acción que denotamos $S_{\alpha'}$ contiene una serie infinita de correcciones con más y más derivadas de los campos de SUGRA. Por análisis dimensional, estos términos deben venir acompañados de potencias cada vez más altas de $l_c \equiv \sqrt{\alpha'}$. ← "pendiente de Regge"

Se conocen explícitamente algunos de los primeros términos en esta acción, p.ej.,

función zeta de Riemann (cte. de Apéry $\simeq 1.202$)

$$S_{\alpha'} = -\frac{1}{16\pi G_N}\int d^{10}x\sqrt{-g_E}\left\{\frac{\zeta(3)}{8}\ell_c^6 e^{-\frac{3\phi}{2}} W_E + \dots\right\},$$

donde

marco de Einstein

$$W_E \equiv R^{HMNK} R_{PMNQ} R_H{}^{RSP} R^Q{}_{RSK} + \frac{1}{2} R^{HKMN} R_{PQMN} R_H{}^{RSP} R^Q{}_{RSK}$$

$$+ \text{términos con el tensor de Ricci}$$

$$= C^{HMNK} C_{PMNQ} C_H{}^{RSP} C^Q{}_{RSK} + \frac{1}{2} C^{HKMN} C_{PQMN} C_H{}^{RSP} C^Q{}_{RSK}$$

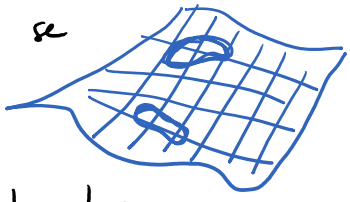
↑ tensor de Weyl ($\equiv$ Riemann − trazas)

Estas son entonces correcciones cuerderas a la gravedad de Einstein (+ superparejas). El principal punto a recordar es que, para energías tales que $E\ell_c \ll 1$, la teoría de cuerdas IIB se reduce a la supergravedad IIB.

Cada solución a las ecuaciones de movimiento de $S^{IIB}_{cuer,ef}$ representa un fondo (es decir, una asignación específica de valores esperados para cada uno de

$l_c \partial_\mu \varphi \ll 1$ si $\varphi(x)$ varía lentamente

los campos de la teoría) sobre el cual se



puedan propagar las cuerdas (que representan pequeñas fluctuaciones alrededor de los valores promedio). Cuando la escala de distancia/tiempo a la cual varían los campos de fondo es grande comparada con l_c, la contribución de S_α' resulta despreciable y los fondos pueden obtenerse/estudiarse como soluciones a las ecuaciones de movimiento de S_{SUGRA}.

Pej., el espaciotiempo de Minkowski en 9+1 dimensiones, con todos los demás campos apagados, es una solución (lo cual es necesario por consistencia, ya que fue nuestro punto de partida). Se puede mostrar que este fondo es invariante bajo las 32 supersimetrías de la teoría IIB ($\leftrightarrow \mathcal{N}=2$ en 9+1 dim $\leftrightarrow \mathcal{N}=8$ en 3+1 dim), es decir, es un fondo máximamente supersimétrico.

Por esta razón, es miembro único de su supermultiplete.

Se conocen muchas otras soluciones, pero para nuestros propósitos, resultará de particular interés una clase

L13: 03/11/20

de fondo descubiertas por Horowitz y Strominger en 1991, conocidas como p-branas negras RR (Ramond-Ramond), con solo 3 campos excitados:

$$ds^2 = g_{MN}\,dx^M dx^N \quad \leftarrow \text{métrica en el marco de cuerdas}$$

$$= H(r)^{-1/2}\left(-f(r)dt^2 + \underbrace{dx_1^2 + \ldots + dx_p^2}_{\equiv d\vec{x}_{\parallel}^{\,2}}\right) + H(r)^{1/2}\left(\frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{8-p}^2\right)$$

($d\Omega_{8-p}^2$: métrica en esfera $(8-p)$-dim)

$$e^{\varphi} = g_c\, H(r)^{(3-p)/4} \quad \leftarrow \text{dilatón}$$

(e^{φ}: solo valor asintótico e^{φ_∞})

$$C_{0\,1\,2\cdots p} = J^{-1} g_c^{-1}\left[1 - H(r)^{-1}\right] \quad \leftarrow \text{campo de norma RR}$$

($p = -1, 1, 3, 5, 7, 9$ en IIB; duales de Hodge)

donde

$$H(r) \equiv 1 + J\left(\frac{L}{r}\right)^{7-p}$$

(L: radio de carga; J: parámetro de "no extremalidad", $0 \le J \equiv \tanh\beta \le 1$, "parámetro de empujón")

y

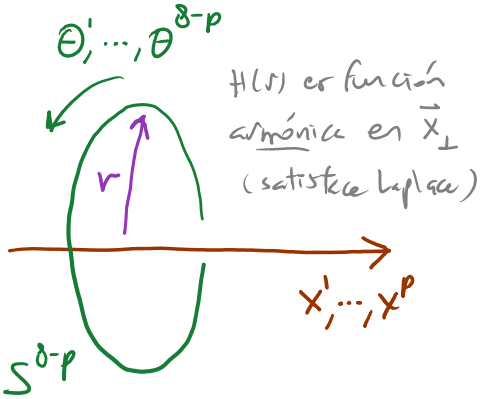
$$f(r) \equiv 1 - \left(\frac{r_h}{r}\right)^{7-p},$$

(r_h: radio del horizonte)

$$L^{7-p} \equiv r_h^{7-p}\,\frac{J}{1-J^2}.$$

(2 parámetros independientes)

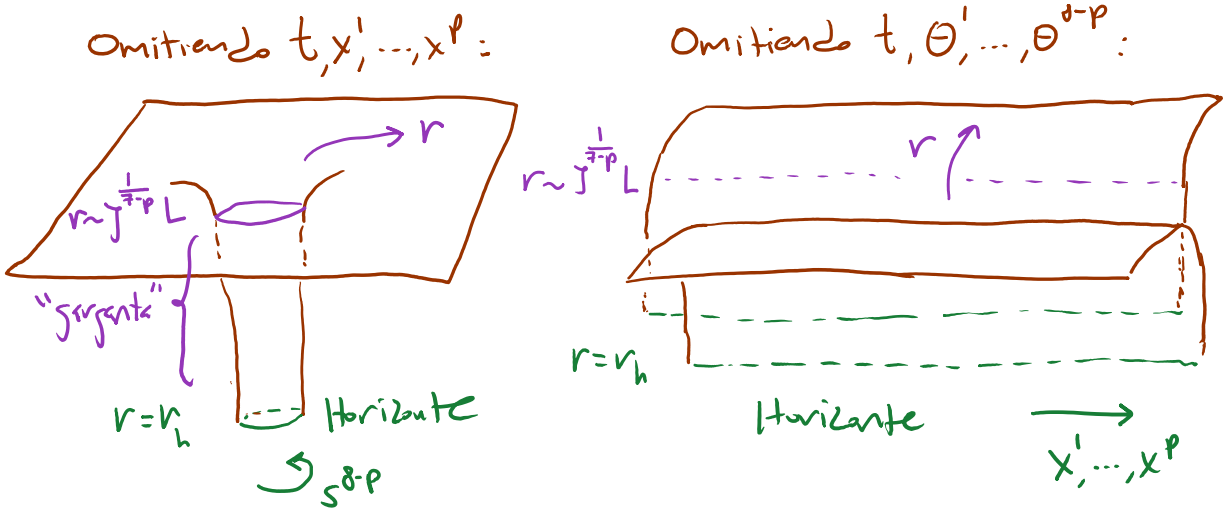
Estamos empleando aquí coordenadas cartesianas para $\vec{X}_{\parallel} \equiv (X^1, \ldots, X^p)$ y esféricas para $\vec{X}_{\perp} \equiv (X^{p+1}, \ldots, X^9)$:



martes, 24 de abril de 2012 07:34 p.m.

La solución es independiente de $t, x^1, \dots, x^p$, tiene simetría esférica en la S^{8-p}, se reduce a Minkowski^{9,1} para $r \gg L, r_h$, y tiene un horizonte de eventos en $r = r_h$ con topología $S^{8-p} \times R^p$

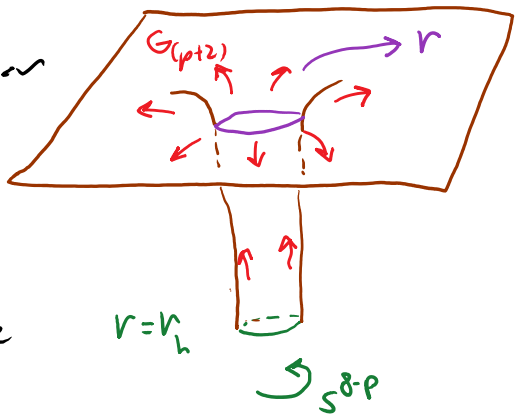
L11 : 22/09/16



Este fondo describe entonces un objeto solitónico de la teoría de cuerdas, que es una versión extendida en p dimensiones de un agujero negro asintóticamente plano ($r \to \infty$ nos lleva lejos del solitón). En virtud de que $G_{rol\dots p} \sim \partial_r C_{o1\dots p}$ está encendido, el objeto porta carga "eléctrica" Ramond-Ramond, y es por tanto una p-brana negra (p-brana ≡ objeto extendido en p dim espaciales ← de "membrana") análoga al agujero negro de Reissner-Nordström, que incluye como caso particular al hoyo negro neutro, de Schwarzschild.

martes, 24 de abril de 2012 10:50 p.m.

La carga del objeto (densidad por unidad de p-volumen) se puede calcular usando la ley de Gauss, integrando el flujo de $(*G)_{\theta_1 \cdots \theta_{8-p}}$ sobre la S^{8-p} (el resultado es independiente del radio):



$$q = \frac{(7-p)\,\Omega_{8-p}}{(2\pi)^{7-p}\, g_c} \left(\frac{L}{l_c}\right)^{7-p} \propto \int d\theta_1 \cdots d\theta_8 \, (*G)_{\theta_1 \cdots \theta_8}$$

$$\propto \sqrt{-g}\, G_{rol2 \cdots p}$$

donde $\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{4\pi^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ es el volumen de la esfera n-dimensional con radio 1 (p.ej. $\Omega_2 = \frac{4\pi^{3/2}}{\Gamma(1/2)} = 4\pi$ ✓, $\sqrt{\pi}$).

Dado que en la misma teoría tenemos a la p-brana y (6-p)-brana negras, que son respectivamente fuente "eléctrica" y "magnética" del mismo potencial $C_{01\cdots p}$, el argumento usual de Dirac [ver p.ej. Polchinski vol. 2 p.147] implica que la carga necesariamente debe ser discreta, $q = N$. Tenemos entonces

$$\boxed{L^{7-p} = c_p\, g_c\, N\, l_c^{7-p}}$$

con $c_p \equiv (2\sqrt{\pi})^{5-p}\, \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right)$.

↑ radio de carga

martes, 24 de abril de 2012 11:16 p.m.

La masa de la brana negra se puede calcular a partir de la forma de $h_{MN} \equiv g_{MN} - \eta_{MN}$ para $r >> r_h, J^{\frac{1}{7-p}} L$, con el "método ADM" ≡ Arnowitt-Deser-Misner (ver p.ej. Wald p. 293):

$$M = \frac{N}{(2\pi)^p g_c \ell_c^{p+1}} \left(\frac{r_h}{L}\right)^{7-p} \left(\frac{1}{1-J^2} + \frac{1}{7-p} \right) V_p$$

g_c: muestra carácter solitónico/no perturbativo; $M \to \infty$ para $g_c \to 0$

V_p: volumen (infinito) $\int dx^1 \cdots dx^p$

A partir del área del horizonte y la gravedad superficial, con las fórmulas de la p. 139 se encuentra respectivamente la entropía y temperatura de la p-brana negra:

$$S_{BH} = \frac{\Omega_{8-p} V_p}{4 G_N} \frac{r_h^{8-p}}{(1-J^2)^{\frac{4-p}{2}}},$$

$$T_H = \frac{7-p}{4\pi} \frac{\sqrt{1-J^2}}{r_h}.$$

Para evitar tener una singularidad desnuda se necesita que

masa ≥ carga

$$M \geq \frac{N V_p}{(2\pi)^p g_c \ell_c^{p+1}},$$

desigualdad que de hecho se puede deducir a partir

del álgebra de supersimetría. Esta es entonces una cota BPS (como la de la p. 122), que nos dice que cuesta una masa mínima portar una carga RR dada. La solución que satura la cota (es decir, que tiene justamente la masa mínima) se conoce como p-brana negra extremal, y se obtiene en el límite

$r_h \to 0$, $f \to 1$ con $L^{7-p} \equiv r_h^{7-p} \frac{f}{1-f^2}$ fijo:

$$ds^2 = H(r)^{-1/2}\left(-dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_p^2\right) + H(r)^{1/2}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2\right)$$

$$e^{\varphi} = g_c H(r)^{(3-p)/4}$$

$$C_{01\dots p} = g_c^{-1}\left(1 - H^{-1}(r)\right)$$

con $H(r) = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^{7-p}$, $L^{7-p} = c_p N g_c \ell_c^{7-p}$.

Esta solución tiene $M = \frac{N V_p}{(2\pi)^p g_c \ell_c^{p+1}}$, $S_{BH} = 0 = T_H$ (no radia).

Se puede mostrar que preserva 16 de las 32 supersimetrías de la teoría: es un "estado $\frac{1}{2}$ BPS", que pertenece a un supermultiplete mucho más corto que lo

← la mitad de las Q son operadores de creación fermiónicos

normal (con $2^{16/2} = 256$ estados en lugar de $2^{32/2}$).

13: 13/03/24

La brana negra genérica se llama no extremal, e incluye el caso neutro ($N=0 \leftrightarrow L=0$), que es análogo al agujero negro de Schwarzschild. El caso particular en que la brana tiene una energía cercana a la mínima ($r_h>0$, $J\sim 1 \leftrightarrow r_h \ll L$) se conoce como cuasi-extremal. Esta resulta tener calor específico positivo, pero al alejarnos ← se enfría conforme radía
más de la extremalidad, el calor específico se vuelve negativo, justo como el hoyo negro de Schwarzschild. ← ¡se calienta conforme radía!

El nombre de p-brana es la designación genérica para un objeto extendido en p dimensiones espaciales:

0-brana (partícula) 1-brana (cuerda) 2-brana (membrana) 3-brana, etc.

Tal como una partícula se acopla a un potencial A_μ, $\int d\tau \partial_\tau X^\mu A_\mu$, una p-brana se acopla naturalmente a un potencial con p+1 índices.

Además de las p-branas negras con carga R-R, con $p=-1,1,3,5,7,9$, la teoría de cuerdas IIB incluye otros tipos de branas. Se conoce, p.ej. una solución

se obtiene con Gauss

de cuerda negra con carga "eléctrica" bajo B_{MN} (descubierta por Dabholkar y Harvey en 1989):

$$ds^2 = h(r)^{-1}(-dt^2 + dx_1^2) + (dr^2 + r^2 d\Omega_7^2)$$

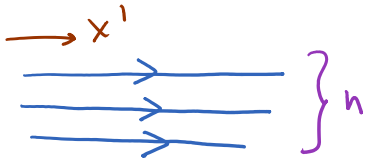
$$e^{\varphi} = g_c\, h(r)^{-1/2}$$

$$B_{01} = \frac{1}{2}(h(r)^{-1} - 1) \qquad h(r) = 1 + \frac{4(2\pi)^7 n g_c^2 \ell_c^6}{3\Omega_6 r^6}$$

bajo B_{01}

en el caso extremal. Esta solución tiene carga n y masa $M = \frac{nV_1}{2\pi \ell_c^2} = nV_1 \times$ tensión de cuerda "fundamental", ← no solitónico ($\propto g_c^0$)

justo como una colección de n cuerdas estiradas a lo largo de x^1 y apiladas una sobre otra (configuración que también es $\frac{1}{2}$ BPS).



Podemos inferir entonces que la cuerda negra (o "NS1-brana") extremal no es otra cosa que los campos macroscópicos generados por dicha colección de cuerdas.

→ sería "eléctrica" bajo $B_{M_1\cdots M_6}$ asociada a $(*H)_{M_1\cdots M_7}$

La teoría IIB contiene también una 5-brana con carga "magnética" bajo el mismo campo B_{MN}, que se conoce como la NS5-brana (Neveu-Schwarz) (y fue descubierta por Callan,

Harvey y Strominger en 1991). Este objeto tiene (en el caso extremal) masa $M = \frac{n V_5}{(2\pi)^5 g_c^2 \ell_c^6}$ ← solitónico, así que es aún más pesado que la 5-brana R-R cuando $g_c \ll 1$.

Para cada elección de q_{NS} y q_R relativamente primos, existen también (q_{NS}, q_R)-cuerdas y (q_{NS}, q_R)-5-branas que tienen q_{NS} unidades de carga respectivamente eléctrica y magnética bajo B_{MN}, y q_R unidades bajo C_{MN}.

Tenemos entonces un verdadero zoológico de objetos extendidos con distintas dimensiones y cargas (¡hay incluso más de las que hemos mencionado aquí!).

Para entender adecuadamente su significado físico, un dato importante es que todas estas branas están emparentadas entre sí a través de distintas dualidades. En particular, se cree que la teoría IIB posee una dualidad conocida como dualidad S, con grupo discreto $SL(2,\mathbb{Z})$, cuyo efecto a nivel de los campos de SUGRA es dejar invariante a la métrica en el marco de Einstein

y a la intensidad de campo $G^{+}_{(5)}$, mezclar al dilatón con el axión de acuerdo con

$$\tau \to \underline{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}),$$

↑ número entero

donde ← escalar RR ← ¡No confundir!

$$\tau \equiv C + i e^{-\varphi}$$

(lo cual incluye en particular $e^{\varphi} \leftrightarrow e^{-\varphi}$, es decir, $g_c \leftrightarrow 1/g_c$, cuando $C = 0$), y mezclar a las intensidades de campo $H_{(3)}$ y $G_{(3)}$ de acuerdo con

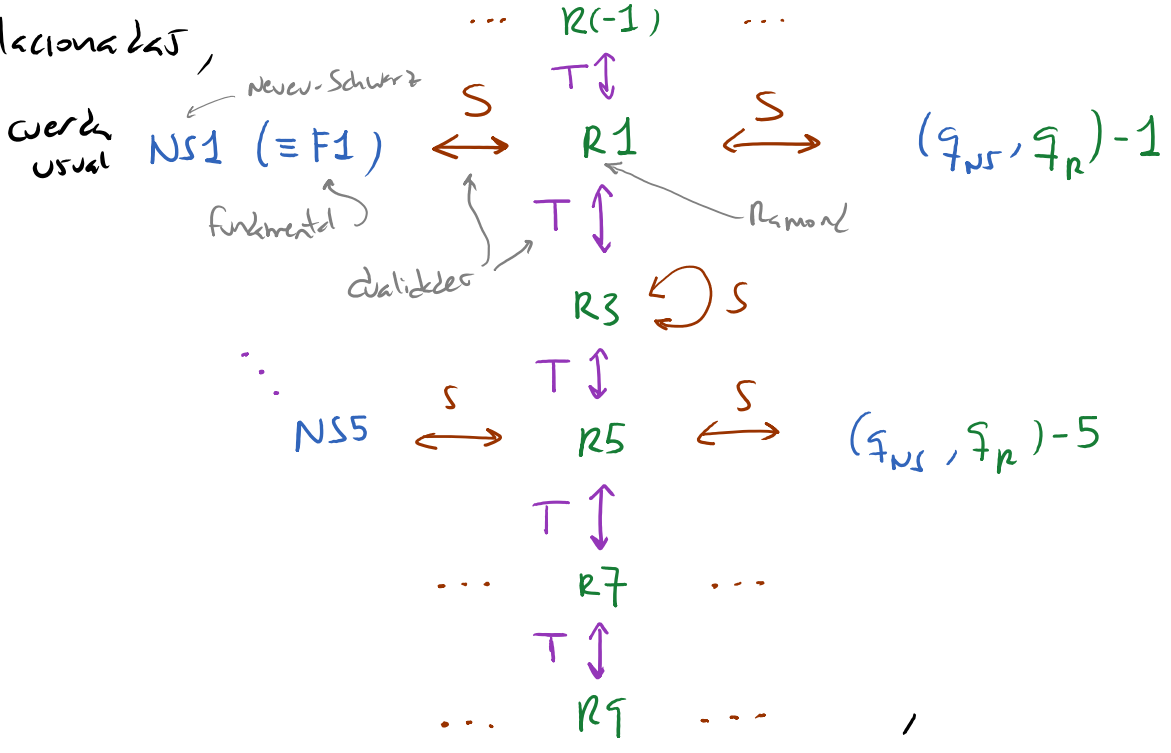
$$\begin{pmatrix} H_{(3)} \\ G_{(3)} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \underline{H}_{(3)} \\ \underline{G}_{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{(3)} \\ G_{(3)} \end{pmatrix}.$$

Estas transformaciones convierten a la cuerda negra ó $(1,0)$-cuerda en cualquiera de las otras (q_{NS}, q_R)-cuerdas, incluyendo en particular a la 1-brana RR ó $(0,1)$-cuerda.

Similarmente, transforman a la 5-brana RR o $(0,1)$-5-brana en cualquiera de las otras (q_{NS}, q_R)-5-branas.

Adicionalmente, se sabe que (tras compactificar en un toro T^p), la teoría de cuerdas IIB posee otra dualidad, conocida como dualidad T (que la conecta también con la teoría IIA), cuyo efecto es convertir a una p-brana RR en una $(p\pm 2)$-brana RR.

La conclusión inevitable es que todas las branas son igualmente importantes en la teoría, porque todas están relacionadas,



y cualquiera de ellas puede entonces interpretarse como la cuerda negra reescrita en otras variables.

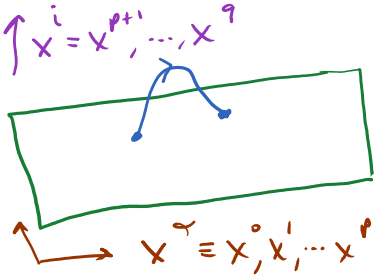
La "teoría de cuerdas IIB" (al igual que las otras) ¡NO es entonces una teoría (solo) de cuerdas!

LJH: 20/11/05

Sabiendo que NS1-brana (cuerda negra) representa simplemente a los campos macroscópicos producidos por una colección de muchas cuerdas fundamentales (≡F1), es natural tratar de identificar a los "ingredientes" básicos p dimensionales que, al ser apilados en cantidad suficiente, son responsables de generar las otras branas negras extremales.

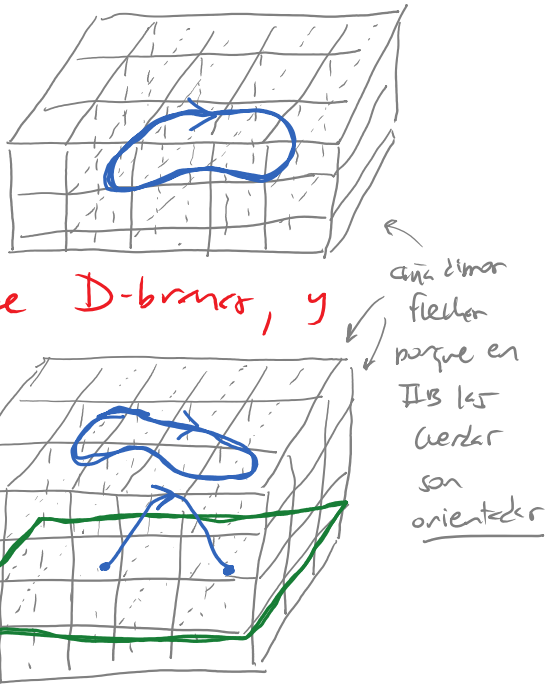
En el caso de las branas R-R, estos ingredientes resultan ser las llamadas D-branas, descubiertas por Dai, Leigh y Polchinski, e independientemente por Hořava, en 1989.

Una Dp-brana es un objeto extendido en p dimensiones y con grosor infinitesimal en las restantes 9-p dimensiones, cuyas excitaciones se describen a través de cuerdas (fundamentales) abiertas, con extremos que son libres de deslizarse a lo largo de las direcciones X^i paralelas a la brana (obedeciendo condiciones de Neumann), pero se mantienen



adheridas a la brana en las direcciones transversales X^i (obedeciendo condiciones de Dirichlet).

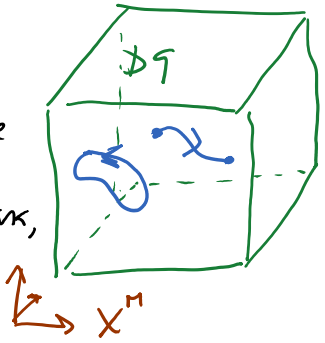
Esto es directamente análogo a la manera en que las cuerdas cerradas describen excitaciones de la generalización cuerdera del espaciotiempo. Las cuerdas abiertas solo pueden existir en presencia de D-branas, y deben por tanto considerarse como pequeños filamentos de la propia D-brana. Lo interesante es que ambos tipos de cuerdas están hechas de lo mismo: tienen la misma tensión $\frac{1}{2\pi l_c^2}$, sus puntos internos son completamente indistinguibles (en particular, pueden moverse en todas las direcciones), y son solo los extremos de la cuerda abierta los que marcan una diferencia. Esto nos indica que la



L11: 27/09/16

D-brana de hecho está relacionada también con el espaciotiempo cuerdero: es otro tipo de objeto solitónico

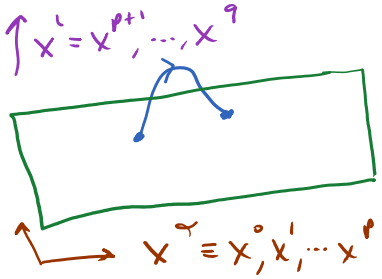
(y por tanto no perturbativo) de la teoría de cuerdas, que resulta ser muy delgado. Durante mucho años, por insistir en invariancia bajo Poincaré se consideraron solo cuerdas abiertas con extremos que podían moverse libremente en todas las direcciones, sin entender que esto implicaba tener presente una Dq-brana, que por definición llena todo el espacio.



El descubrimiento de las D-branas (y de otros ingredientes conocidos como "orientifolds" o "orientidades") permitió entonces entender que las teorías con o sin cuerdas abiertas (anteriormente consideradas disjuntas) son solo estados distintos de una misma teoría (p.ej., $I = IIB + 16\,Dq's + 1$ "orienti-9-plano").

Todas las propiedades de las D-branas son consecuencia de su definición como hipersuperficies donde las cuerdas abiertas deben terminar. En primer lugar, los posibles modos de excitación de la Dp-brana se determinan calculando el espectro cuántico de la cuerda abierta

correspondiente. Esto da lugar a una torre infinita de estados, con $m^2 = \frac{n}{l_c^2}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$.



Si los interpretamos como estados de partícula, viven sobre la Dp-brana (p.ej., pueden tener $p^\alpha \neq 0$ pero no p^i), así que están asociados a campos definidos solo sobre la brana.

En particular, para $n=0$ obtenemos estados de partícula asociados a los siguientes campos sin masa:

$\Phi^i(x^\alpha)$: campos escalares sobre Dp-brana, que describen su posición en las $9-p$ direcciones transversales.

$\sim X^i(x^\alpha)$

$i = p+1, \ldots, 9$

análogo a $X^M(\tau, \sigma)$ para una cuerda

Estos son los grados de libertad que hubiéramos esperado, en virtud de que la Dp-brana es un objeto extendido dinámico, que puede fluctuar geométricamente. Una cuerda abierta vibrando en este modo representa entonces una fluctuación infinitesimal en la posición de la Dbrana. Un desplazamiento finito equivale a encender un valor de fondo distinto de cero para estos mismos campos.

$A_\alpha(x^\alpha)$: campo de norma $U(1)$ sobre Dp-brana. Este es un resultado inesperado e interesante, que nos informa sobre la existencia de $p-1$ grados de libertad internos en cada punto de la Dp-brana.

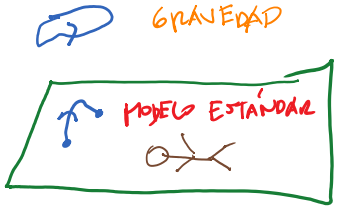
↑ vector en $p+1$ dim

← $(p+1)-2$, p.ej. 2 en 3+1 dim

Una cuerda abierta vibrando de esta manera específica describe a un fotón, y también es posible encender valores de fondo para este potencial, que en general se traducirían en la presencia de campos eléctricos y/o magnéticos sobre la D-brana.

El número total de grados de libertad bosónicos no masivos es entonces $\underbrace{9-p}_{\text{escalares}} + \underbrace{p-1}_{\text{fotón}} = 8$.

$\Psi(x^9)$: campo espinorial con 16 componentes reales (como 1 espinor de Majorana-Weyl en 9+1 dim). Estos son otros 8 grados de libertad internos de la D-brana, que resultan ser fermiónicos (8 en lugar de 16, por la ec. de Dirac). Una cuerda abierta vibrando de esta manera es un fotino (para $p<9$ existe más de uno).

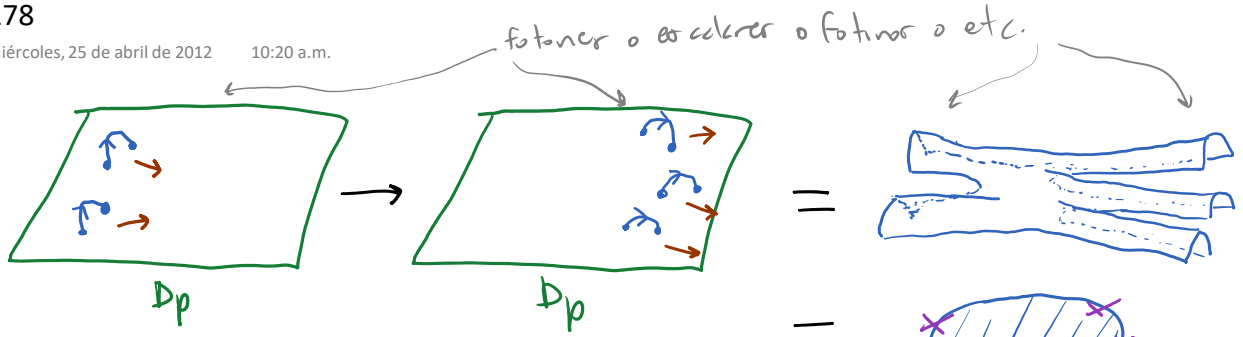


(Este contenido de campos da lugar a la idea de un "mundo brana", donde vivimos atrapados sobre una brana que flota en más dim.)

Se puede mostrar que la Dp-brana sin excitar preserva 16 de las 32 supersimetrías de la teoría IIB (es un estado $\frac{1}{2}$ BPS), y por lo tanto forma parte de un supermultiplete (ultra)corto, con $2^{16/2} = 256$ miembros que están emparentados entre sí por las 16 supersimetrías restantes. $\begin{cases} Q_a |Dp\rangle = |Dp'\rangle \\ Q_b |Dp\rangle = 0 \end{cases}$

Los estados de la cuerda abierta también están emparentados entre sí a través de estas 16 supersimetrías (en el caso particular de los estados no masivos, 8 de ellas no hacen nada, por lo que tenemos $2^{8/2} = 16 = 8 + 8$ estados ✓), bosones y fermiones
así que la teoría $(p+1)$-dimensional que describe sus interacciones (es decir, las interacciones de la D-brana consigo misma) tiene el equivalente de supersimetría $\mathcal{N}=1$ en $9+1$ dimensiones (justo como la teoría tipo I), o lo que es lo mismo, $\mathcal{N} = 2^{\frac{7-p}{2}}$ en $p+1$ dimensiones para $p < 7$ (p.ej., $\mathcal{N}=4$ en $3+1$ dim).

Las interacciones se pueden deducir calculando amplitudes de dispersión de cuerdas abiertas:



donde el proceso básico

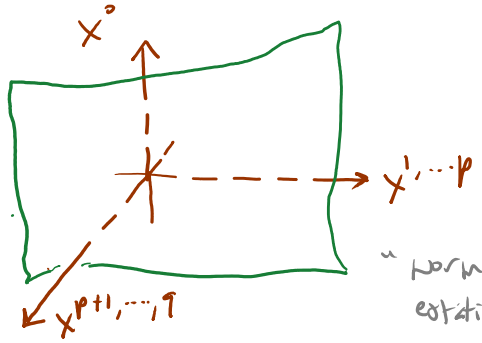
resulta estar controlado por $\sqrt{g_c} = e^{\phi/2}$.

A bajas energías ($E \ll \ell_c^{-1}$), estas interacciones se pueden resumir en una acción efectiva que involucra solo a los campos no masivos y tiene la forma

$$S_{Dp,ef} = S_{DBI} + S_{Dp,\alpha'},$$

donde el primer término denota a la acción de Dirac-Born-Infeld (supersimetrizada)

$$S_{DBI} = -T_{Dp} \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det\left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} + 2\pi\ell_c^2 F_{\alpha\beta}\right)}$$



$\equiv g_{\alpha\beta}$ métrica inducida sobre Dp

Intensidad de campo $\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$

$X^\alpha \equiv \sigma^\alpha$

$X^i \equiv 2\pi\ell_c^2 \Phi^i$

"norma estática"

+ fermiones ,

con T_{Dp} la tensión (energía por unidad de volumen p-dimensional) de la Dp-brana (que identificaremos un poco más adelante).

Con $F_{\alpha\beta}=0$, esto sería simplemente la acción geométrica ($\propto$ volumen (p+1)-dim) apropiada para una p-brana (que Dirac escribió para una membrana), parametrizada en la "norma estática" $X^\sigma = \sigma^\tau$.

Más en general, podríamos usar coordenadas σ^τ arbitrarias y especificar $X^M(\sigma) = (X^\alpha(\sigma), X^i(\sigma))$.

Con $X^i = 0$, el primer término sería solo $\eta_{\alpha\beta}$ y la acción se reduce entonces a la que escribieron Born e Infeld con el objetivo de tener una teoría del campo electromagnético con un valor máximo E_{crit} para el campo eléctrico (aquí $E_{crit} \equiv 1/2\pi\ell_c^2$).

Es importante notar que S_{DBI} ya incluye una serie infinita de correcciones en potencias de $\alpha' \equiv \ell_c^2$:

$$\sqrt{-\det(\eta_{\alpha\beta}+2\pi\ell_c^2 F_{\alpha\beta})} = \sqrt{-\det\begin{pmatrix} -1 & 2\pi\ell_c^2 F_{01} & 2\pi\ell_c^2 F_{02} & \cdots \\ -2\pi\ell_c^2 F_{01} & 1 & 2\pi\ell_c^2 F_{12} & \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{1+(2\pi\ell_c^2)^2 F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}+\ldots+(2\pi\ell_c^2)^{p'}\underbrace{F\cdots F}_{p'}}$$

con $p' \equiv \begin{cases} p+1 & \text{si } p \text{ es impar} \\ p & \text{si } p \text{ es par} \end{cases}$

$|F^2| < \frac{1}{(2\pi\ell_c^2)^2} = E_{crit}^2$

$$= 1+\frac{1}{2}(2\pi\ell_c^2)^2 \underbrace{F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}_{\text{4. Maxwell}} + \#(2\pi\ell_c^2)^4 FFFF + \ldots$$

← menos derivadas, domina a bajas energías

Se sabe que S_{DBI} es de hecho la acción exacta cuando $F_{\alpha\beta}$ y $\partial_\alpha X^i \propto \partial_\alpha \Phi^i$ son constantes [Abouelsaood, Callan, Nappi, Yost; Fradkin, Tseytlin]; pero de otra manera contribuyen también los términos con las derivadas $\partial_\alpha\partial_\beta\cdots F_{\gamma\delta}$ y $\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\cdots X^i$, que figuran en la parte de la acción efectiva que hemos llamado $S_{Dp,\alpha'}$. P.ej., para $p=9$,

$$S_{DBI,\alpha'} = -T_{D9}\int d^{10}x \sqrt{-\det\underbrace{(\eta_{MN}+(2\pi\ell_c^2)F_{MN})}_{\equiv \gamma_{MN}\ (\text{con inverso} \equiv \gamma^{MN})}}$$

$$\times\left\{\frac{1}{9!}\gamma^{MN}\gamma^{PQ}t_{NPST}\gamma^{ST}t_{QMUV}\gamma^{UV}\right.$$

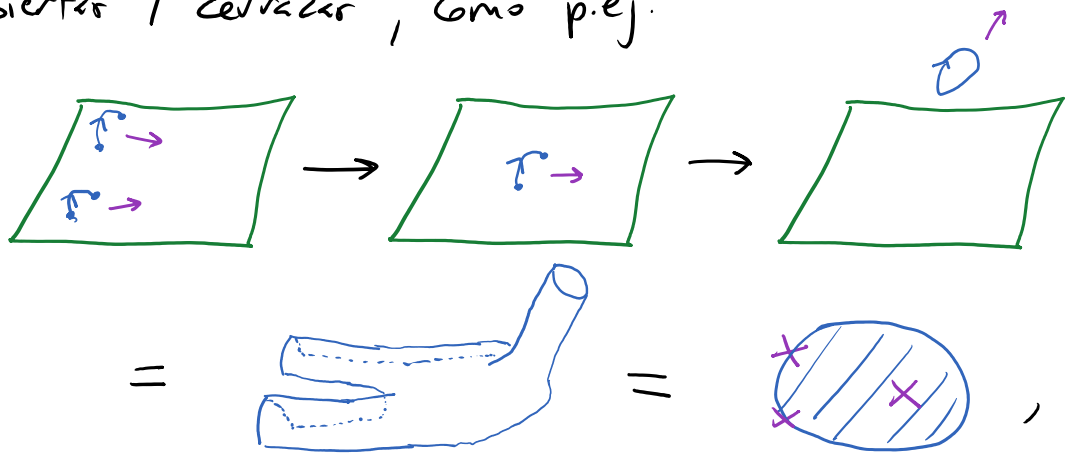
$$-\gamma^{P_2 M_1}\gamma^{M_2 P_1}\gamma^{Q_2 N_1}\gamma^{N_2 Q_1} t_{M_1 M_2 N_1 N_2} t_{P_1 P_2 Q_1 Q_2}\Big\},$$

donde $t_{MNPQ} \equiv (2\pi l_c^2)\partial_M \partial_N F_{PQ} + (2\pi l_c^2)^2 \gamma^{ST} \partial_M F_{PS} \partial_N F_{QT}$

$$- (2\pi l_c^2)^2 \gamma^{ST} \partial_M F_{QS} \partial_N F_{PT}$$

[ver p.ej. hep-th/0606255 y hep-th/0008125].

A partir de amplitudes de dispersión con cuerdas abiertas y cerradas, como p.ej.



podemos determinar también la manera en que las D-branas se acoplan a los modos de supergravedad (y demás modos de cuerda cerrada). P.ej., la acción DBI se generaliza a

incluir $g_c^{-1} = e^{-\varphi_{c0}}$ aquí ó acá

métrica en el marco de cuerdas

$$S_{DBI} + S_{WZ} \equiv -T_{Dp} \int d^{p+1}\sigma\, e^{-\varphi} \sqrt{-\det\left[\partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N (g_{MN} + B_{MN}) + (2\pi\ell_c^2) F_{\alpha\beta}\right]}$$

'Wess-Zumino'

ó S_{CS} 'Chern-Simons'

$$+ T_{Dp} \int d^{p+1}\sigma \sum_{p' \le p} C_{(p'+1)} \wedge e^{B_{(2)} + 2\pi\ell_c^2 F_{(2)}}$$

C y B son retracciones (pullbacks) del espaciotiempo al volumen de mundo de la Dp-brana

$$\equiv \partial_{\alpha_1} X^{M_1} \cdots \partial_{\alpha_{p'+1}} X^{M_{p'+1}} C_{M_1 \cdots M_{p'+1}}$$

$$\equiv \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N B_{MN}$$

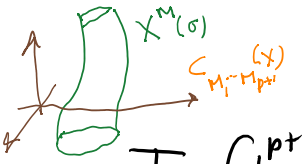
$$T_{Dp} \int d^{p+1}\sigma \left[C_{(p+1)} + C_{(p-1)} \wedge \left(B_{(2)} + (2\pi\ell_c^2) F_{(2)} \right) + \ldots \right]$$

+ fermiones.

(El hecho de que en todos lados $B_{(2)}$ y $F_{(2)}$ aparezcan solo en la combinación $F_{\alpha\beta} \equiv B_{\alpha\beta} + (2\pi\ell_c^2) F_{\alpha\beta}$ se debe a que, en presencia de la Dp, la transformación de norma $B_{MN} \to B_{MN} + \partial_{[M} \Lambda_{N]}$ necesariamente se acompaña de $F_{\alpha\beta} \to F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\pi\ell_c^2} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N \partial_{[M} \Lambda_{N]}$, así que solo $F_{\alpha\beta}$ es invariante de norma.)

L13: 29/09/16

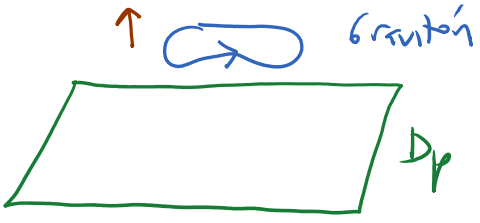
Recordando que una partícula (o-brana) se acopla a un potencial electromagnético a través de $q \int d\tau\, A_\tau(X(\tau)) = q \int d\tau\, A_M \partial_\tau X^M$,



$\partial_{\sigma^0} X^{M_1} \cdots \partial_{\sigma^p} X^{M_{p+1}} C_{M_1\cdots M_{p+1}}$

Vemos que el término $T_{Dp} \int d^{p+1}\sigma\, C_{(p+1)}$ es la generalización p-dimensional. Nos dice que una Dp-brana tiene carga RR, y su densidad de carga es igual a su tensión T_{Dp} (lo cual va de la mano de que es BPS). En la teoría IIB, existen entonces Dp's con $p = -1, 1, 3, 5, 7, 9$. (campos C_0 y C_6 en IIB) Los otros términos en S_{WZ} indican que si encendemos $F_{\alpha\beta} \neq 0$, la Dp además porta carga de D(p-2) y/o D(p-4) y/o etc.

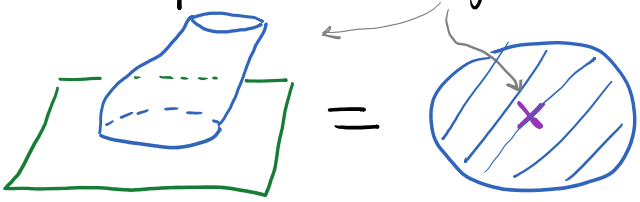
En S_{DBI} vemos que, naturalmente, la tensión T_{Dp} controla la manera en que la Dp-brana se acopla a la métrica, y en particular, su amplitud de probabilidad para emitir gravitones.



Similarmente, la densidad de carga determina la amplitud de probabilidad de que la Dp emita "fotones" RR.

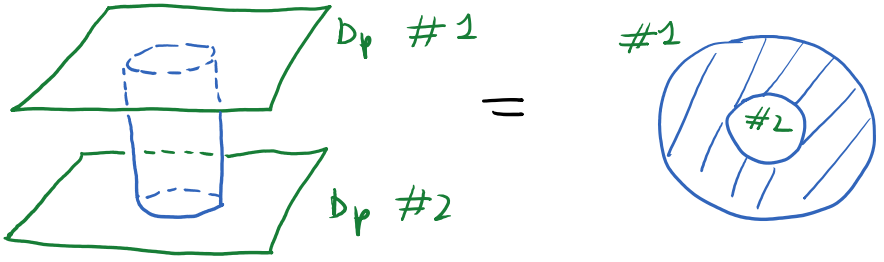
14:20/23/24

El valor de T_{Dp} se puede inferir entonces del cálculo de la amplitud de 1 gravitón

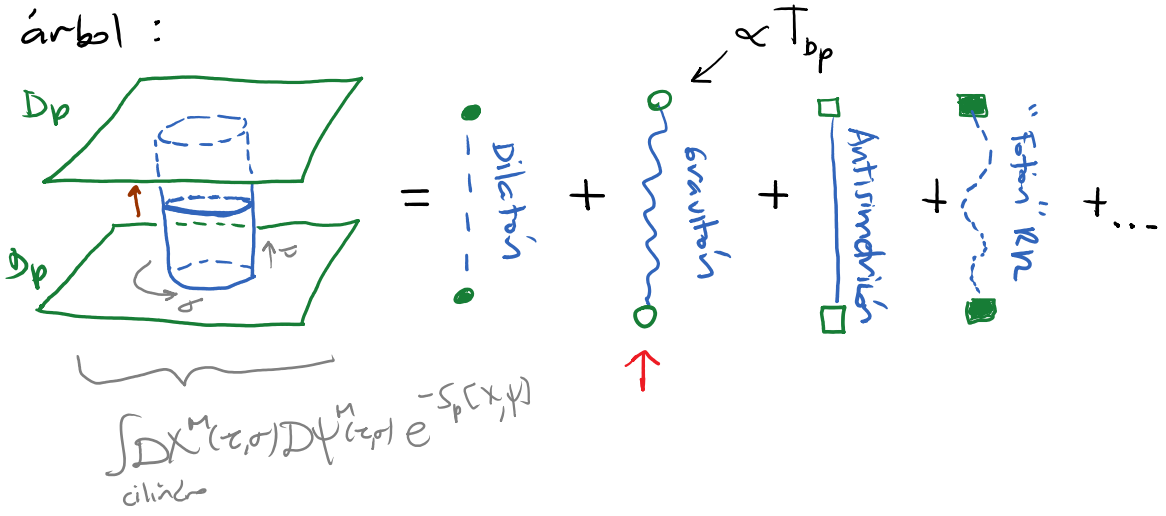


análogo a un diagrama de "rebote" en campos:

pero de hecho resulta más fácil de deducir a partir de la amplitud de 0 puntos en el anillo / cilindro, que representa la interacción entre 2 Dp-branas:

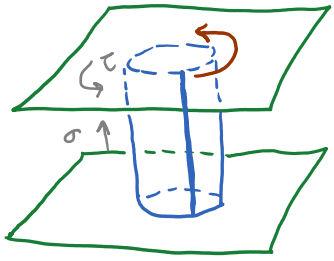


Es interesante, e importante para el tema de la correspondencia norma/gravedad, que este cálculo puede interpretarse de 2 maneras alternativas. Por una parte, justo como hemos dicho, podemos pensar que estamos calculando la amplitud de que las 2 Dp-branas interactúen a través del intercambio de una cuerda cerrada, de tal modo que tendremos un diagrama a nivel árbol:



Pero por otro lado, podemos interpretar este mismo proceso como un lazo de cuerda abierta, es decir, como la aparición de 1 cuerda abierta que se extiende de una Dp a la otra y su correspondiente 'anticuerda', seguida de la aniquilación del par:

Σ cuerda con orientación opuesta ⇒ carga opuesta bajo $B_{\mu\nu}$



$=$ ○ escalares Φ^i_{12} $+$ ☁ fotón A^α_{12} $+$ ○ fotino Ψ_{12} $+ \dots$

(La amplitud total resulta ser nula, por una cancelación entre lazos de bosones y fermiones en la descripción de cuerda abierta, o entre la atracción gravitacional (y dilatónica) y la repulsión "eléctrica" RR en la descripción de cuerda cerrada.)

Tenemos aquí entonces un primer ejemplo del hecho de que las cuerdas abiertas (A_α) y cerradas ($g_{\mu\nu}$) pueden dar descripciones alternativas de la misma física, propiedad conocida como "dualidad de cuerdas abiertas/cerradas".

[15: 10/1/20

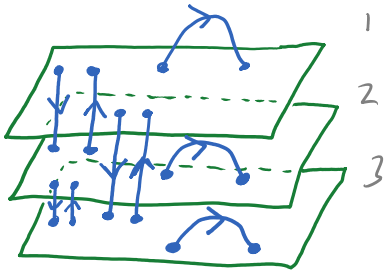
En la descripción de lazo de cuerda abierta, la normalización del diagrama está completamente determinada, y la

comparación con la descripción de cuerda cerrada le permitió a Polchinski deducir (en 1995) que

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_c \ell_c^{p+1}}$$

← D-brana es objeto NO perturbativo con tensión idéntica a Dp-brana p.165
· (más ligero que NS5: $T_{NS5} \propto \frac{1}{g_c^2}$)

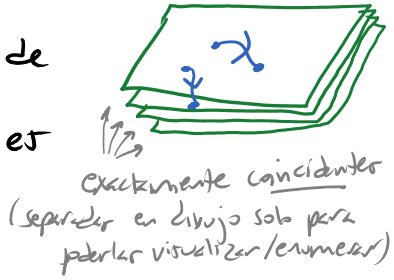
Otra propiedad importante de las D-branas, que ya se asomó en nuestra discusión reciente, es el hecho de que, cuando más de una D-brana está presente, las excitaciones del sistema incluyen cuerdas abiertas que se extienden entre distintas D-branas. En particular, en presencia de N Dp-branas paralelas, además de las cuerdas que cierran a cada D-brana consigo misma, debemos considerar a las que se extienden entre diferentes D-branas, en cualquiera de las 2 orientaciones posibles. Tenemos entonces un total de N^2 tipos de cuerda abierta, que denotaremos IJ, cada uno con



$$\begin{cases} \text{extremo inicial en D-brana número } I \\ \text{extremo final en D-brana número } J \end{cases} \quad 1 \le I, J \le N.$$

Al cuantizar, por cada estado de vibración que antes teníamos para la cuerda abierta asociada a una sola D-brana, ahora obtenemos N^2 estados, y los campos correspondientes naturalmente son matrices $N \times N$.

Cuando todas las Dp-branas se encuentran exactamente en el mismo sitio, la longitud mínima de todas las N^2 tipos de cuerda abierta es igual a cero, así que los estados



$$|\, p_\alpha ;\ \text{osciladores excitados} ;\ I, J \rangle \qquad p^2 = -m^2$$

↑ momento del centro de masa a lo largo de x^α

están todas en el mismo pie, y resultan intercambiables entre sí.

En particular, los estados no masivos están asociados a los campos matriciales

$$\Phi^i_{IJ}(x^\alpha) \ , \quad A^\tau_{IJ}(x^\tau) \ , \quad \Psi_{IJ}(x^\tau) \ .$$

Sabíamos que $\Phi^i_{II}(x^\tau)$ describen la posición de la I-ésima D-brana en las direcciones transversales x^i;

pero vemos que un sistema de N Dp-branas requiere $N^2 \times (9-p)$ coordenadas para ser descrito, en lugar de solo $N \times (9-p)$. (Esto es cierto incluso para $p=0$, que existe en IIA. Así que una D0-brana No es una partícula convencional:

)

Más interesante aún es el hecho de que el campo de norma es ahora una matriz $N \times N$, lo cual nos hace pensar que el grupo de norma será no abeliano.

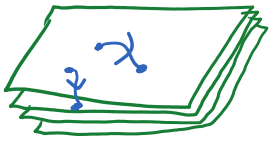
En efecto, se puede ver que las amplitudes de dispersión son invariantes bajo transformaciones $U(N)$ que mezclan a las N D-branas entre sí, y por tanto actúan de acuerdo con

$$|p_\alpha ; \text{osciladores} ; IJ\rangle \longrightarrow U_{I'I} U^{-1}_{JJ'} |p_\alpha ; \text{osciladores}, I'J'\rangle$$

(suma sobre I, J)

sobre los estados y

$$\phi_{IJ} \longrightarrow U_{I'I} \phi_{IJ} U^{-1}_{JJ'}$$



(rep adjunta de $U(N)$)

sobre los campos. Más aún, gracias a la existencia del campo de norma A^τ_{IJ}, estas transformaciones se pueden hacer de manera distinta en cada punto x^σ. Concluimos

entonces que la dinámica de una pila de N Dp-branes se describe por una teoría de norma con grupo U(N).

A bajas energías, la acción efectiva para los campos sin masa involucra una versión no abeliana de la acción de Born-Infeld, que para p=9 tiene la forma

$$S_{DBINA} = -T_{D9}\int d^{10}x\, \mathrm{Tr}\, S\left[e^{-\varphi}\sqrt{-\det(g_{\alpha\beta}+B_{\alpha\beta}+2\pi\alpha' F_{\alpha\beta})}\right]$$

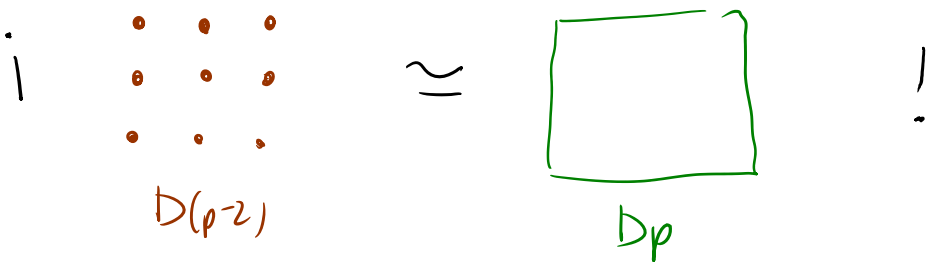
retracciones usando $D_\alpha X^i = \partial_\alpha X^i + i[A_\alpha, X^i]$ y campos $g_{MN}(X)$, $B_{MN}(X)$, $\varphi(X)$ (matriz)

Traza sobre índices U(N), considerando solo productos simétricos de F's y DX's (dejando fuera así términos con derivadas covariantes de F, que incluyen conmutadores) (serían en $S_{Dp,\alpha'}$) [Tseytlin, hep-th/9701125].

La forma correspondiente para p<9 puede deducirse a través de la antes mencionada dualidad T, que convierte Dp's en D(p±2)'s. Se encuentra que en S_{DBINA} para p<9 aparecen términos con conmutadores $[X^i, X^j]$ $\propto [\Phi^i, \Phi^j]$ [Myers, hep-th/9910053].

Un procedimiento similar para S_{WZNA} produce acoplamientos de Dp-branas con $C_{(p+3)}$, $C_{(p+5)}$, etc. Es decir, una colección de Dp's puede portar carga de $D(p+2)$, $D(p+4)$, etc.

Este es el llamado 'efecto dieléctrico' [Myers]:



Hasta aquí discutimos solo la parte bósonica de la acción. La extensión supersimétrica para el caso abeliano ha sido analizada en un fondo plano en [Aganagic, Popescu, Schwarz, hep-th/9610249, 9612080] y para un fondo general en

[Cederwall, von Gussich, Nilsson, Westerberg, 9610148,
" + Sundell, 9611159].

Para el caso no abeliano, ver

[Collinucci, de Roo, Eenink, hep-th/0205150
Bergshoeff, de Roo, Sevrin, 0011264].

Para intensidades de campo $F_{\alpha\beta}$ (y $D_\alpha \Phi^i$) pequeñas en unidades de $1/2\pi\ell_c^2$, basta retener solo los términos de orden F^2 en la expansión de S_{DBINA},

$$S_{DBINA} \simeq \underbrace{N T_{Dp} V_p}_{\text{branas sin excitar}} + \frac{1}{2g_{YM}^2}\int d^{p+1}x\, Tr\left\{F^2 + (D\Phi)^2 + [\Phi,\Phi]^2 + \dots\right\}$$

así que la acción efectiva para N Dp-branas a ultra-bajas energías resulta ser súper-Yang-Mills $\mathcal{N} = 2^{\left[\frac{7-p}{2}\right]}$ en $p+1$ dimensiones, con grupo de norma $U(N)$ y

$$\boxed{g_{YM}^2 = (2\pi)^{p-2} g_c \ell_c^{p-3}}$$

(¡Este contacto con teorías de norma se usa en fenomenología de cuerdas para intentar obtener el ME!)

(# de colores = # de D-branas !)

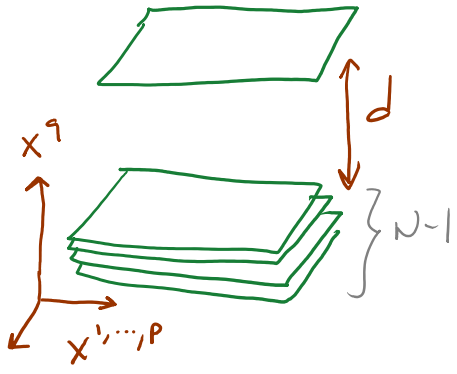
($\mathcal{N}=4$ en $3+1$ ($p=3$))

Como dijimos en la p.100, el potencial $V(\Phi) = Tr\,[\Phi,\Phi]^2$ permite tener un valor esperado para Φ^i en el vacío, p.ej.

$$\langle \Phi^i \rangle = d\,\delta^i_q\, diag(\underbrace{0,0,0,\dots,1}_{N-1})$$

, que rompe

$U(N) \longrightarrow U(N-1)\times U(1)$.



Sabemos que en el lenguaje de D-branas esto significa separar a la N-ésima Dp de las otras $N-1$, una distancia d a lo largo de x^q.

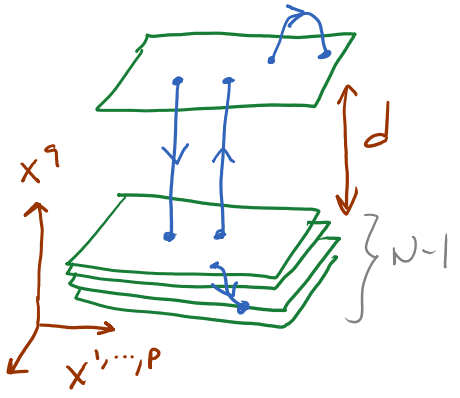
Gratis en $(D\Phi)^2 \subset S_{SYM}$

Por el acoplamiento $\mathrm{Tr}[\Phi, A]^2$, este valor esperado para Φ^9_{NN} da masa a $N-1$ de los N^2 componentes matriciales del campo de norma, A^α_{NI}, $I=1,\dots,N-1$.

(Y los otros acoplamientos en SYM $\mathcal{N}=2^{\frac{7-p}{2}}$ implican que similarmente Φ^i_{NI} y Ψ_{NI} adquieren masa $\propto d$.)

Esto es el mecanismo de Higgs: los A^α_{NI} son como bosones W.

Lo interesante es que en el lenguaje de D-branas, este efecto tiene una interpretación geométrica muy clara: las componentes A^α_{NI}, Φ^i_{NI}, Ψ_{NI} con $I \neq N$ adquieren masa $\propto d$ por la sencilla razón de que provienen de cuerdas fundamentales que van de la D-brana número N a cualquiera de las otras $N-1$, y por tanto tienen una energía mínima $d/2\pi l_c^2$ debida a su longitud d! [Witten, hep-th/9510135].



15:01/04/24

Ahora que entendemos bien tanto a las Dp-branas negras como a las Dp-branas, podemos compararlas.

Vimos que la Dp-brana negra extremal (que posee la masa mínima posible para la carga dada) tiene (p. 166)

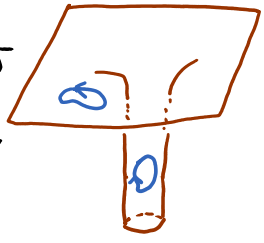
masa $M = \frac{N V_p}{(2\pi)^p g_c \ell_c^{p+1}}$ y carga $Q = N$

bajo el campo de norma Ramond-Ramond $C_{M_1 \cdots M_{p+1}}$.

Una pila de N Dp-branas sin excitar tiene exactamente la misma masa y carga [Polchinski, hep-th/9510017], y ambos sistemas preservan justo las mismas (super)simetrías.

Esto sugiere que la D-brana negra no es otra cosa que los campos de supergravedad (gravitacional, RR, dilatónico) macroscópicos generados por dicha pila de D-branas.

Para ser más precisos, sabemos que el radio de curvatura característico de la Dp-brana negra es $L^{7-p} = c_p g_c N \ell_c^{7-p}$, por lo que esta solución de SUGRA es confiable solo si $g_c N \gg 1$ (y si la constante de cuerdas $g_c e^{\varphi} \ll 1$).



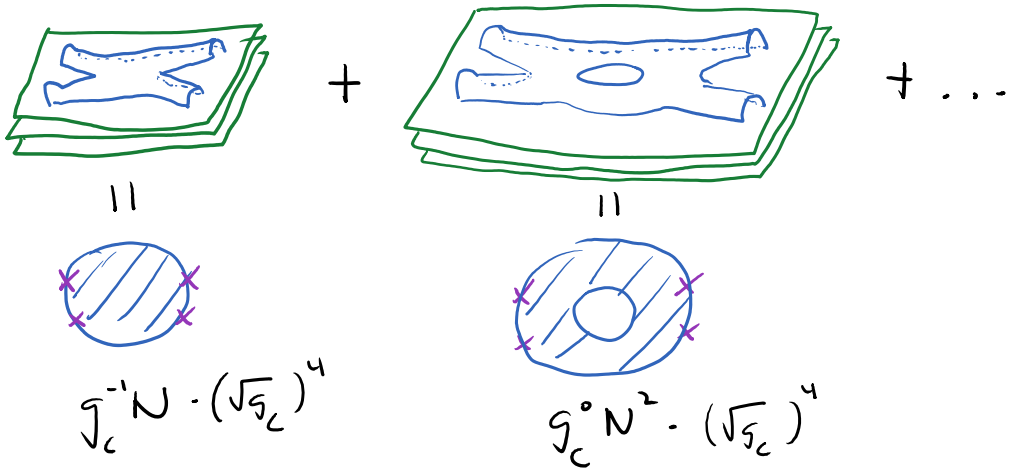
este φ NO incluye valor asintótico $\varphi_\infty \equiv \ln g_c$

L16: 12/11/20

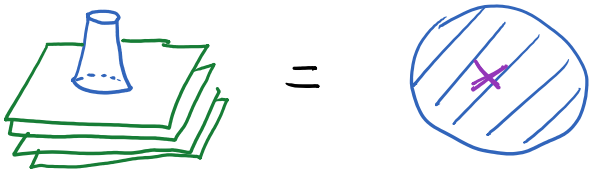
Por otro lado, $g_c N$ es precisamente el parámetro

$\propto g_{YM}^2 N$ constante de 't Hooft

que controla la expansión perturbativa de las cuerdas abiertas que describen excitaciones de la pila de D-branas:



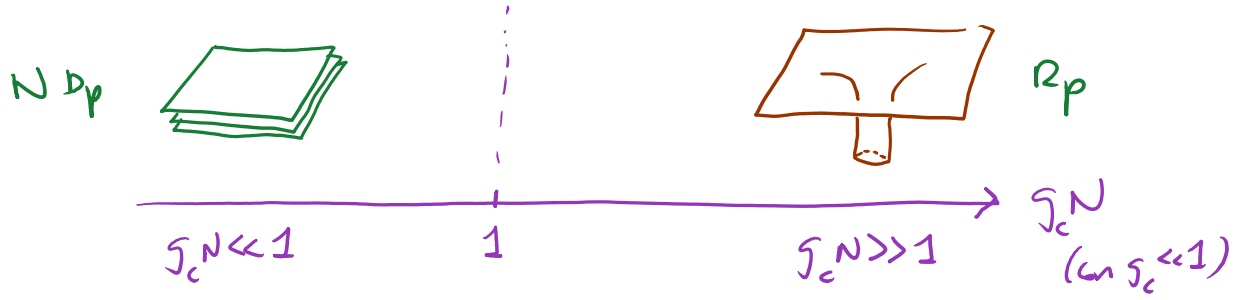
Cada nuevo agujero en la hoja de mundo (línea de mundo de extremo-'antiextremo') contribuye un factor de $g_c = (\sqrt{g_c})^2$ (por número de Euler de la nueva topología) y de N (porque puede estar situado sobre cualquiera de las N D-branas). Y el mismo factor $g_c N$ controla la emisión de gravitones por parte de la pila de D-branas,



Podemos entonces entender a esta pila como viviendo en un fondo plano y describir a sus excitaciones en una expansión perturbativa de cuerdas abiertas solo en la

medida en que $g_c N \ll 1$.

La conclusión parece ser por tanto que la Dp-brana negra extremal y la pila de N Dp-branas en Minkowski son 2 descripciones alternativas del mismo sistema físico, válidas en regímenes mutuamente excluyentes:



Se tiene una situación análoga para la cuerda negra (NS1-brana) y una pila de N cuerdas fundamentales (F1s).

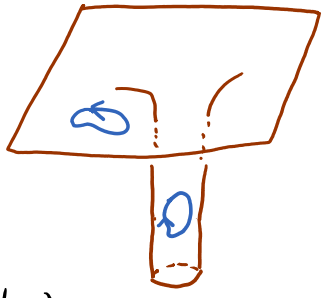
Ambas relaciones se pueden poner a prueba comparando la entropía (en el caso no extremal) cerca del punto de transición entre las 2 descripciones, que resulta ser del orden de magnitud correcto. Esto es el contenido del llamado principio de correspondencia [Horowitz, Polchinski, hep-th/9612146].

Hasta aquí, la relación que se tiene No es una dualidad, puesto que las 2 descripciones son válidas en regímenes distintos. Es decir, lo que tenemos en

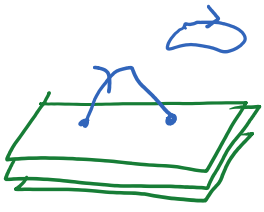
mente es en realidad un solo sistema/teoría, N D-branes inmersas en el fondo de SUGRA que ellas mismas generan, y diferentes aspectos se vuelven relevantes dependiendo del valor de $g_c N$.

Como veremos más adelante, algunos consideran que la correspondencia holográfica (que SÍ es una dualidad) proviene directamente de esta "no dualidad" a nivel de cuerdas. Pero esto ciertamente NO es lo que argumentó Maldacena.

El punto es que, si bien la forma explícita de la solución de Dp-brana negra, y la descripción de sus excitaciones a través de cuerdas cerradas, está bajo control a nivel de cálculos perturbativos solo cuando $g_c N \gg 1$, es posible imaginar una extensión de esta misma descripción de cuerdas cerradas al régimen no perturbativo $g_c N \lesssim 1$.

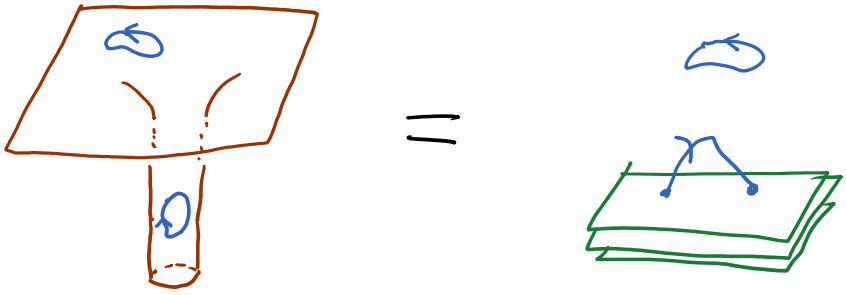


Similarmente, si bien la pila de N Dp-branas en el fondo plano y las cuerdas abiertas y cerradas que representan sus excitaciones



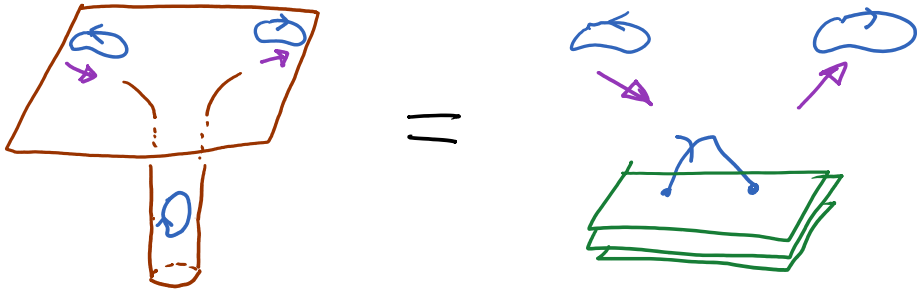
están bajo control a nivel de cálculos perturbativos solo cuando $g_c N << 1$, es posible imaginar una extensión de esta misma descripción de cuerdas abiertas y cerradas al régimen no perturbativo $g_c N \gtrsim 1$.

Desde esta perspectiva, SÍ tendríamos entonces una dualidad a nivel de cuerdas, puesto que ambas descripciones serían válidas simultáneamente:



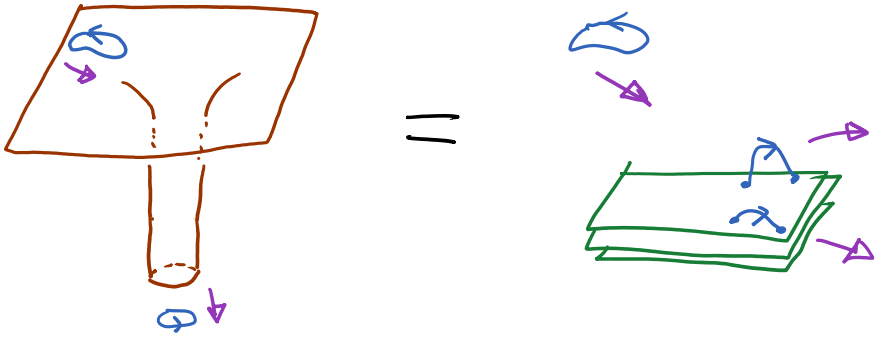
¿Cuerdas abiertas? $\longleftrightarrow$ ¿Espaciotiempo curvo?

En favor de la existencia de esta dualidad, se mostró que ambas descripciones conducen al mismo resultado para las amplitudas de dispersión de cuerdas cerradas a bajas energías,



[Klebanov, Thorlacius ; Gubser, Hashimoto, Klebanov, Maldacena ; Garousi, Myers ; etc. ; ver p.ej. el artículo de revisión de Klebanov y Hashimoto, hep-th/9611214],

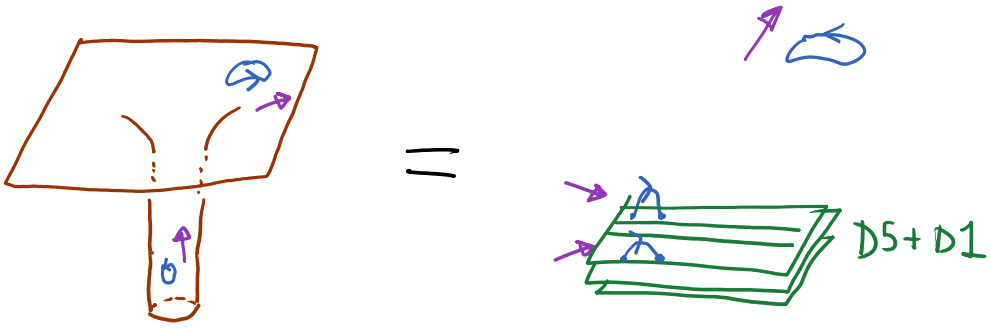
y (en el caso $p=3$) para la amplitud de absorción de cuerdas cerradas,



[Klebanov, hep-th/9702076 ; etc.]

Apunte en la misma dirección el hecho de que un sistema de D-branas es capaz de reproducir la tasa de radiación de Hawking de la brana negra correspondiente, incluyendo el llamado 'factor de cuerpo gris' debido a la curvatura del espaciotiempo,

~ filtro dependiente de frecuencia ω



[Maldacena, Strominger, hep-th/9609026]

Esta habilidad de las cuerdas abiertas para reproducir geometría curva es otra manifestación de la dualidad de cuerdas abiertas/cerradas que ya habíamos mencionado al hablar de la tensión de las D-branas (p. 185).

La existencia de esta dualidad entre Rp-branas negras y Dp-branas fue tomada por Maldacena como punto de partida para la deducción de SU correspondencia.

L14: 04/10/16

El primer paso es enfocarse en el caso $p=3$, que tiene la propiedad especial de que en la R3-brana el dilatón es constante (recordar que $e^{\phi} = g_c H(r)^{(3-p)/4}$), por lo que la solución de SUGRA tiene excitados solo a la métrica y la intensidad de campo $G_{MNPQR} = *G_{MNPQR}$:

$$ds^2 = H(r)^{-1/2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + H(r)^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

$$C_{0123} = g_c^{-1}(1 - H^{-1}(r))$$

Ω_5: 5-esfera

$*$: porque es autodual

$$\Rightarrow G_{r0123} = g_c^{-1} H^{-2}(r) H'(r), \quad G_{\theta_1 \cdots \theta_5} = g_c^{-1} r^5 H'(r) \, v(\Omega_5)$$

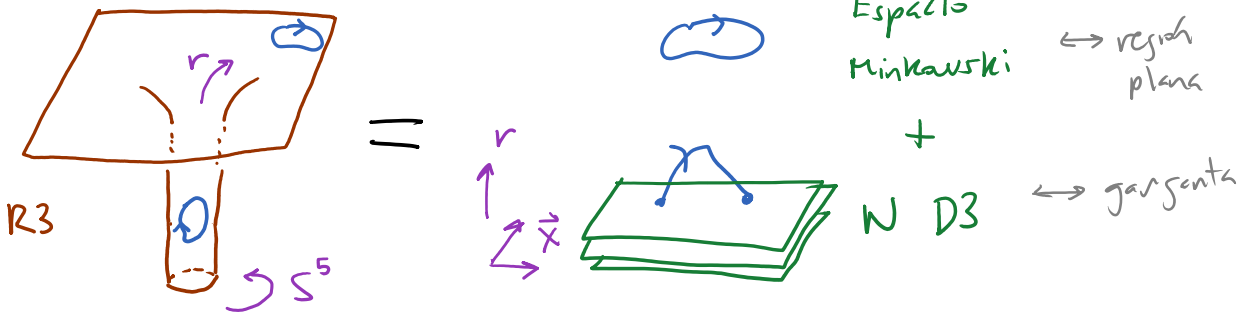
$$\pi^3 = \Omega_5 = \int d\theta_1 \cdots d\theta_5 \, \operatorname{sen}^4\theta_1 \operatorname{sen}^3\theta_2 \operatorname{sen}^2\theta_3 \operatorname{sen}\theta_4$$

con $H(r) = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^4$, $L^4 = 4\pi N g_c \ell_c^4$,

Para que sea confiable, basta por tanto con que $g_c N \gg 1$ (curvatura pequeña, $L \gg \ell_c$) y $g_c \ll 1$ (cuerdas débilmente acopladas).

(Para $p \neq 3$ $g_c e^{\varphi(r)} \ll 1$ impondría una restricción sobre r. — este φ NO incluye valor asintótico $\varphi_\infty \equiv \ln g_c$)

Empezamos entonces suponiendo la equivalencia



Matemáticamente, ↔ región plana

↔ garganta

(Bajo control cuantitativo si $g_c \ll 1$, $g_c N \gg 1$)

(Bajo control cuantitativo si $g_c \ll 1$, $g_c N \ll 1$)

El segundo paso es considerar a este sistema a ultra-bajas energías:

$$E \ll \frac{1}{\ell_c}, \frac{1}{L}$$

Dado que $L = (4\pi g_c N)^{1/4} \ell_c$, sabemos que

$$\frac{1}{L} \ll \frac{1}{\ell_c} \quad \text{si} \quad g_c N \gg 1$$

y $\frac{1}{L} >> \frac{1}{\ell_c}$ si $g_c N << 1$,

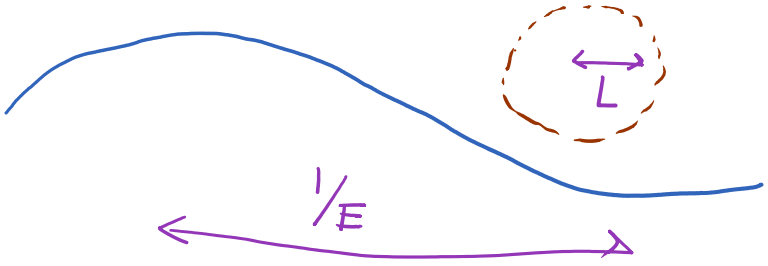
así que la condición que estamos imponiendo es una sola: $E << 1/L$ ó $E << 1/\ell_c$, respectivamente.

En este régimen, suceden 2 cosas importantes:

I) En cada lado de la correspondencia, obtenemos 2 sistemas desacoplados.

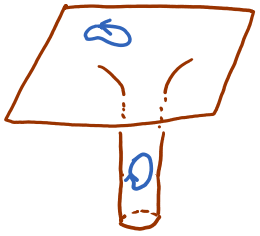
En la RB, se sabe que la sección eficaz de absorción de modos no masivos por parte de la brana negra es $\sigma \propto (EL)^8$ [Klebanov].

Pudiera parecer que la brana negra siempre debiera absorber cualquier cosa que se le arroje, pero lo que sucede es que su tamaño característico es L, y resulta por tanto invisible para modos con longitud de onda $1/E >> L$.



Los modos de SUGRA (cuerdas cerradas no masivas) en el exterior de la garganta ($r > L$) esencialmente se

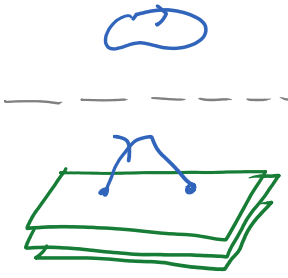
propagan entonces en un fondo plano, y no pueden penetrar al interior. A la inversa, los modos en el interior de la garganta no tienen energía suficiente para escalar el potencial gravitacional y escapar al exterior. Las 2 regiones entonces NO pueden comunicarse una con otra.



En la descripción con D-branas, sabemos que se tiene la misma probabilidad de absorción [Klebanov], así que igualmente obtenemos 2 sistemas desacoplados: las cuerdas cerradas en el fondo plano NO pueden convertirse en abiertas, ni vice versa.

II) En cada lado de la dualidad, la descripción se simplifica drásticamente.

Del lado de las D-branas, las cuerdas cerradas IIB en fondo plano se reducen a los modos de SUGRA IIB libres



(la gravedad se acopla a la energía, y por ello es no renormalizable: fuertemente acoplada a altas = irrelevante.

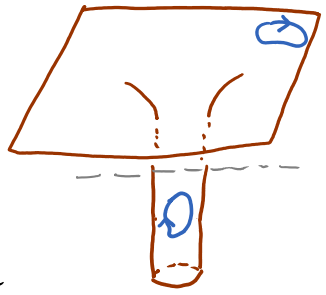
energía y débilmente acoplada (→ libre a bajas energías), y las cuerdas abiertas sobre las D3-branas se reducen a los modos no masivos, descritos por SYM $\mathcal{N}=4$ ($\equiv$ MSYM) $U(N)$ en 3+1 dimensiones (que es una teoría todavía interactuante).

Del lado de la D3-brana negra, hay que tomar en cuenta que $g_{tt} = -(1+L^4/r^4)^{-1/2}$, por lo que hay un efecto de corrimiento al rojo. Un objeto con energía propia (medida localmente) E_{prop} en un punto r tiene energía

$$E_\infty = \sqrt{-g_{tt}}\, E_{prop} = \left(1+\frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/4} E_{prop}$$

medida por un observador en infinito. Esta última es la noción de energía $E = E_\infty$ sobre la cual hemos impuesto la restricción $E \ll 1/\ell_s, 1/L$, porque la noción de tiempo t en la D3 cuando $r \to \infty$ coincide con la que teníamos para las D3.

En cualquier sitio $r \gtrsim L$, estamos pidiendo entonces que $E_{prop} \ll 1/\ell_c, 1/L$, y reducimos por tanto a SUGRA libre. Ya habíamos visto que estos modos se propagan en un fondo plano.



Pero en la región cercana al horizonte $r \ll L$, podemos tener E_{prop} arbitrariamente grande y aún así satisfacer $E_\infty \simeq (\frac{r}{L}) E_{prop} \ll 1/\ell_c, 1/L$.

En esta región $H(r) = 1 + L^4/r^4 \simeq L^4/r^4$ y el fondo se simplifica a

$$ds^2 = \underbrace{\frac{r^2}{L^2}}_{H^{-1/2}} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \underbrace{\frac{L^2}{r^2}}_{H^{1/2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{r^2}{L^2} dx_\mu dx^\mu + \frac{L^2}{r^2} dr^2\right)}_{\text{Espaciotiempo anti-de Sitter}} + \underbrace{L^2 d\Omega_5^2}_{\text{5-esfera}}$$

(4+1)-dimensional con radio L — con radio L

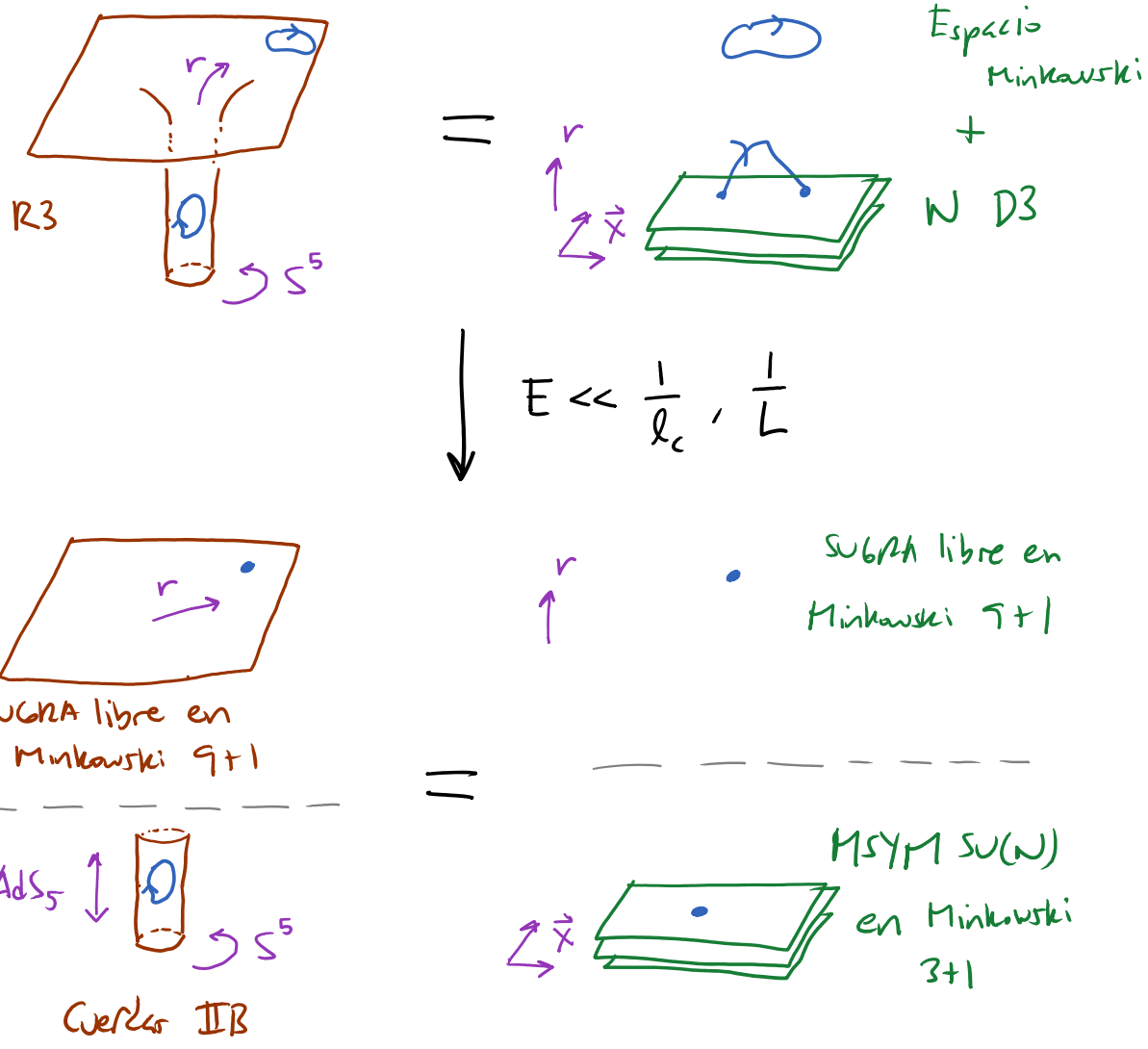
$$G_{r0123} = g_c^{-1} \frac{4r^3}{L^4}, \quad G_{\theta_1 \cdots \theta_5} = g_c^{-1} 4L^4 \nu(\Omega_5).$$

ν mide el flujo a través de S^5

Sobre este espacio $AdS_5 \times S_5$ con N unidades de flujo RR a través de S_5 se propagan todos los modos de la teoría de cuerdas IIB, incluyendo los

No perturbativos como Dp-branas, NS5-branas, etc.

En resumen, tenemos



miércoles, 23 de mayo de 2012 09:32 a.m.

Dado que teníamos una equivalencia desde el principio, y de los 2 componentes desacoplados que obtenemos en cada lado uno coincide directamente, debemos concluir que los 2 componentes restantes también son equivalentes:

> Teoría de Cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$ con N unidades de flujo RR a través de la S^5 $=$ MSYM con grupo $SU(N)$ en Minkowski $3+1$

← No $U(N)$, ver más adelante

¡¡ Esta conclusión es mucho más sorprendente que el punto de partida !!

L16: 03/04/24

Hemos presentado la deducción aquí en términos de la descripción aproximada que se tiene del régimen a ultra-bajas energías $E \ll 1/\ell_c, 1/L$, pero esta descripción se vuelve un enunciado exacto en el límite $E\ell_c, EL \to 0$.

La forma más conveniente de formular esta idea es decir que elegimos trabajar en unidades donde

> $\ell_c \to 0$ mientras mantenemos $g_c N$ fijo $(\Rightarrow L \to 0)$,

lo cual garantiza que $E\ell_c, EL \to 0$.

decoupling

Esto se conoce como el límite de Maldacena, o "de desacoplamiento", o "cercano al horizonte". (near-horizon) En estas unidades, E puede tomar valores arbitrariamente grandes sin que regresemos a la dualidad de cuerdas abiertas/cerradas que teníamos originalmente. Esto es muy útil porque tiene perfecto sentido considerar a las cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$ y a MSYM con energías arbitrariamente altas, y la afirmación de Maldacena es que la correspondencia entre ellas es válida para cualquier valor de E, g_s y N.

Vale la pena abundar un poco en este punto. Si tomamos p.ej. QED sin masa en 3+1 dim,

$$S_{QED} = \int d^4x \left[\bar{\Psi}\, i\gamma^\mu D_\mu \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right],$$

$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

sabemos que el acoplamiento g, que por ser adimensional no cambia clásicamente bajo reescalamientos de la energía (es clásicamente "marginal" ≡ "estrictamente renormalizable"), tiene

$$\beta(q) \equiv E\frac{dq}{dE} = 0 + \frac{q^3}{12\pi^2} > 0 \,,$$

escala de renormalización; nivel árbol; 1 lazo

y se vuelve pequeño a bajas energías (q es "marginalmente irrelevante"), $q(E) \xrightarrow[E\to 0]{} 0$. Teoría "libre en el IR"

(Esto es distinto al caso con masa, donde $q(E)$ deja de correr fuera del radio de Compton, $E < 1/m$.)

Sabemos entonces que QED sin masa es aproximadamente libre a bajas energías, y exactamente libre cuando $E = 0$:

$$S_{QED} \xrightarrow[E\to 0]{} \int d^4x \left[\bar{\psi}\, i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right]$$

$$= S_{Dirac} + S_{Maxwell} \,.$$

El punto que queremos resaltar es que, a pesar de que hemos obtenido esta teoría libre tomando un límite $E \to 0$, tiene perfecto sentido considerar $S_{Dirac} + S_{Maxwell}$ a cualquier energía, sin que ello implique volver a S_{QED}.

Habiendo obtenido $S_{Dirac} + S_{Maxwell}$ como el límite de ultra-bajas energías de QED sin masa, queda claro que esta teoría necesariamente tendrá la misma forma a cualquier energía: $g=0$ es lo que llamamos un punto fijo del grupo de renormalización ($\beta(g=0)=0$).

Claro que esta independencia de la escala energética es obvia por tratarse de una teoría libre sin ningún parámetro dimensional: el punto fijo que hemos obtenido es "trivial" o "gaussiano".

Lo que ha ocurrido en nuestra deducción de la correspondencia es hasta cierto punto análogo: empezando con la acción completa de los N D3-branas, que esquemáticamente es

$$S_{D3} = \int d^4x \left\{ \underbrace{Tr(F^2 + \dots)}_{S_{MSYM}} + \underbrace{l_c^4 Tr(F^4 + \dots) + \dots}_{\text{términos con acoplamiento de dimensión negativa}} \right\},$$

S_{MSYM}: acoplamientos adimensionales (marginales)

términos con acoplamiento de dimensión negativa ("irrelevantes" ≡ "no renormalizables")

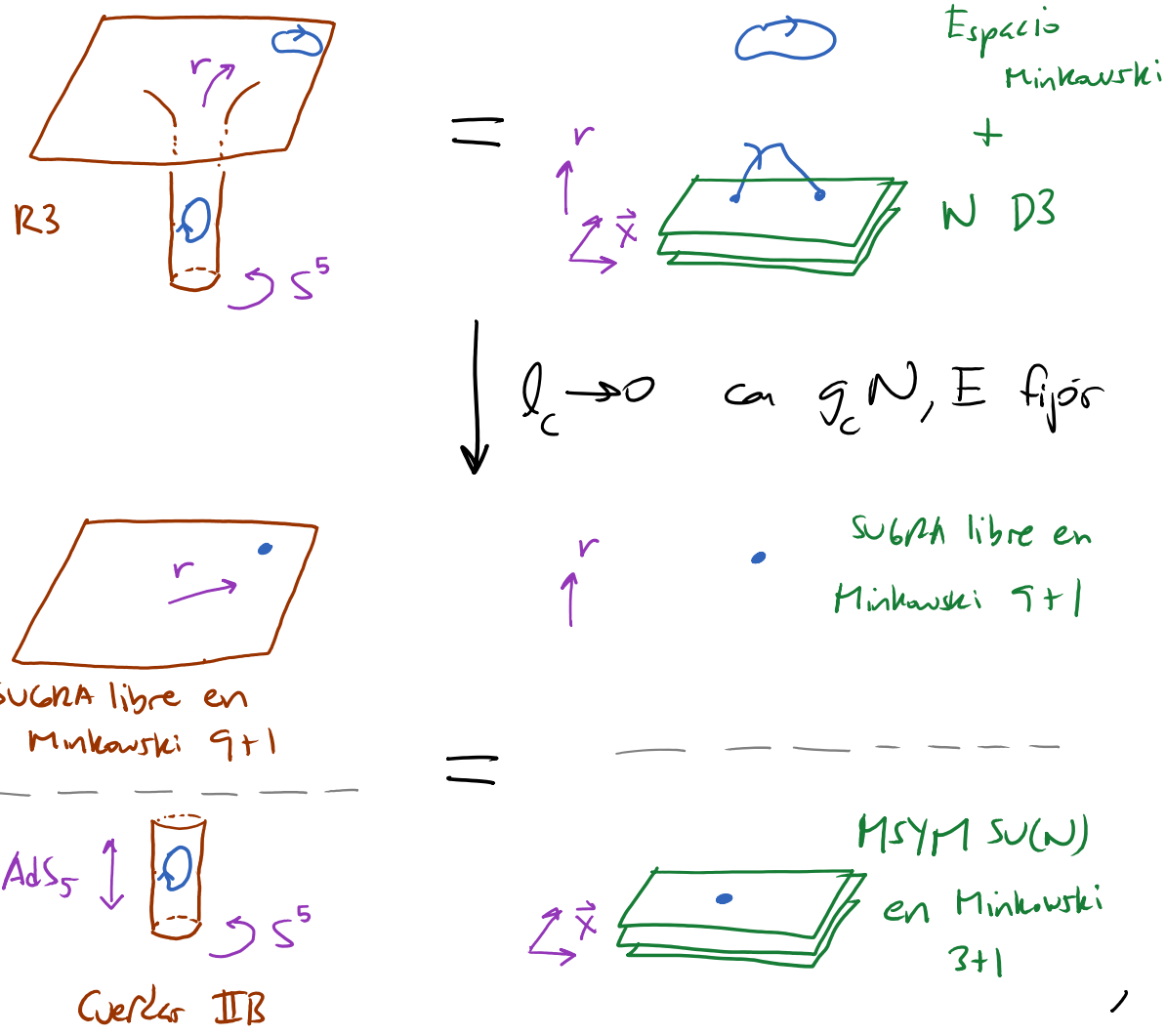
encontramos que $S_{D3} \xrightarrow[E \to 0]{} S_{MSYM}$,

y tiene perfecto sentido considerar a S_{MSYM} por sí sola a energías arbitrariamente grandes. Este es el punto que se vuelve evidente si consideramos el límite de Maldacena como $l_c \to 0$ (con $g_c N$ fijo), porque E puede ser entonces arbitraria.
Si en verdad S_{MSYM} es lo que se obtiene en el límite $E \to 0$ ($o\ l_c \to 0$) de S_{D3}, entonces queda claro que esta teoría debe ser invariante bajo reescalamiento de E (como de hecho afirmamos en la p. 137): es un punto fijo.
Lo interesante del asunto es que se trata de una teoría INTERACTUANTE: es un punto fijo "no trivial".

Relacionado con el hecho de que, del lado de las D3 tomamos primero $El_c, EL \to 0$ y al final de todos modos podemos considerar E arbitrarios en MSYM, sin que ello implique que regresamos a $S_{D3} + S_{SUGRA}$, del lado de la R3-brana negra, aún cuando en la deducción consideramos primero $r/L \to 0$, después del límite de Maldacena podemos tomar r arbitrario en la geometría AdS_5 resultante, incluyendo $r \gg L$, sin que ello

implique que regresamos a la región (asintóticamente) plana.

En resumen, después de tomar el límite

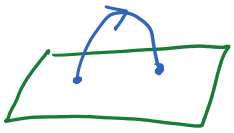


cualquier punto en AdS_5, $0 \le r < \infty$, corresponde a estar todavía dentro de los D3, a nivel de MSYM.

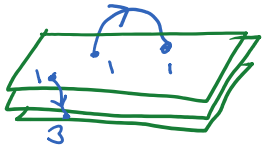
L17: 17/11/20

La razón por la cual al final hemos escrito el grupo de norma como SU(N) en lugar de U(N) es la siguiente.

Recordemos primero que los $9-p$ campos escalares $\Phi^i(x)$ sobre una Dp-brana describen



la posición de la brana en los $9-p$ direcciones transversales. Para una pila de N D3-branas, $\Phi^i(x)$ se vuelven campos matriciales,



$$\Phi^i(x) = \Phi^i_{IJ}(x) = \Phi^i_A(x)\, T^A$$

$I,J = 1,2,\ldots N$; T^A generador de $U(N)$: hermítico

con $\Phi^i_{11}(x)$, $\Phi^i_{22}(x)$, $\Phi^i_{33}(x)$, ... la posición de la D3-brana número $1, 2, 3, \ldots$

Podemos ver entonces que

$$\Phi^i_{cm}(x) \equiv \frac{1}{N}\left[\Phi^i_{11}(x) + \Phi^i_{22}(x) + \Phi^i_{33}(x) + \ldots\right] = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\left[\Phi^i(x)\right]$$

describe la posición del centro de masa de la pila, mientras que

$$\Phi^i_{rel,\,IJ}(x) \equiv \Phi^i_{IJ}(x) - \frac{1}{N}\,\Phi^i_{cm}(x)\,\delta_{IJ}$$

describe a las posiciones relativas (además de los grados de libertad fuera de la diagonal).

Pero

$$\overline{\Phi}^{i}_{IJ}(x) = \frac{1}{N}\overline{\Phi}^{i}_{cm}(x)\,\delta_{IJ} + \overline{\Phi}^{i}_{rel,IJ}(x)$$

$\overline{\Phi}^{i}_{cm}$: traza; $\overline{\Phi}^{i}_{rel,IJ}$: Hermítica, sin traza

es precisamente la descomposición

$$U(N) \simeq U(1) \times SU(N)$$

$U(N)$: unitarios; $U(1)$: $\{e^{i\varphi}\}$; $SU(N)$: unitarios c/ $\det = 1$

($\leftrightarrow$ hermíticos $\leftrightarrow$ $\mathrm{Tr} = 0$ a nivel del álgebra de Lie)

Para ser más exactos,

$$U(N) = \frac{U(1) \times SU(N)}{\mathbb{Z}_N},$$

porque la matriz $e^{i2\pi/N}\mathbb{1}_{N\times N}$ (o cualquier otra raíz N-ésima de 1) en realidad sí forma parte de $SU(N)$, dado que $\det\left(e^{i2\pi/N}\mathbb{1}\right) = 1$: $\mathbb{Z}_N$ es el 'centro' de $SU(N)$.

La diferencia entre trabajar con MSYM $U(N)$ ó $SU(N)$ es entonces incluir o dejar fuera a los grados de libertad del centro de masa (junto con sus superparejas).

Como esperaríamos desde el punto de vista físico,

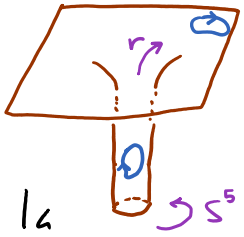
estos grados de libertad $U(1)$ están desacoplados del resto, porque no contribuyen a los conmutadores que figuran en todas las interacciones en MSYM.

La teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$ no tiene ningún sector desacoplado de todo lo demás, así que solo podría ser dual a MSYM $SU(N)$.

Antes de tomar el límite de Maldacena, del lado de la D3-brana, los grados de libertad $U(1)$ corresponden también a la posibilidad de desplazar a la brana. Su origen es el hecho de que, por invariancia bajo traslaciones, existen soluciones solitónicas ubicadas en cualquier posición X^i_{D3} (que se escriben con $r \equiv \sqrt{\sum_{i=4}^{9} (X^i - X^i_{D3})^2}$). Como todas tienen la misma energía $M = N T_{D3} V$, el deformar de cualquiera de estas soluciones a cualquiera de sus vecinas no cuesta energía. Se puede mostrar que, al cuantizar, estas fluctuaciones infinitesimales de los campos dan lugar a partículas sin masa, desacopladas de las demás fluctuaciones de los campos, conocidas como las

"coordenadas colectivas" del solitón (Esto es un ejemplo particular del teorema de Goldstone: siempre que el vacío de una teoría de campo rompe espontáneamente una simetría continua global, aparecen en el espectro partículas sin masa.)

Así que, en resumidas cuentas, del lado de la R3 los modos U(1) nos informan dónde en el espacio plano decidimos colocar la garganta.



Después de tomar el límite de Maldacena, la garganta se simplifica a $AdS_5 \times S^5$ y se desacopla de la parte plana. Cuando consideramos a la teoría de cuerdas IIB definida únicamente sobre $AdS_5 \times S^5$, ya no resulta natural entonces tener a los grados de libertad que nos informan en qué lugar del espacio plano se encuentra la garganta. Es por esta razón que la equivalencia que se obtiene involucra sólo a la parte SU(N) de MSYM.

(Otra posibilidad es sí retener al U(N) completo, en el entendido de que la parte U(1) debe identificarse

con ciertos grados de libertad conocidos como 'singletones' o 'doubletones', que se agregan a mano y esencialmente viven solo en el infinito de AdS_5, que hubiera sido el punto de 'unión' con la región asintóticamente plana. Ver p.ej. MA600 p. 58 y refs. que ahí se citan.)

Un punto adicional es que, si en verdad la física completa de MSYM es dual a la teoría de cuerdas IIB, incluyendo excitaciones con energía arbitrariamente grande, entonces en esta teoría gravitacional debemos considerar no solo la geometría $AdS_5 \times S^5$ que obtuvimos a partir de la R3 extremal, sino deformaciones arbitrariamente grandes de ella (y de los otros campos de cuerdas cerradas), incluyendo, p.ej., hoyos negros. Lo único que NO podemos cambiar es el hecho de que el fondo es $AdS_5 \times S^5$ (con N unidades de flujo RR sobre la S^5) EN EL INFINITO, porque modificar eso requeriría energía infinita.

Así que, análogamente a como un/a relativista suele trabajar con espaciotiempos asintóticamente planos, nosotros

deberemos trabajar con fondo asintóticamente $AdS_5 \times S^5$.

El enunciado más preciso de la correspondencia es entonces

MSYM SU(N) en 3+1 dim	=	Cuerdas IIB en fondo asintóticamente $AdS^5 \times S^5$

Particular	vs.	Cuerdas
SIN gravedad	vs.	CON gravedad
CON color	vs.	SIN color
Espaciotiempo PLANO	vs.	Espaciotiempo CURVO
3+1 dim	vs.	9+1 dim

A pesar de las marcadas diferencias, Maldacena nos dice que estas 2 teorías son completamente equivalentes: existe un diccionario que traduce entre ellas. Esta equivalencia suena completamente absurda; pero 26 años y 19,500 citas después, ¡sigue pareciendo cierta!

Como prometimos desde el principio del curso, esta dualidad representa un nuevo paradigma teórico: la

existencia o inexistencia de la gravedad, y el número de dimensiones, ¡dependen del punto de vista que adoptemos!

Para evitar confusiones, es importante tener presente que NINGUNA de estas 2 teorías describe a nuestro universo. Se trata de 2 universos imaginarios, ¡que de manera milagrosa resultan ser uno mismo!

Vale la pena también enfatizar que lo que hemos presentado aquí (que es la deducción original de Maldacena — ver también p.ej. MAGOO, hep-th/9905111) NO constituye una demostración rigurosa. Se trata solo de una deducción heurística, porque

i) Hemos partido de suponer la equivalencia entre la R3-brana negra y las D3-branas.

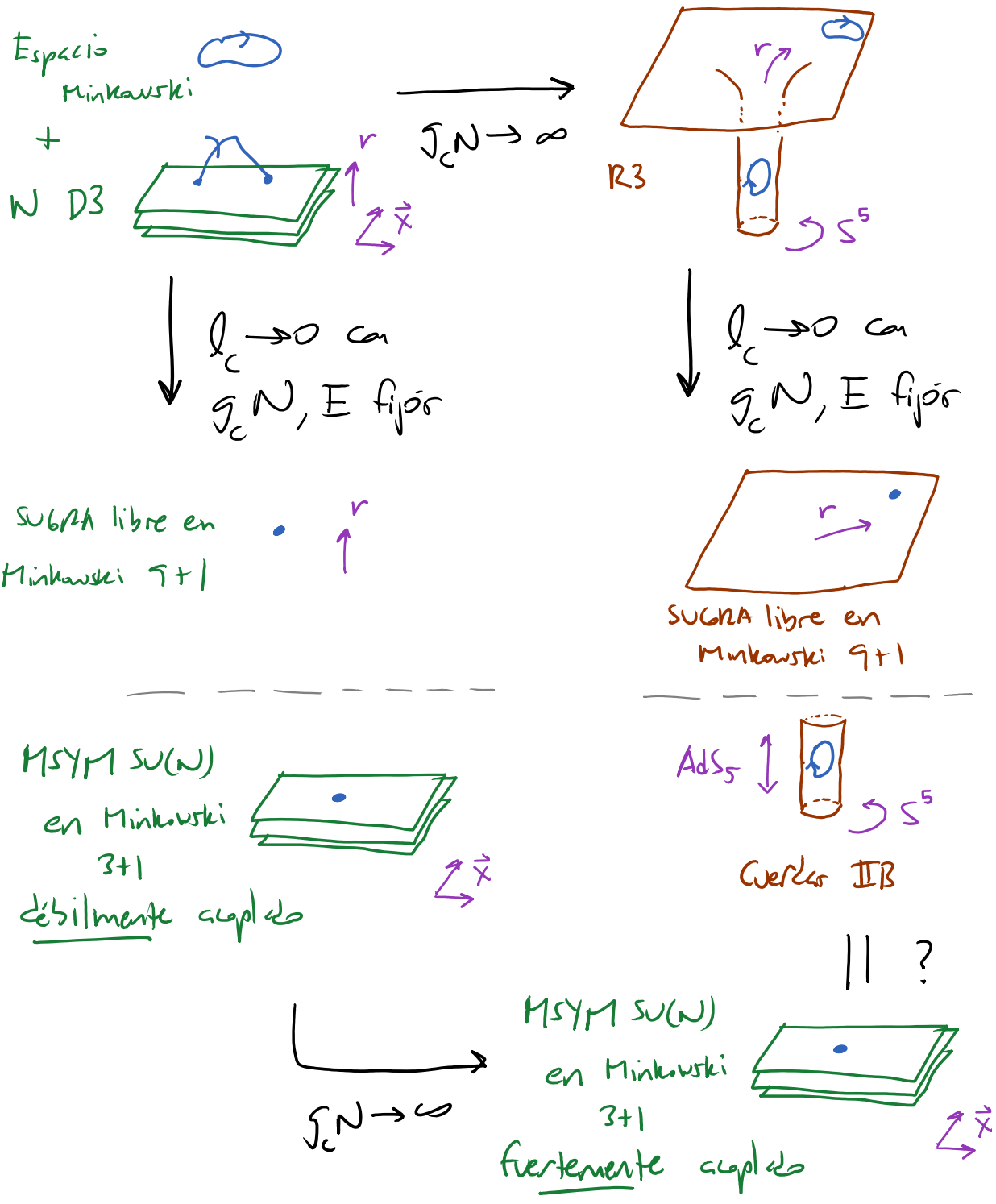
ii) A nivel de cuerdas, en ambos lados de la dualidad hemos utilizado solamente una formulación perturbativa.

iii) En el enunciado final, NO tenemos una definición precisa y completa (no perturbativa) de la teoría de cuerdas IIB en AdS (y la presencia del campo RR

dificulta incluso los cálculos de cuerdas perturbativas).

Habíamos mencionado que el punto i) es de hecho controvertido incluso entre cuerdistas. Una deducción que intenta prescindir de él parte de la R3 y los D3 como descripciones complementarias (NO duales), relevantes para regímenes mutuamente excluyentes de $g_c N$, y luego utiliza el mismo límite de Maldacena para argumentar que MSYM y IIB en AdS deben ser equivalentes (duales) si los límites $g_c N \to \infty$ y $l_c \to 0$ conmutan (ver, p.ej., Myers & Vázquez, arXiv:0804.2423, o Polchinski, arXiv:1010.6134):

martes, 21 de agosto de 2012 05:08 p.m.



Por supuesto, con este argumento (que en principio pretende ser más conservador; ¡pero "deduciría" una dualidad a partir de una NO dualidad!) uno se queda con la preocupación de que, así como existe una discontinuidad en la descripción a nivel de cuerdas en $g_c N \simeq 1$, pudiera haber también una discontinuidad a ultra-bajas energías que nos impida igualar MSYM en IIB para $g_c N \gg 1$.
Esta incertidumbre parece comparable a la que conlleva el suponer que a nivel de cuerdas existe ya una dualidad.

En lo personal, me parece que lo más razonable, al menos en retrospectiva, es interpretar a toda la evidencia que tenemos a favor de la dualidad norma/gravedad como evidencia a favor de la existencia de una dualidad de cuerdas abiertas/cerradas.
(Para un intento de explorar esta dualidad a energías que son bajas pero están todavía fuera del límite

de Maldacena, es decir, energías que son bajas pero no "ultrabajas", $\frac{1}{L} \sim E \ll \frac{1}{l_c}$, ver p.ej. hep-th/0004187 y la explicación en la sección 2 de hep-th/0305257.)

L17: 08/04/24 L15: 06/10/16

A pesar de las limitaciones en cualquiera de las 2 versiones de) la deducción, a la fecha contamos con muchísima evidencia de que en verdad es cierta esta asombrosa equivalencia.

Podemos entonces invertir la lógica y simplemente suponer que la correspondencia es cierta, obteniendo así, a través de MSYM, una definición no perturbativa de la teoría de cuerdas IIB sobre un fondo asintóticamente anti-de Sitter. Esto no significa que la correspondencia se vuelve un enunciado vacío o tautológico, porque conocemos muchas propiedades de la teoría IIB de manera independiente. En particular, incluye a la gravedad, así que estamos afirmando que MSYM, de alguna manera escondida, ¡es una teoría de gravedad cuántica!

De hecho, la dualidad holográfica (en este y muchos otros ejemplos) nos da la definición más completa que tenemos de lo que es una teoría de cuerdas.

2. Diccionario y Evidencia de la Correspondencia

Para poder seguir avanzando, ahora sí nos conviene entender con mayor claridad qué cosa es AdS. Para ser concretos, nos restringiremos al caso $(4+1)$-dimensional, que será el que más usaremos; pero la generalización al caso $(d+1)$-dimensional (incluyendo $d=3$, que es el que discuten los relativistas) es obvia.

A pesar de su intimidante nombre, anti-de Sitter es de hecho el espaciotiempo más sencillo después de Minkowski. Así como sabemos que los espacios (sin tiempo) con curvatura constante son el plano (curvatura cero), la esfera (curvatura positiva) y la silla de montar = espacio hiperbólico (curvatura negativa), los espaciotiempos con curvatura constante son Minkowski

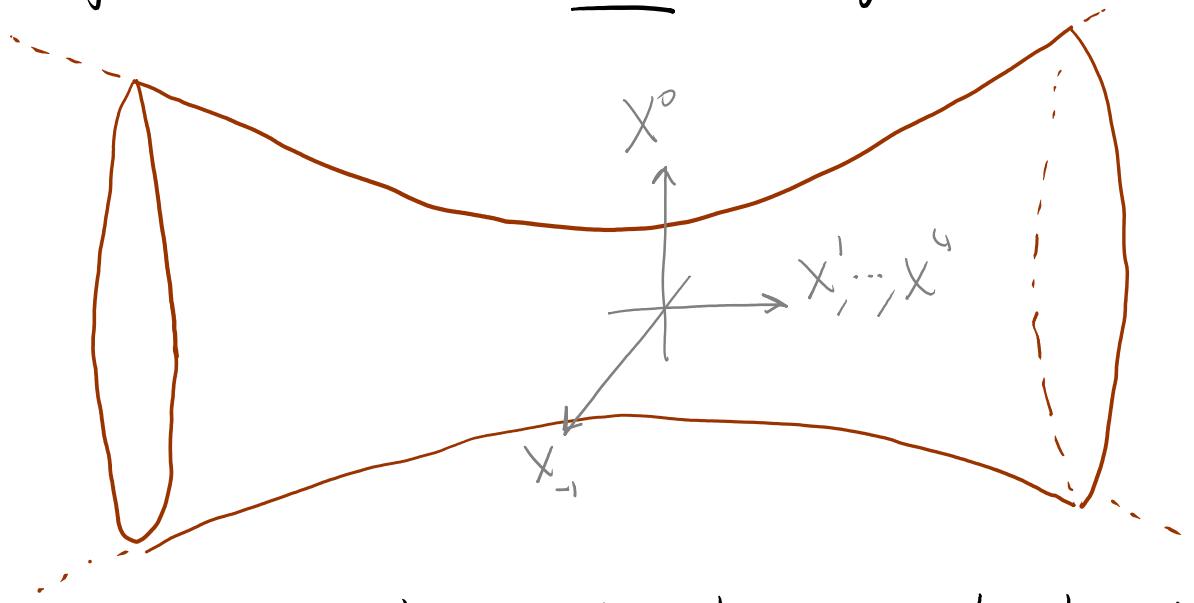
(curvatura cero), de sitter (curvatura positiva) y anti-de sitter (curvatura negativa). En otras palabras,

L18: 19/11/20

anti-de sitter es un espaciotiempo máximamente simétrico con curvatura negativa ($\leftrightarrow$ constante cosmológica negativa, que es el signo opuesto al de nuestro universo). Puede definirse como (la cubierta universal de) el hiperboloide

$$\underbrace{-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}_{\text{normas usando métrica } \eta_{IJ} = \text{diag}(-1,-1,+1,+1,+1,+1)} = -L^2$$

encajado en un espacio plano con signatura $(4,2)$.



Una manera de parametrizarlo es con las llamadas

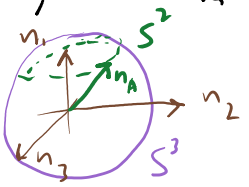
coordenadas globales $0 \leq \rho < \infty$, $-\infty < \tau < \infty$,

martes, 21 de agosto de 2012 07:20 p.m.

vector unidad en $\mathbb{R}^4$

$0 \le n_A \le 1$ con $n_A n_A = 1$ (es decir, los n_A

$A=1,2,3,4$; suma



describen puntos en la S^3), o equivalentemente

$n_1 \equiv \cos\theta_1$, $n_2 \equiv \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2$,

no confundir con $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5 \subset S^5$

$n_3 \equiv \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_3$, $n_4 \equiv \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_3$,

con

$$X_{-1} = L \cosh\rho \operatorname{sen}\tau \,,$$
$$X_0 = L \cosh\rho \cos\tau \,,$$
$$X_A = L \operatorname{senh}\rho \; n_A \,.$$

$0 \le \theta_1, \theta_2 \le \pi$

$0 \le \theta_3 < 2\pi$

Con estas coordenadas, la métrica AdS (es decir, la métrica inducida sobre el hiperboloide a partir de la métrica plana en $\mathbb{R}^{4,2}$) es

$$ds^2 = L^2 \left(-\cosh^2\rho \, d\tau^2 + d\rho^2 + \operatorname{senh}^2\rho \, d\Omega_3^2 \right),$$

con $d\Omega_3^2 \equiv d\theta_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta_1 \left(d\theta_2^2 + \operatorname{sen}^2\theta_2 \, d\theta_3^2 \right)$.

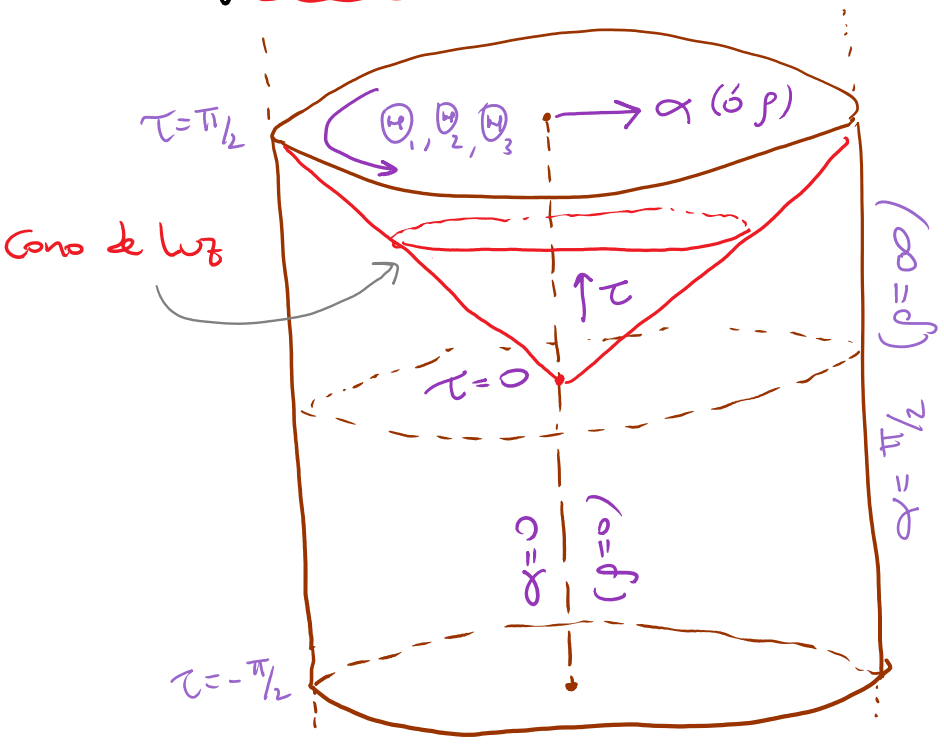
Podemos usar una coordenada radial modificada $\tan\alpha \equiv \operatorname{senh}\rho$, con rango compacto, $0 \le \alpha \le \pi/2$, para reescribir la métrica en la forma

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2\alpha}\left(-d\tau^2 + d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\, d\Omega_3^2\right).$$

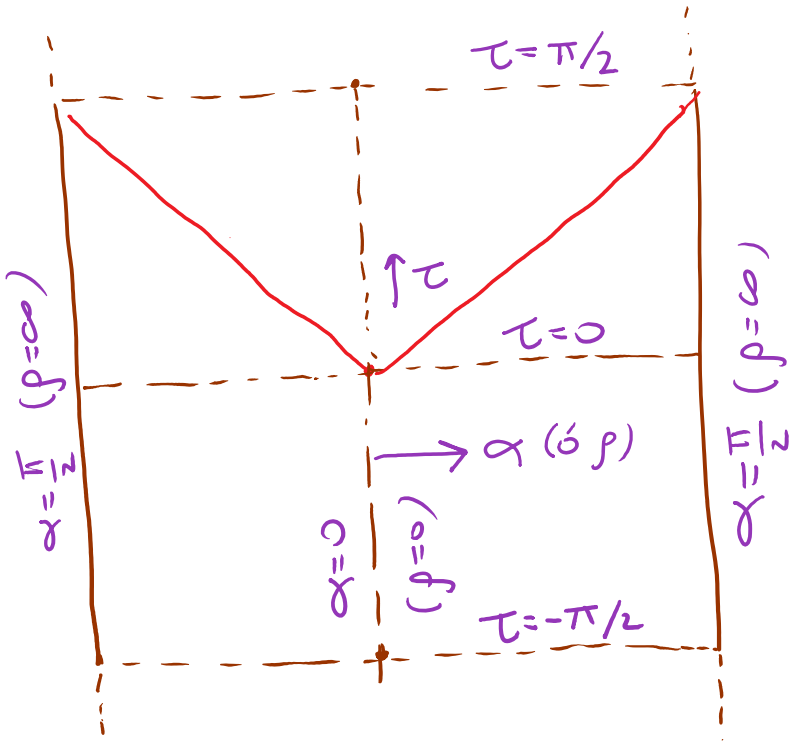
Si ahora hacemos una transformación de Weyl (= 'conforme'), podemos eliminar el factor de enfrente, respetando las direcciones nulas:

$$ds^2 \longrightarrow \hat{ds}^2 \equiv L^2\left(-d\tau^2 + d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\, d\Omega_3^2\right).$$

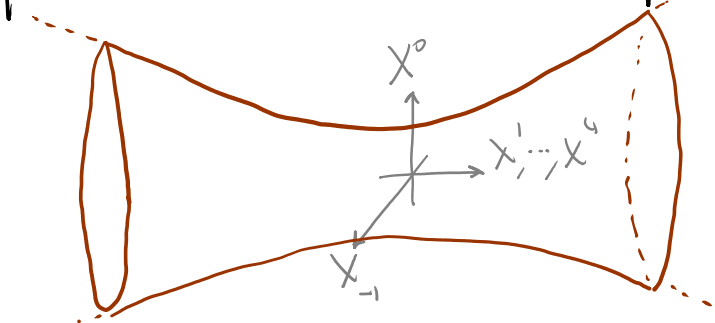
Esto nos permite visualizar a AdS completo en una región que es finita a lo largo de las direcciones espaciales. La representación resultante se conoce como el diagrama de Penrose de AdS:



Si tomamos un corte vertical de este cilindro sólido, a $\textcircled{H}_1 = 0, \pi$, obtenemos el diagrama de la derecha.



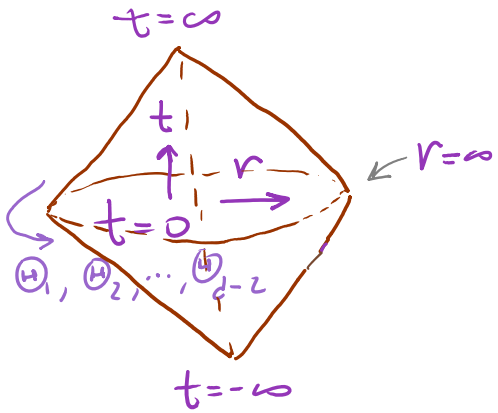
Si nos quedáramos solo con el hiperboloide inicial,

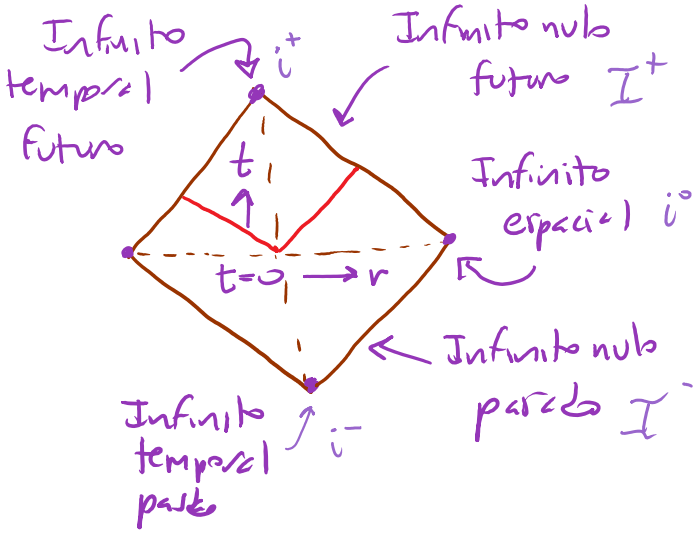


el hecho de que X_{-1} y X_0 sean funciones periódicas de τ implica que las superficies/líneas $\tau=-\pi$ y $\tau=\pi$ del diagrama deben identificarse. ¡Tendríamos entonces curvas cerradas tipo tiempo! Para evitar esto, simplemente evitamos hacer esta identificación, y definimos AdS como el cilindro infinito con $-\infty < \tau < \infty$, en lugar de solo $-\pi < \tau \leq \pi$.

Notamos que el infinito espacial (y nulo) es una superficie tipo tiempo, y la luz toma un tiempo FINITO en llegar a la frontera (o "frontera conforme") $\rho \to \infty \leftrightarrow \alpha = \pi/2$, a pesar de que ésta realmente se encuentra a una distancia propia infinita.

Ambas propiedades son marcadamente diferentes a las del espaciotiempo Minkowski $\mathbb{R}^{d-1,1}$, cuyo diagrama de Penrose es de la forma





donde la luz toma un tiempo infinito en llegar al infinito.

Esto implica que en anti-de Sitter NO basta con dar condiciones iniciales en (p.ej.) $\tau = 0$ para determinar por completo la evolución (los relativistas resumen esto diciendo que AdS NO es "globalmente hiperbólico"), sino que hace

falta además especificar condiciones de frontera en $\rho \to \infty$ ($\alpha = \pi/2$). Como veremos, esto juega un papel crucial en la correspondencia AdS/CFT.

Una manera distinta de parametrizar el hiperboloide

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = -L^2$$

es a través de las coordenadas de Poincaré (o horosféricas) $0 \le r < \infty$, $-\infty < t, x_1, x_2, x_3 < \infty$ en

$$X_{-1} = \frac{r}{L} t$$

$$X_0 = \frac{L^2}{2r}\left[1 + \frac{r^2}{L^4}\left(L^2 + \vec{x}^2 - t^2\right)\right]$$

$$\vec{X} = \frac{r}{L}\vec{x} \qquad \vec{x} = x^1, x^2, x^3$$

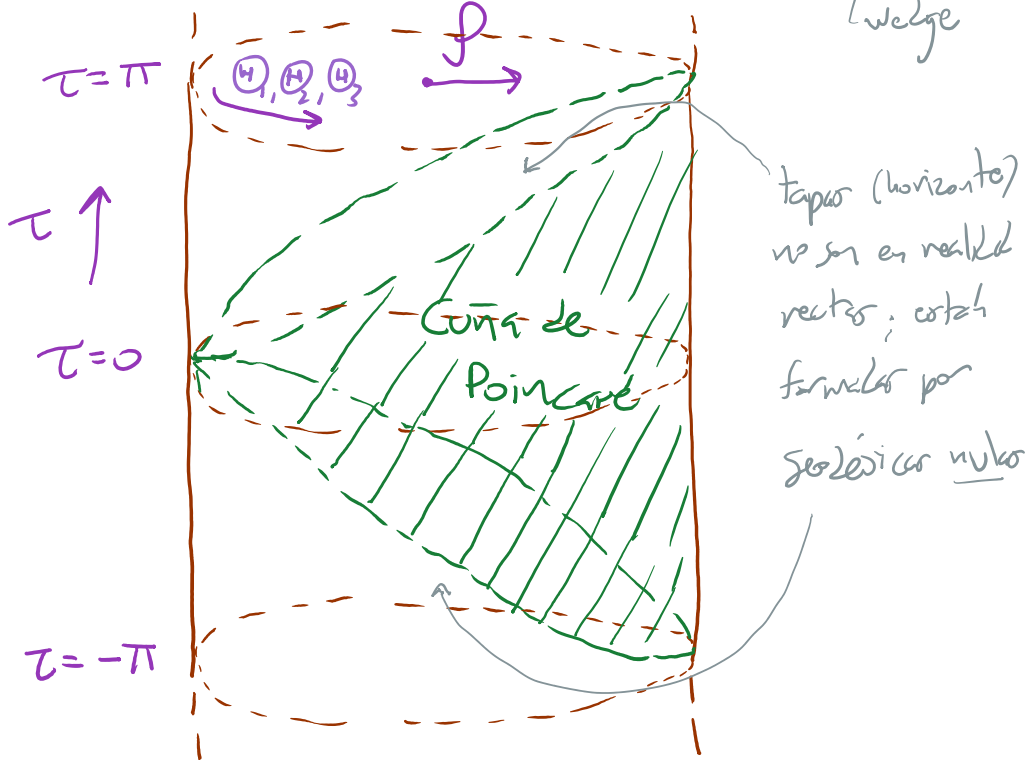
$$X_4 = \frac{L^2}{2r}\left[1 + \frac{r^2}{L^4}\left(-L^2 + \vec{x}^2 - t^2\right)\right].$$

La métrica toma entonces la forma

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}\left(-dt^2 + d\vec{x}^2\right) + \frac{L^2}{r^2}dr^2 .$$

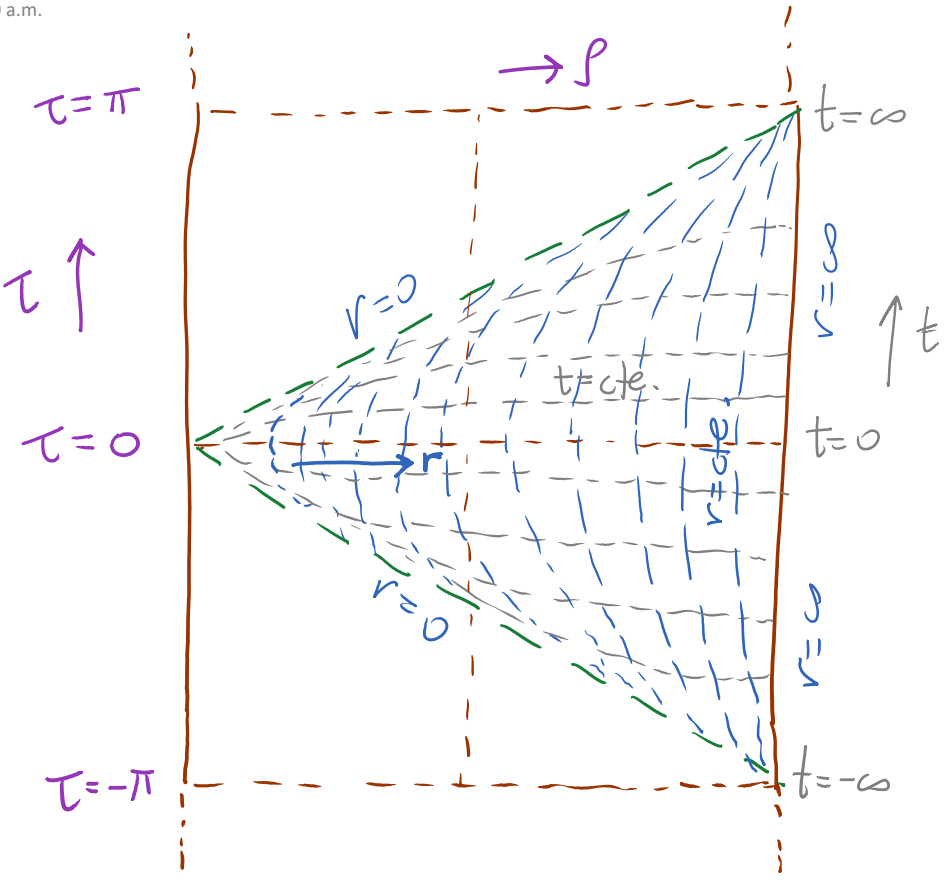
Estas son las coordenadas que aparecieron naturalmente en nuestra deducción de AdS/CFT, en el límite cercano al horizonte de la métrica de la D3-brana negra extremal (p.204). Interesantemente, las coordenadas de Poincaré cubren solo una porción del espaciotiempo AdS (que las coordenadas globales cubrían por completo), conocida como la cuña de Poincaré:

cuña de ↑ wedge



miércoles, 22 de agosto de 2012 07:40 a.m.

En un corte vertical a $\theta_1 = 0, \pi$, la cuña de Poincaré luce como en el diagrama de la derecha.



Los observadores a r=cte. tienen aceleración propia constante

métrica en ADS ($x^m = (t, \vec{x}, r)$)

$$A^2 \equiv g_{mn} DU^m DU^n = \frac{1}{L^2},$$

$$\frac{dx^m}{ds} \quad \text{(tiempo propio)}$$

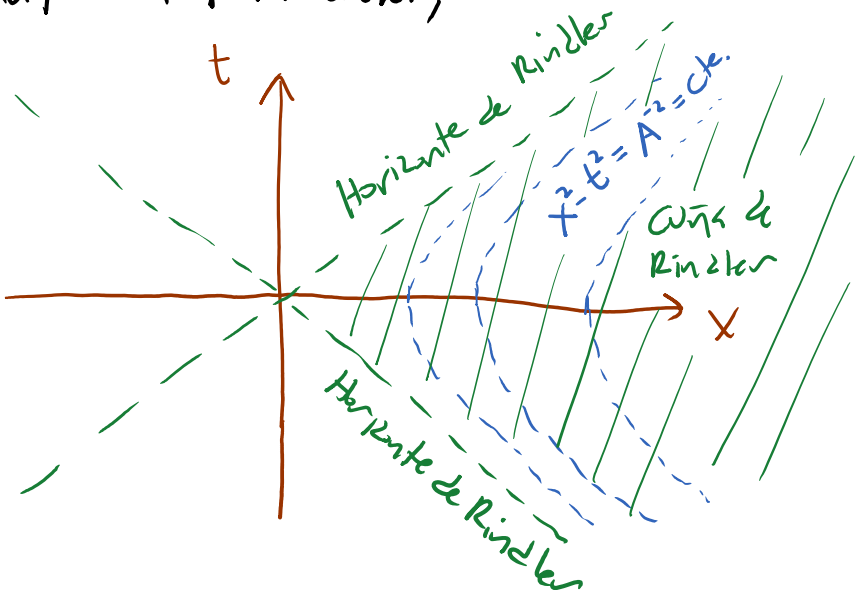
$$\zeta \equiv \frac{dU^n}{ds} + \Gamma^n_{pq} U^p U^q,$$

como resultado de la cual sus trayectorias se vuelven nulas para $t \to \infty$ y $t = -\infty$.

Los eventos a los que tienen acceso (es decir, aquellos a los que pueden enviar y de los cuales pueden recibir una señal) son precisamente los que están dentro de la cuña de Poincaré (los eventos arriba de esta cuña no pueden enviar señales a estos observadores, y los que están debajo no pueden recibir señales de ellos).

Para todos estos observadores, la hipersuperficie $r=0$ es un horizonte causal o de aceleración: marca la frontera de la región que les es causalmente accesible.

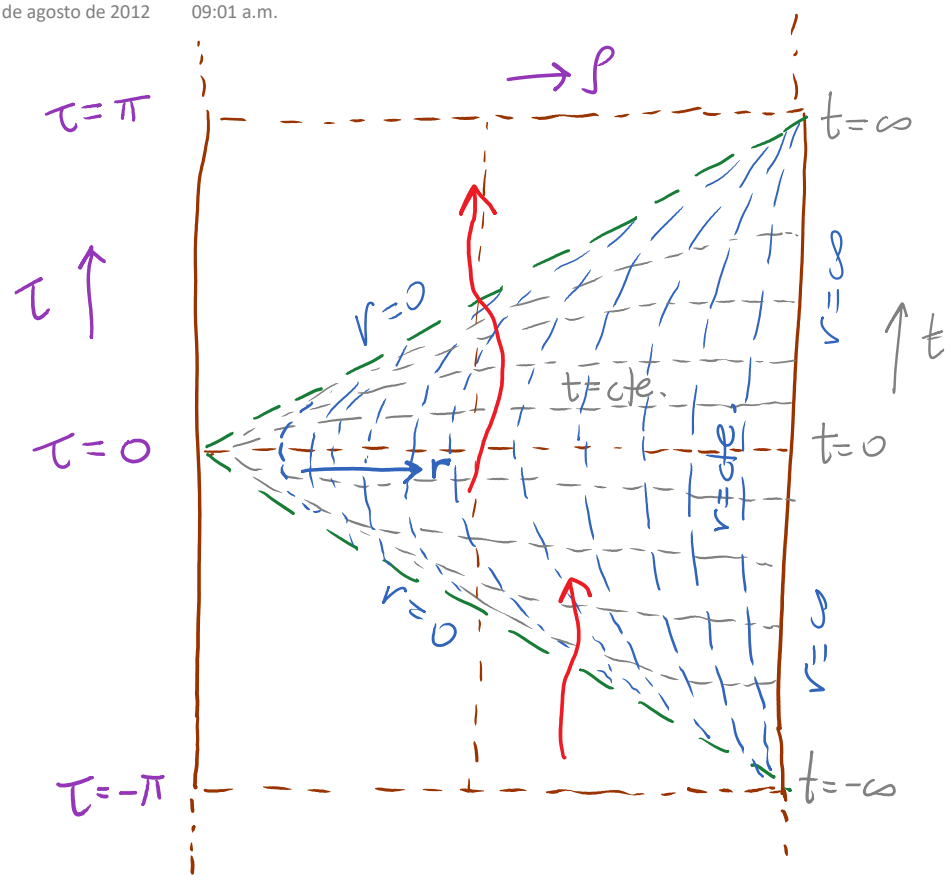
Todo esto es análogo a observadores con aceleración propia constante en Minkowski,



Salvo que en AdS estemos hablando de observadores que tienen todos la misma aceleración propia A, y el valor $A = \frac{1}{L}$ en AdS tiene como consecuencia especial que la temperatura de Unruh detectada por estos observadores en el vacío es cero, mientras que en Minkowski es $T = A/2\pi$ (más en general, en AdS es $T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{A^2 - L^{-2}}$ [Deser, Levin]).

Dado que la cuña de Poincaré es apenas una porción del espaciotiempo AdS completo, las trayectorias tipo tiempo o nulas en general salen de esta región, cruzando el horizonte en un tiempo global (y tiempo propio) finito, pero en tiempo de Poincaré infinito:

miércoles, 22 de agosto de 2012 09:01 a.m.

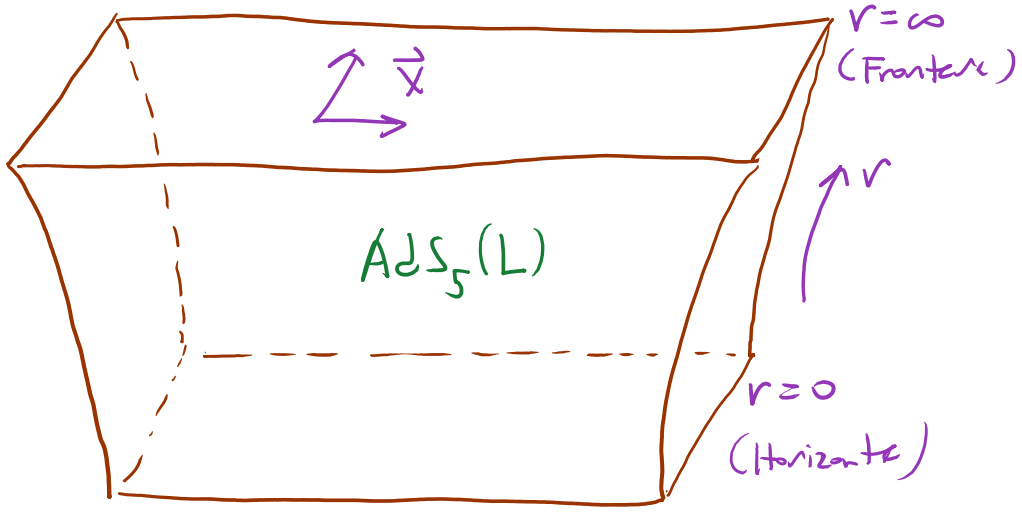


Sabemos que en la correspondencia holográfica, el tiempo de Poincaré es directamente el que coincide con el tiempo de N=4 SYM, y es por esto que tiene sentido restringirnos únicamente a la cuña de Poincaré.

LJB: 11/04/24

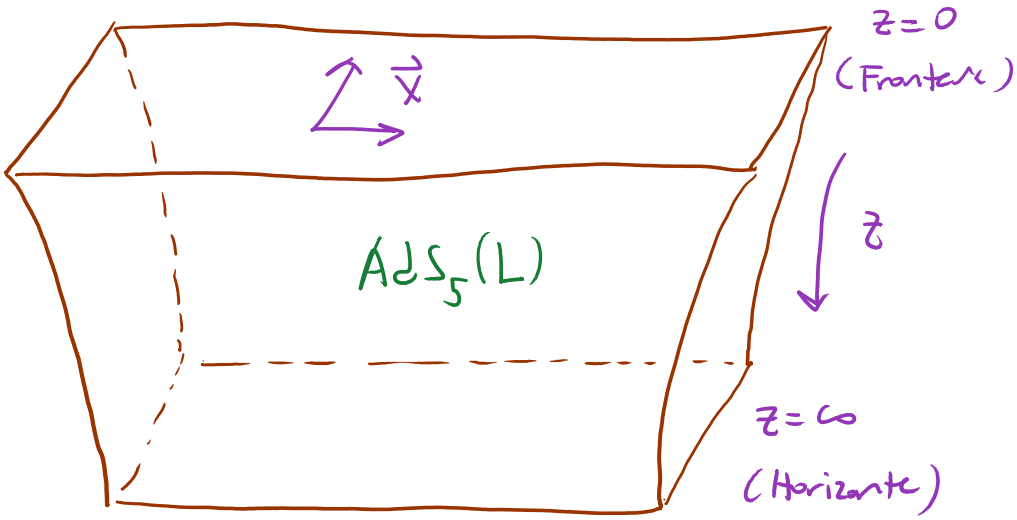
Desde ahora, representaremos esquemáticamente a AdS en la cuña de Poincaré (a tiempo fijo)

así:



$$ds^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 \underbrace{\left(-dt^2 + d\vec{x}^2\right)}_{\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu} + \frac{L^2}{r^2}\, dr^2 .$$

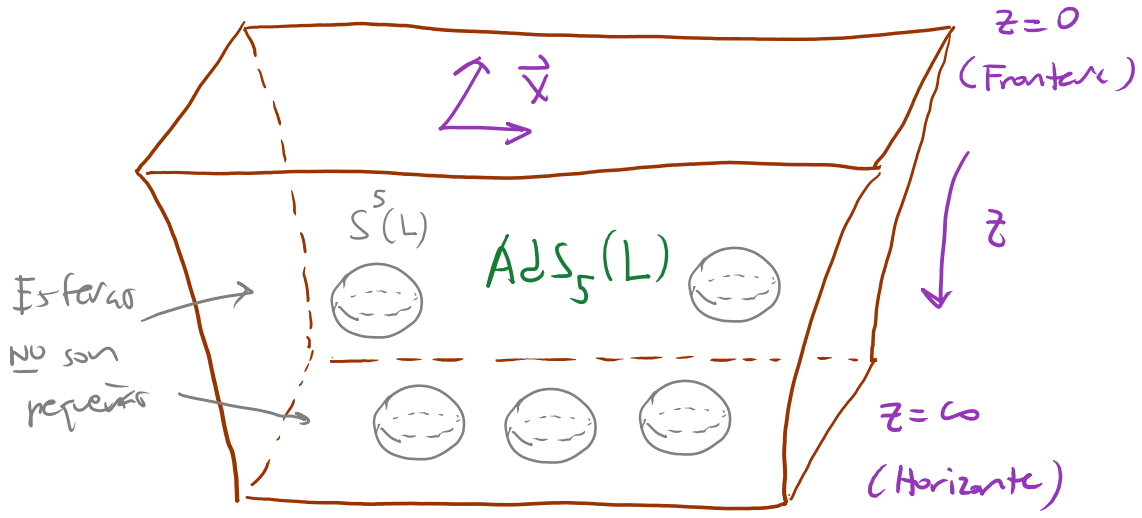
Muchas veces nos convendrá usar una coordenada radial invertida, $z \equiv \frac{L^2}{r}$, de modo que la frontera ∂AdS esté en $z=0$ $(r \to \infty)$:



$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2\right).$$

Debemos recordar que la geometría relevante para el ejemplo de la dualidad AdS/CFT que inducía a MJYM es $AdS_5 \times S^5$, de modo que en cada punto de nuestro dibujo hay una esfera con el mismo radio L:



Antes de tomar el límite cercano al horizonte, las direcciones de la S^5 eran las que rodeaban a la garganta de R3 / pila de D3s, y tenían un radio propio que crecía con r; pero en el límite, esa dependencia

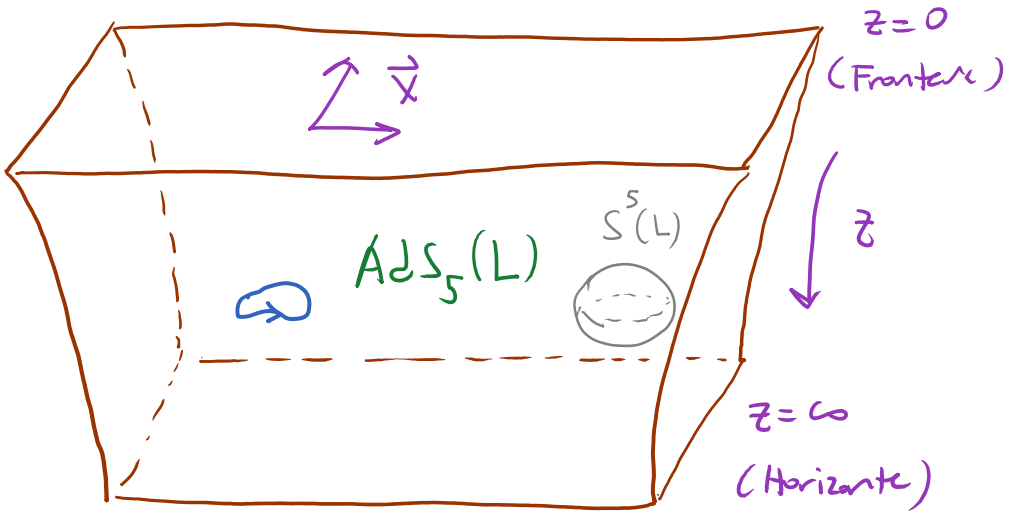
desaparecio,

$$ds^2 \supset \left(1+\frac{L^4}{r^4}\right)^{1/2} r^2 d\Omega_5^2 \longrightarrow \frac{L^2}{r^2} r^2 d\Omega_5^2 ,$$

y es por ello que la geometría se volvió un producto directo de 2 factores.

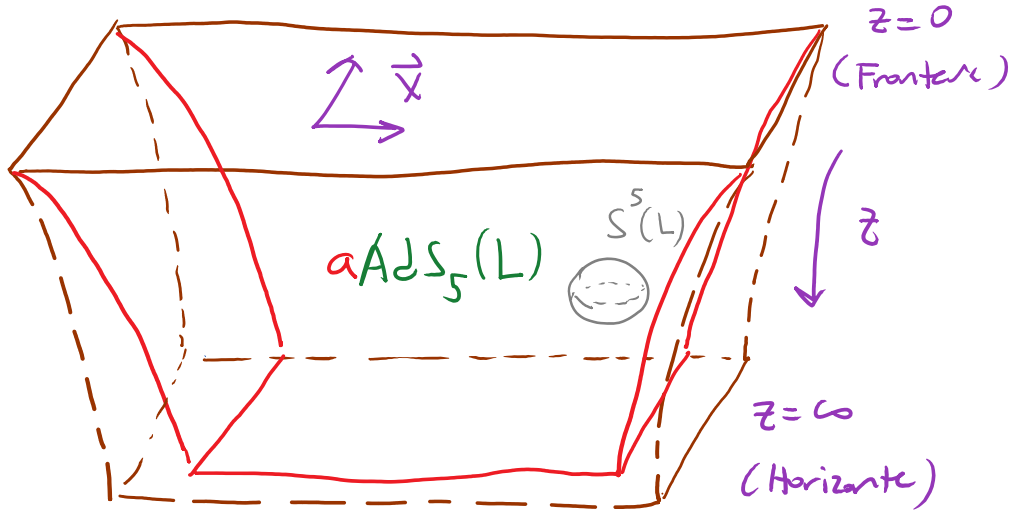
19:24 /11/20

Al considerar a la teoría de cuerdas IIB sobre este fondo $AdS_5 \times S^5$ con N unidades de flujo RR, las fluctuaciones pueden ser pequeñas, en cuyo caso son descritas por cuerdas cerradas,



o grandes, en cuyo caso los valores de fondo de los diversos campos de la teoría

(p.ej. los de SUGRA: g_{MN}, φ, B_{MN}, C, C_{MN}, $C_{M_1\cdots M_4}$, etc.)
se modifican estructuralmente,



conservando el mismo comportamiento asintótico cerca de ∂AdS ($z=0$), puesto que cambiar el fondo en la frontera ($\leftrightarrow$ volumen infinito) requeriría una energía infinita.

P.ej., podríamos tener ahora

$$ds^2 = \left(\frac{L}{z}\right)^2 \left[g_{\mu\nu}(x,z)\, dx^\mu dx^\nu + dz^2 \right] + \text{componentes en } S^5,$$

con $g_{\mu\nu}(x,z) = \eta_{\mu\nu} + g^{(4)}_{\mu\nu}(x)\, z^4 + \mathcal{O}(z^6)$.

↑ comportamiento asintótico sin alterar

↖ fluctuación notoria de la métrica

(Más adelante entenderemos esto en mayor detalle.)

En realidad lo que tenemos en mente es entonces, como ya habíamos dicho antes, a la teoría de cuerdas IIB en un fondo asintóticamente $AdS_5 \times S^5$ ($a\,AdS_5 \times S^5$), aun cuando el adjetivo normalmente queda implícito. El punto clave a recordar es que, al ser la teoría de cuerdas una teoría de gravedad, la geometría es dinámica.

En el contexto de la correspondencia AdS/CFT

MSYM $SU(N_c)$ en Minkowski 3+1 dimensiones = Cuerdas IIB (CIIB) en fondo $aAdS^5 \times S^5$ Poincaré,

el fondo $AdS_5 \times S^5$ sin excitar corresponde al estado de MSYM con energía mínima, es decir, al vacío (simétrico). Fluctuaciones pequeñas o grandes por encima de $AdS_5 \times S^5$ corresponden a otros estados de MSYM.

martes, 04 de septiembre de 2012 10:01 a.m.

Más en general, cualquier objeto o proceso de un lado de la dualidad corresponde a un objeto o proceso en el otro lado, y existe un diccionario que traduce de un lenguaje al otro.

Conocemos ya las entradas de este diccionario que se refieren a los parámetros de cada teoría:

* el rango N_c del grupo de norma $SU(N_c)$ (↔ número de colores ↔ número de D3) = el número de unidades de flujo del campo RR $G_{M_1\cdots M_5}$ a través de la S^5 (↔ carga de R3)

* el acoplamiento $g_{YM}^2 = 4\pi g_c \equiv 4\pi e^{\varphi}\Big|_{z=0}$ ← valor de φ en AdS_5 está fijo (condición de frontera)

* el acoplamiento de 't Hooft

$$\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c = 4\pi g_c N_c = \frac{L^4}{l_c^4} \equiv \frac{L^4}{\alpha'^2}.$$

notar que l_c NO es por sí solo un parámetro de CIIB, sino únicamente en comparación con L

Combinando las 2 relaciones anteriores, vemos además que

$$N_c = \frac{\lambda}{g_{YM}^2} = \frac{L^4}{4\pi g_c l_c^4} \propto \frac{L^4}{l_p^4}$$ ← longitud de Planck

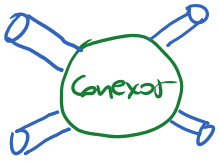
$G_N^{(10)} \propto l_p^8 \propto g_c^2 l_c^8$.

Sabemos que la teoría de cuerdas está bajo control a nivel de cálculos solo si el espacitiempo está débilmente curvado y las cuerdas están débilmente acopladas:

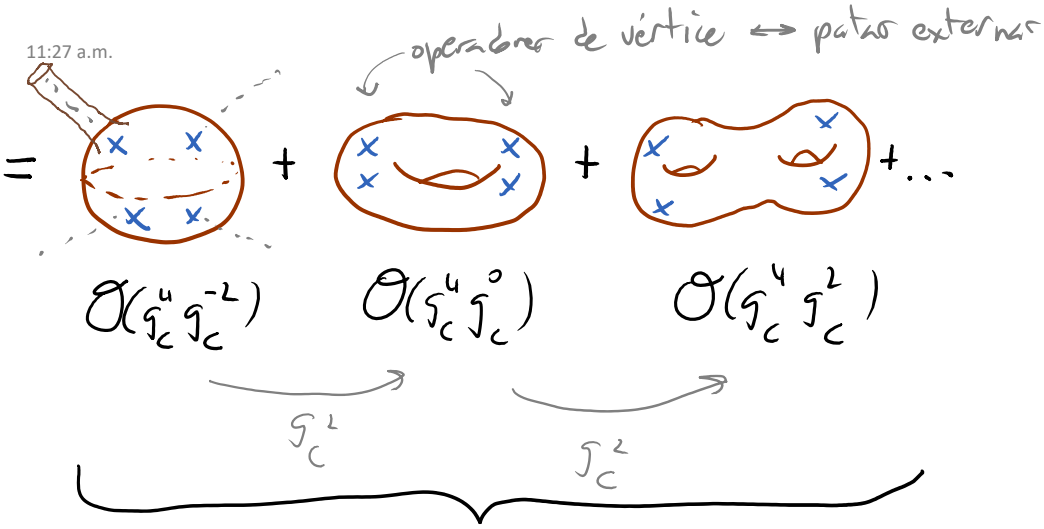
$$\frac{l_c^2}{L^2} << 1 \;,\; g_c << 1 \Rightarrow \lambda \equiv g_{YM}^2 N_c >> 1 \;,\; N_c >> 1 \;,$$

es decir, cuando $\mathcal{N}=4$ SYM tiene (azúcar, flores y) muchos colores ¡y está fuertemente acoplada!

Frecuentemente se dice que AdS/CFT es una dualidad de acoplamiento débil $\leftrightarrow$ acoplamiento fuerte; pero hay que tener presente que en los cálculos de cuerdas hay no 1 sino 2 parámetros de expansión perturbativa. P.ej.,

$\mathcal{A}(12 \to 34) =$ 

martes, 04 de septiembre de 2012 11:27 a.m.



Expansión en lazos de cuerda, controlada por g_c

En cada orden debemos hacer una integral funcional en una teoría de campo 2-dimensional (sobre la hoja de mundo M),

$$\mathcal{A}_n \sim \int_M \mathcal{D}X^M(\sigma)\, V_1(k_1)\cdots V_n(k_n)\, e^{-\frac{1}{2\pi\ell_c^2}\int d^2\sigma\, g_{MN}(X)\partial_a X^M \partial_b X^N \eta^{ab} + \dots}$$

campos escalares; operadores de vértice; M ← hoja de mundo; acción de Polyakov

que en términos de $X^M(\sigma) \equiv \bar{x}^M + \ell_c \xi^M(\sigma)$, (c)

p.ej. centro de masa; fluctuaciones

$$g_{MN}(X) = g_{MN}(\bar{x}) + \ell_c \partial_P g_{MN}(\bar{x})\xi^P + \frac{1}{2}\ell_c^2 \partial_P\partial_Q g_{MN}(\bar{x})\xi^P\xi^Q + \dots,$$

toma la forma

término libre

$$\mathcal{A}_n \sim \int_M \mathcal{D}\xi^M(\sigma)\cdots e^{-\int d^2\sigma\left[g_{MN}(\bar{x})\partial_a\xi^M\partial_b\xi^N\eta^{ab} + \ell_c\partial_P g_{MN}(\bar{x})\partial_a\xi^M\partial_b\xi^N\eta^{ab}\xi^P + \dots\right]}$$

vértice de 3 patas

Vemos que los acoplamientos en 2D son $\sim (\ell_c/L)^n$, donde L es el radio de curvatura característico del fondo, $\partial_P g_{MN} \sim \frac{1}{L}$.

L16: 11/10/16

La expansión en lazos en la hoja de mundo está entonces controlada por ℓ_c/L.

En la correspondencia AdS/CFT,

MSYM fuertemente acoplada ($\lambda \gg 1$) $\longleftrightarrow$ Hoja de mundo débilmente acoplada ($\ell_c/L \ll 1$),

MSYM débilmente acoplada ($\lambda \ll 1$) $\longleftrightarrow$ Hoja de mundo fuertemente acoplada ($\ell_c/L \gg 1$);

pero en AMBOS casos podemos tener CIIB débilmente acoplada ($g_c \ll 1$), siempre y cuando $N_c \gg 1$.

Lo más fácil es hacer cálculos en el límite planar (N_c grande) y con acoplamiento infinito en MSYM,

$$N_c \to \infty, \quad \lambda \to \infty,$$

nivel árbol, sin lazos

donde: $g_c \to 0$, así que CIIB es libre/clásica,

$\ell_c^2/L^2 \to 0$, así que CIIB se describe de manera exacta con supergravedad IIB (SUGRA).

Con más esfuerzo, pueden incorporarse correcciones en ℓ_c^2/L^2 (provenientes de estados masivos de las cuerdas),

que en MSYM corresponden a correcciones en $1/\sqrt{\lambda}$.

Las correcciones cuánticas en potencias de g_c (¡difíciles de calcular!) incorporan interacciones /lazos en CIIB y corresponden en MSYM a correcciones en $1/N_c$ (o, para ser precisos, λ/N_c).

En el resto del curso, veremos ejemplos del uso de la correspondencia en esta dirección: como una herramienta para explorar la región de acoplamiento fuerte de la teoría de norma.

A la inversa, los cálculos perturbativos en MSYM en la región

$$\lambda \ll 1 \,, \quad N_c \gg 1 \,,$$

contienen información sobre CIIB débilmente interactuantes (libres/clásicos si $N_c \to \infty$) en un fondo altamente curvado, que no puede ya verse simplemente como una geometría, puesto que involucra también a los modos massivos de cuerdas $\Rightarrow$ campos de alto espín.

En la práctica, es más complicado extraer información usando la dualidad en esta dirección, porque el diccionario traduce los datos espaciotemporales de ADS de modo altamente no local. [Ver, p.ej., Hajji-Mani, Sundborg; Sundborg; Berenstein; Aharony, David, Gopakumar, Klebanov, Razamat; Gopakumar; Beisert, Bianchi, Morales, Samtleben; Clark, Karch, Kovtun, Yamada; etc.]

Y podemos notar por otra parte que la dualidad norma/gravedad NO nos da acceso fácil a la región donde el acoplamiento de cuerdas es fuerte, porque $g_c \sim \frac{\lambda}{N_c} >> 1$ es imposible con $\lambda << 1$.

Para entender esta región, podemos en cambio utilizar la dualidad S de CIIB, que intercambia $g_c \leftrightarrow 1/g_c$ — ver pp. 169-70.

Es interesante que todo lo anterior empata con la forma de la conexión entre teorías de norma y teorías de cuerdas

sugerida por 't Hooft (ver pp. 76-78): una teoría no abeliana con $N_c \to \infty$ y λ fija en verdad puede reformularse como una teoría de cuerdas, con acoplamiento $g_c \sim 1/N_c$.

AdS/CFT nos da entonces una implementación muy explícita de las ideas de 't Hooft, identificando a la teoría de cuerdas involucrada y el significado preciso de λ. Y en esta implementación, nos topamos con un par de sorpresas:

- ¡¡El lenguaje dual a la teoría de norma involucra a la gravedad!!
- ¡¡La teoría de cuerdas vive en un espacio-tiempo curvado, con mayor número de dimensiones!!

Antes de proseguir con el diccionario, nos conviene sujetar a la correspondencia a una primera prueba: si en verdad $\mathcal{N}=4$ SYM es equivalente a CFT IIB, entonces ambas teorías deben tener las mismas simetrías globales.

1) Como vimos (pp. 107-111), MSYM es una teoría de campos conforme, es decir, es invariante bajo el (su acción (simétrica))
grupo conforme en 3+1 dim, $SO(4,2)$.

En el lado de cuerdas, estas mismas simetrías conforman el grupo de isometrías de AdS_5, es decir, el conjunto de difeos que No cambian la forma de la métrica (el análogo del grupo de Poincaré para el espaciotiempo de Minkowski). Si (sin excitar)
recordamos la definición de AdS_5 como el hiperboloide

$$\underbrace{-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}_{\text{norma en } \mathbb{R}^{4,2}} = -L^2$$

en el espacio plano con métrica $\eta_{AB} = \text{diag}(-1,-1,1,1,1,1)$, resulta obvio que $SO(4,2)$ (el análogo del grupo de Lorentz para este espacio de encaje) no cambia η_{AB} (por definición) ni la ec. del hiperboloide, así que no cambia tampoco la métrica inducida sobre el hiperboloide.

Es decir, $SO(4,2)$ es en verdad el grupo de isometrías de AdS_5, y por tanto, se cuenta entre las simetrías globales de CIIB en $AdS_5 \times S^5$. ✓

2) Sabemos también (pp. 95-6, 117) que MSYM tiene una simetría interna global $SU(4) \simeq SO(6)$, conocida como simetría R, que deja invariante al campo glúonico $(A_\mu(x))_{cc'}$, pero rota entre sí a los 4 campos fermiónicos $(\psi^f(x))_{cc'}$, y al mismo tiempo, mezcla entre sí a los 6 campos escalares $(\Phi^e(x))_{cc'}$.

En el sistema de N_c D3s en espaciotiempo plano que teníamos antes de tomar el límite de Maldacena, $SO(6)$ se originó de las rotaciones en las 6 direcciones transversales a las D3s.

En CIIB, estas mismas simetrías aparecen como el grupo de isometrías de la S^5, que es justamente $SO(6)$, o en versión espinorial, $Espín(6) \equiv SU(4)$ (la relación entre ambos grupos es análoga a $SO(3) \simeq SU(2) \equiv Espín(3)$).

Esto era de esperarse, puesto que la S^5 se originó precisamente de las direcciones que rodeaban a la garganta de la R3. Así que CIIB sobre $aAdS_5 \times S^5$ efectivamente tiene simetría global $SO(6) \simeq SU(4)$. ✓
↑ ¡espacio-temporal, no interna!

3) Además de estas simetrías básicas, MSYM tiene un total de 32 supersimetrías (rotaciones fermiónicas) independientes. Esto es el DOBLE de lo que el nombre SYM $\mathcal{N}=4$ sugeriría: tenemos 16 componentes de las 4 supercargas ordinarias Q^f más 16 componentes de las 4 supercargas superconformes S^f (recordar que $[K^\mu, Q^f] \sim \sigma^\mu \bar{S}^f$, con K^μ los generadores de las transformaciones conformes especiales). Dijimos que las Q^f, y por separado las S^f, rotan entre sí bajo las transformaciones $SU(4)$, y esto es lo que identifica a este grupo como simetría R.

En CIIB, sabemos que el "II" hace referencia

que se tiene supersimetría (local) $\mathcal{N}=2$ (es decir, 2 espinores de Majorana-Weyl) en $9+1$ dim, lo cual equivale a 32 supersimetrías. El fondo de Minkowski $9+1$ dim (con todos los otros campos apagados) preserva todas estas supersimetrías; pero un fondo genérico No preserva ninguna.
El fondo completo de R^3 (o R^p) es invariante bajo 16 supersimetrías (es un estado BPS, justo como el bouche de $D3$'s), pero su límite cercano al horizonte, $AdS_5 \times S^5$ es de hecho máximamente supersimétrico (tal como Minkowski): es invariante bajo 32 supersimetrías. ✓

Combinando 1) + 2) + 3), encontramos que MSYM y CIIB en $AdS_5 \times S^5$ tienen de hecho el mismo supergrupo de simetrías globales, $SU(2,2|4)$. ✓

[9:15/09/12

4) Además de todas estas simetrías continuas, hemos dicho (pp. 120-124) que se cree que MSYM tiene una simetría discreta global, conocida como dualidad S, descrita por el grupo $SL(2,\mathbb{Z})$.

Estas transformaciones mezclan/intercambian los estados de la teoría con cargas eléctricas y magnéticas, y al mismo tiempo modifican al acoplamiento complejo

$$\tau = \frac{\theta_{YM}}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g_{YM}^2}$$

de acuerdo con

$$\tau \to \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}).$$

Esto incluye (y de hecho es generado por) la posibilidad de transformar

$$\theta_{YM} \to \theta_{YM} + 2\pi$$

y $g_{YM}^2 \leftrightarrow \frac{4\pi}{g_{YM}^2}$ $\left(\begin{array}{c}\text{acoplamiento} \\ \text{débil} \leftrightarrow \text{fuerte}\end{array}\right)$.

Y mencionamos también (pp. 169-70) que CIIB tiene igualmente dualidad S con grupo $SL(2,\mathbb{Z})$, que mezcla/intercambia $B_{MN} \leftrightarrow C_{MN}$ y transforma el acoplamiento complejo $\tau \equiv C + i e^{-\varphi}$ (axión = escalar RR; dilatón)

justo como indicamos arriba. Un punto importante es que estas transformaciones dejan invariante a la métrica (en el marco de Einstein) y a $G_{M_1 \cdots M_5}$, que son los únicos 2 campos excitados en el fondo $AdS_5 \times S^5$, así que CIIB en este fondo efectivamente tiene a $SL(2,\mathbb{Z})$ como simetría discreta. ✓

(De hecho, la dualidad S de CIIB explica la dualidad S de MSYM, que sabemos que proviene de D3 ← autodualidad bajo dualidad S.)

[20: 26/11/10]

* De esta conexión aprendemos además que, tal como el valor de g^2_{YM} está determinado por $g_c = e^{\varphi}|_{z=0}$, el valor del parámetro restante de MSYM, θ_{YM}, está determinado por $C|_{z=0}$. (escalar RR (axión))

En conjunto, vemos entonces que la correspondencia ha superado exitosamente su primera prueba: ¡hay un acuerdo perfecto entre las simetrías de ambas teorías!

(En varios casos vimos que el acuerdo puede explicarse por la conexión entre D3s y las R3; pero eso no le resta contundencia. Por supuesto la dualidad debe ser correcta si en verdad esa conexión entre D3s y R3 existe. Pero dado que este último podría ser puesto en duda, estamos en búsqueda de evidencia directa de que

$\mu_{SYM} = CIIB$ en $AdS_5 \times S^5$,

y el acuerdo entre las simetrías globales de estas teorías indudablemente sorprende desde este punto de vista.)

Lo que hemos aprendido nos permite anticipar la posible existencia de una correspondencia AdS/CFT más general, tal como habíamos mencionado en la parte inicial del curso. Imaginemos que tenemos una teoría

de campos conforme (CFT) en 3+1 dimensiones, distinta a MSYM. Entre sus simetrías globales se cuenta entonces el grupo conforme $SO(4,2)$. Si acaso esta CFT tuviera, como MSYM, alguna descripción dual en términos de una teoría de gravedad (más adelante entenderemos por qué la gravedad necesariamente estará involucrada), entonces el espaciotiempo donde vive la teoría gravitacional necesariamente tendrá un factor AdS_5, puesto que este es el único espacio con $SO(4,2)$ como su grupo de isometrías. La S^5, por otra parte, en general no figurará, puesto que la presencia de $SU(4) \simeq SO(6)$ como simetría global está asociada a la existencia de SUSY $N=4$, que es una característica específica de MSYM.

Además, al no estar hablando ya del ejemplo de MSYM, la teoría gravitacional en general no tendría por qué ser específicamente CIIB — incluso podemos plantearnos la

posibilidad de que No sea una teoría de cuerdas (aunque sí debe ser una teoría de gravedad bien definida a nivel cuántico, y tal vez ello implique siempre una relación con cuerdas).

Podemos llegar todavía más lejos notando que el grupo conforme en $d+1$ dimensiones, $SO(d+1,2)$, coincide con el grupo de isometrías de AdS_{d+2}.

Parece plausible entonces la existencia de dualidades englobadas en una Correspondencia AdS/CFT más general,

Teoría Conforme en $d+1$ dim	$=$	Teoría gravitacional en $AdS_{d+2} \times M^p$

donde M^p es alguna variedad compacta p-dimensional asociada a las simetrías globales internas de la CFT.

(Más adelante veremos ejemplos explícitos.)

Regresando a nuestro caso particular MSYM $\leftrightarrow$ CIIB, podemos notar que, si bien las simetrías globales empatan, las simetrías locales están en completo desacuerdo:

i) Al grupo de norma $SU(N_c)$ de MSYM, ¡no le corresponde NADA en CIIB sobre $AdS_5 \times S^5$!

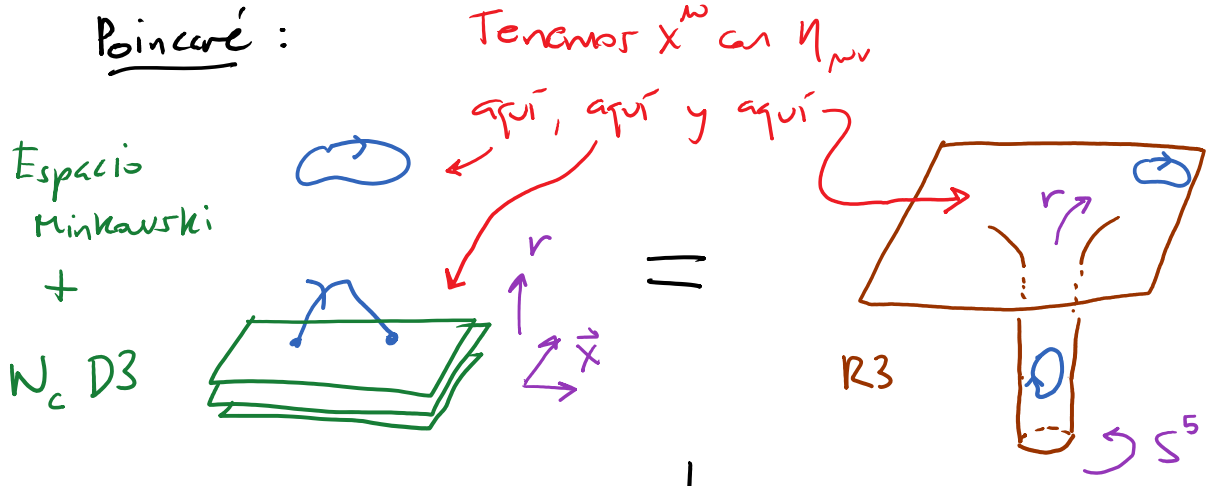
ii) A (la mayoría de) los difeomorfismos en $AdS_5 \times S^5$, ¡no les corresponde NADA en MSYM!

Esto NO contradice a la correspondencia, porque las invariancias locales NO son simetrías en sentido estricto (que mapean unos estados físicos a otros), sino una manifestación de que nuestra descripción es redundante. Las redundancias de los 2 lenguajes NO tienen por qué coincidir. Toda la información física está contenida en cantidades invariantes de norma, y es a nivel de ellas que tendré que operar la correspondencia (veremos los detalles más adelante).

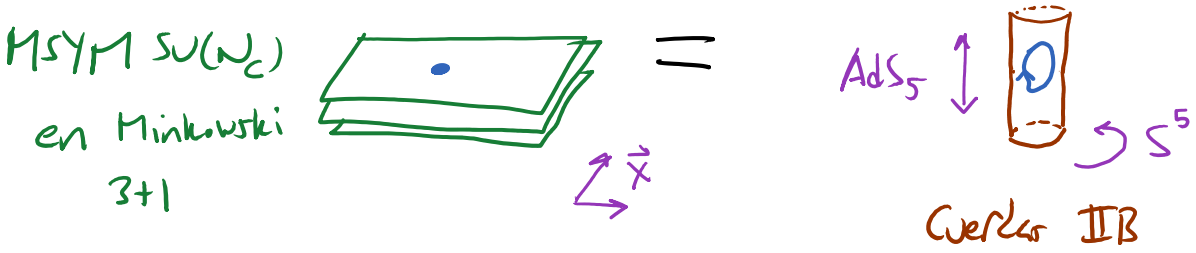
Podemos regresar ahora a la deducción del diccionario de la dualidad. Dado que las 2 teorías viven en diferente número de dimensiones, una pregunta particularmente interesante es cómo se

mapean las coordenadas espaciotemporales.

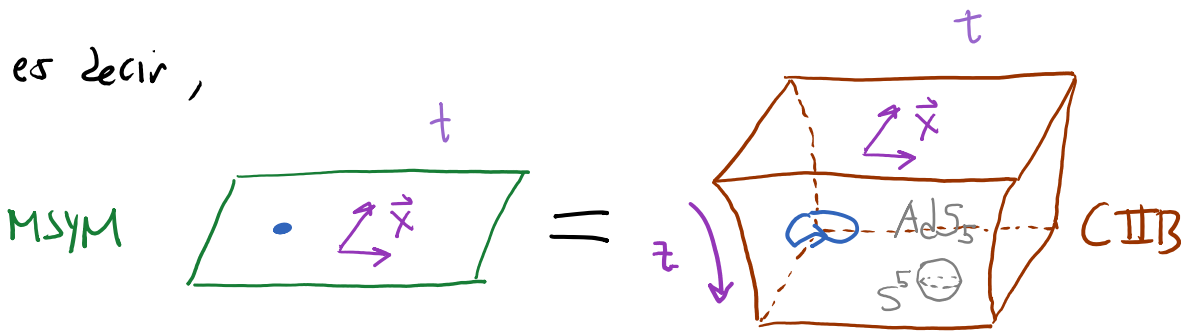
* A partir de la conexión D3s $\leftrightarrow$ R3, sabemos que las coordenadas $x^\mu \equiv (t, \vec{x})$ del espaciotemp Minkowski 3+1 din donde vive MSYM, coinciden directamente con las coordenadas x^μ en la cinc de Poincaré:



Límite de Maldacena



es decir,



L17: 13/10/16 (-35 min)

* Por esta misma conexión, sabemos que las coordenadas $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ en la S^5 de CIIB no son coordenadas espaciales en MSYM, sino que parametrizan el espacio interno sobre el cual actúa $SO(6) \simeq SU(4)$. Lo natural del lado de MSYM no es entonces hablar de puntos específicos sobre S^5, sino tratar con objetos que tienen números cuánticos bien definidos bajo $SU(4)$, es decir, con armónicos esféricos sobre S^5 (nos toparemos con algunos ejemplos más adelante).

Entendemos ya cómo mapear 9 de las 10 coordenadas de CIIB, pero lo que es menos claro es a qué

corresponde la coordenada radial r ó $z \equiv L^2/r$ en

$$ds^2_{AdS_5} = \frac{L^2}{z^2}\left(-dt^2 + d\vec{x}^{\,2} + dz^2\right).$$

Para responder esta pregunta, podemos notar que el reescalamiento (=dilatación) en MSYM

$$(t, \vec{x}) \xrightarrow[s>0]{} (st, s\vec{x}),$$

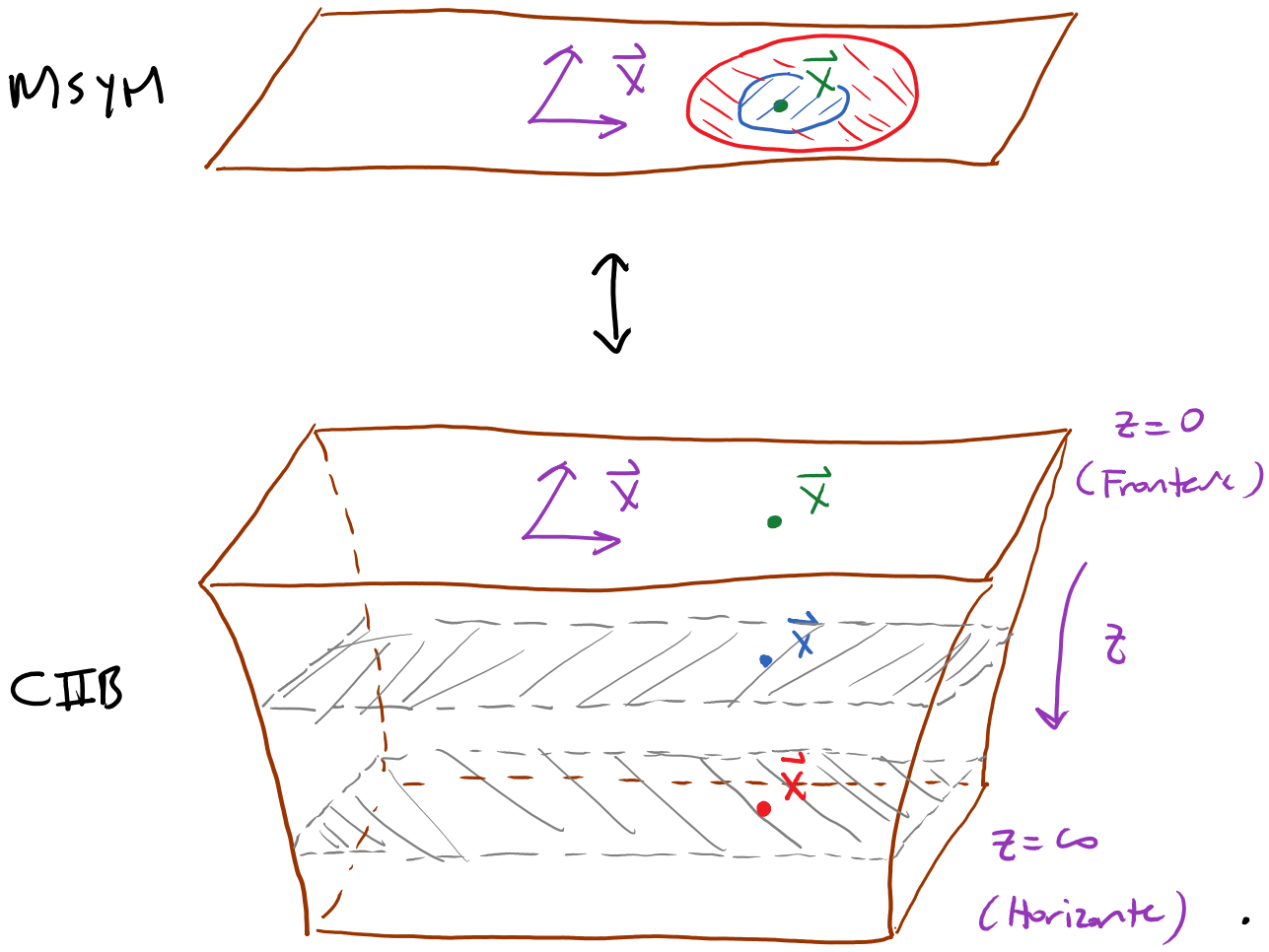
que es una transformación conforme perteneciente al grupo $SO(4,2)$, corresponde en CIIB al difeo

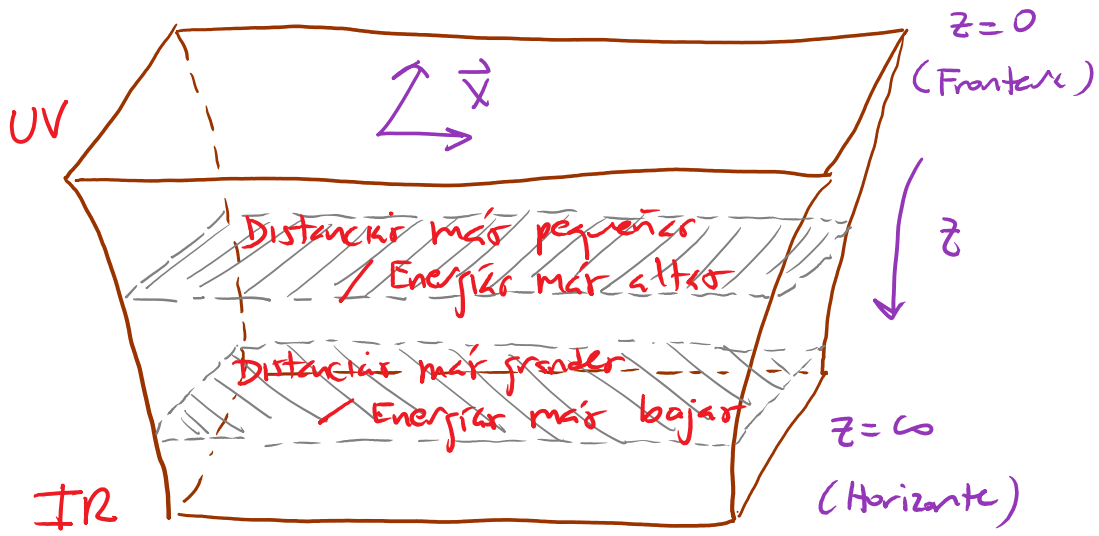
$$(t, \vec{x}, z) \to (st, s\vec{x}, sz),$$

que es una isometría de AdS_5.

Con esto vemos que al explorar distancias más pequeñas o más grandes en MSYM, estaremos explorando en CIIB ubicaciones con menores o mayores valores de la coordenada radial z:

miércoles, 20 de abril de 2016 06:39 p. m.





Las rebanadas de AdS a distinto valor de z ó r contienen información sobre lo que ocurre en MSYM a distintas escalas de distancia o energía.

Descubrimos entonces que (tal como prometimos):

* La coordenada radial invertida z en AdS corresponde a una escala de distancia ℓ (en el sentido de una escala de resolución espacial) en MSYM. Equivalentemente, la coordenada radial $\frac{r}{L^2}$ corresponde a una escala de energía E en MSYM.

miércoles, 05 de septiembre de 2012 02:37 p.m.

Notamos que la región cercana a la frontera en AdS, que es el IR (distancias grandes) en la teoría gravitacional, corresponde al UV de la teoría de norma, y viceversa. Por esta razón, el mapeo

$$z \leftrightarrow \ell \quad \text{ó} \quad \frac{r}{L^2} \leftrightarrow E$$

se conoce como la conexión UV-IR. [Susskind, Witten; Peet, Polchinski]

En el resto del curso veremos cómo opera este mapeo en varios ejemplos explícitos. El hecho de que la energía E se pueda reinterpretar como una dimensión espacial más resulta muy sorprendente, análogo a la conexión establecida entre el espacio y el tiempo en la relatividad especial.

Esta conexión nos permite hacer contacto con el principio holográfico (pp. 144-48), que afirma que

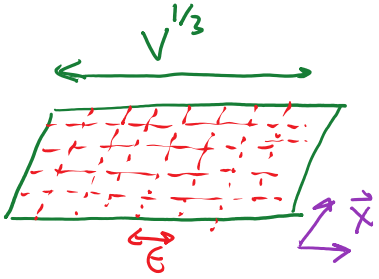
número de grados de libertad en una teoría gravitacional en región R $\rightarrow$ $S_R \leq \frac{A_{\partial R}}{4G_N}$ $\leftarrow$ área de la frontera de R

martes, 11 de septiembre de 2012 04:18 p.m.

Consideremos a MSYM con un corte UV (en distancias) ϵ. El número de grados de libertad en un volumen (corte IR) V es

$$S_{MSYM} \sim N^2 \frac{V}{\epsilon^3}$$

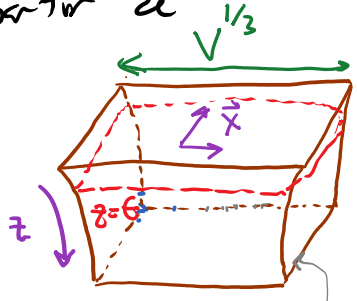
por matrices $N \times N$



Del lado de gravedad, el corte UV corresponde a cortar el espacio AdS en $z = \epsilon$. A partir de la métrica

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2\right) + L^2 d\Omega_5^2$$

podemos calcular el área de la superficie 8-dim



corte IR en $z = V^{1/3}$ no cambiaría el resultado

$z = \epsilon$:

$$A_\epsilon = \int_{z=\epsilon} d^3x\, d\theta_1 \cdots d\theta_5 \sqrt{\det g_{\mu\nu}}$$

métrica inducida en $z = \epsilon$, $t = cte.$

volumen 3-dim

$$= V\,\Omega_5 \sqrt{\left(\frac{L^2}{z^2}\right)^3 (L^2)^5}\,\Big|_{z=\epsilon}$$

volumen de S^5 (π^3)

$$\sim \frac{L^8}{\epsilon^3} V \,.$$

De acuerdo con el principio holográfico, esto implica que el número de grados de libertad en CIIB-($z \geq \epsilon$) es

$$S_{IIB} \leq \frac{A_\epsilon}{4G_N} \sim \frac{\frac{L^8}{\epsilon^3} V}{G_N} \sim \frac{(g_c N)^2 \ell_c^8 V}{\epsilon^3 g_c^2 \ell_c^8}, \qquad L^4 \propto g_c N \ell_c^4, \quad G_N \propto g_c^2 \ell_c^8$$

p. 240 →

p. 158

es decir,

$$S_{IIB} \leq \frac{N^2 V}{\epsilon^3} \sim S_{MSYM}.$$

Vemos entonces que la correspondencia AdS/CFT satura la cota holográfica. ✓

Un punto curioso es que AdS tiene un volumen que escala como la misma potencia del corte ϵ:

$$Vol_\epsilon = \int_\epsilon^\infty dz \int d^3x \, d\theta_1 \cdots d\theta_5 \sqrt{\det g_{MN}}$$

← ó $V^{1/3}$, da igual

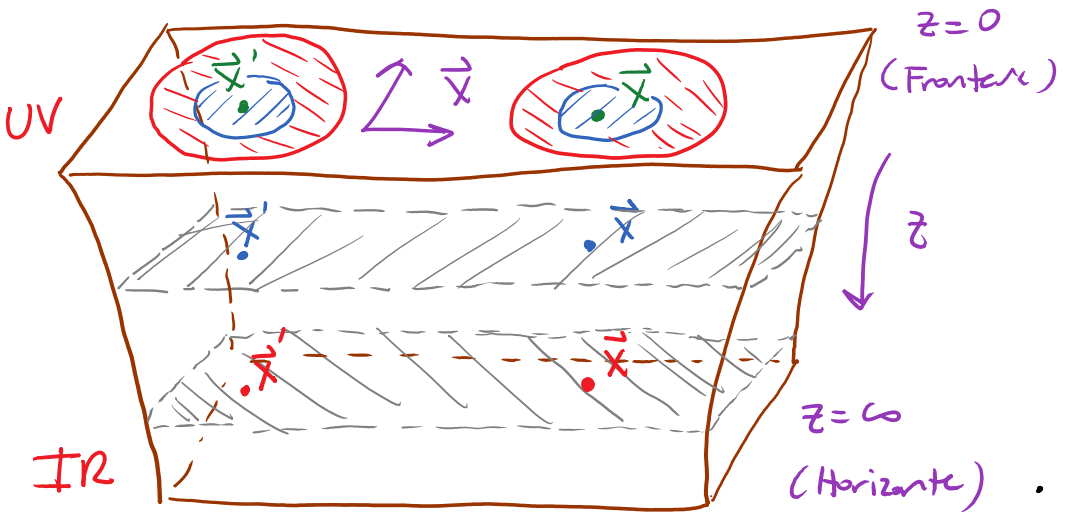
← métrica en $t = cte.$

$$= V\Omega_5 \int_\epsilon^\infty dz \sqrt{\left(\frac{L^2}{z^2}\right)^4 (L^2)^5}$$

$$= V\Omega_5 L^9 \int_\epsilon^\infty \frac{dz}{z^4} \sim \frac{VL^9}{\epsilon^3} \sim L A_\epsilon.$$

Esto implica que cualquier teoría en AdS, incluso si NO es gravitacional, es "holográfica" en el sentido de que su número de grados de libertad es proporcional al área A_ϵ (y también al volumen Vol_ϵ). Pero la dependencia de L es distinta para Vol_ϵ y A_ϵ, y en la correspondencia AdS/CFT vemos que el número de grados de libertad de MSYM y CIIB escala correctamente como el área A_ϵ.

Según lo que hemos mencionado, el diccionario de la correspondencia identifica $x^\mu_{AdS} = x^\mu_{CFT}$ y $z = l$, haciendo uso de una foliación radial específica:



(En situaciones dinámicas, este mapeo puede ser más complicado.)

martes, 11 de septiembre de 2012 06:51 p.m.

Frecuentemente se dice que la CFT "vive en la frontera de AdS", porque es en $z \to 0$ donde los gdos de CIIB describen excitaciones completamente localizadas de MSYM. Es importante, sin embargo, tener presente que al hablar de CIIB en AdS, es incorrecto considerar simultáneamente a alguna teoría 3+1 que vive en $z=0$ (o cualquier otra hoja de la foliación radial). MSYM es una descripción alternativa de CIIB en AdS, y contiene información sobre lo que ocurre en todos los valores de z, no solo $z=0$.

L20: 22/64/24

* La elección de una foliación radial específica de AdS nos permite también leer la métrica del espacio-tiempo donde vive la CFT:

$$ds^2_{AdS} = \frac{L^2}{z^2}\left[\underbrace{g_{\mu\nu}(x,z)}_{\eta_{\mu\nu} + z^4 g^{(4)}_{\mu\nu}(x) + \ldots} dx^\mu dx^\nu + dz^2 \right]$$

"Norma de Fefferman-Graham"

con $g_{zz} = \frac{L^2}{z^2}$, y $g_{z\mu} = 0$

* Dadas estas identificaciones, es claro que los difeos en AdS que solo cambian $x^\mu \to \tilde{x}^\mu(x)$ corresponden directamente a difeos en Minkowski^{3,1}

* Por otro lado, los difeos en AdS que mezclan a x^μ con z cambian la foliación radial, y con ello tienen el efecto de cambiar la métrica de MxM por una transformación de Weyl:

$$z \to \tilde{z} = e^{\omega(x)} z, \quad x^\mu \to \tilde{x}^\mu(x,z) \quad \text{con } \tilde{x}^\mu(x,0) = x^\mu$$

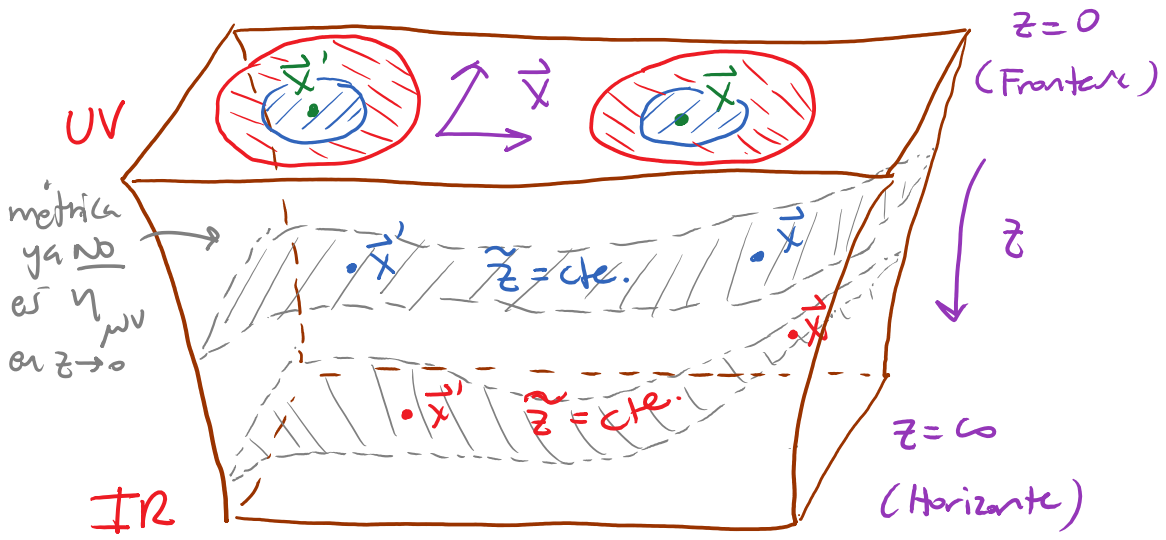
(elegido para evitar términos $\tilde{\omega}\tilde{z}$ en la métrica, y preservar entonces la forma de Fefferman-Graham) produce el efecto

$$g_{\mu\nu}(x) \to \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\omega(x)} g_{\mu\nu}(x)$$ sobre la métrica de la CFT.

[Imbimbo, Schwimmer, Theisen, Yankielowicz]

↳ 21: 01/12/20

Esquemáticamente,



El paso de coordenadas de Poincaré en AdS a coordenadas globales es de hecho un ejemplo de esto. La métrica AdS global (p.225)

$$ds^2_{AdS} = L^2\left(-\cosh^2\rho\, dt^2 + \operatorname{senh}^2\rho\, d\Omega_3^2 + d\rho^2\right)$$

puede ponerse en la forma de Fefferman-Graham definiendo $Z \equiv 2L\, e^{-\rho}$ (para que la frontera $\rho \to \infty$ esté ahora en $Z = 0$), y se encuentra

$$ds^2_{AdS} = \frac{L^2}{Z^2}\left[-\left(L^2 + \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^4}{16L^2}\right)dt^2 + \left(L^2 - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^4}{16L^2}\right)d\Omega_3^2 + dZ^2\right],$$

de donde podemos leer que la CFT vive ahora en un espaciotiempo $\mathbb{R}\times S^3$ con métrica

$$ds^2_{CFT} = L^2\left[-d\tau^2 + d\Omega_3^2\right].$$

Universo estático de Einstein

↑ curvatura cte. >0

Y a partir de las definiciones podemos ver que la relación entre Z y z es

$$\frac{L^2}{Z^2} + \frac{1}{2} + \frac{Z^2}{16L^2} \overset{\text{p.268}}{=} L^2\cosh^2\rho$$

$$\overset{\text{p.225}}{=} (X_{-1})^2 + (X_0)^2$$

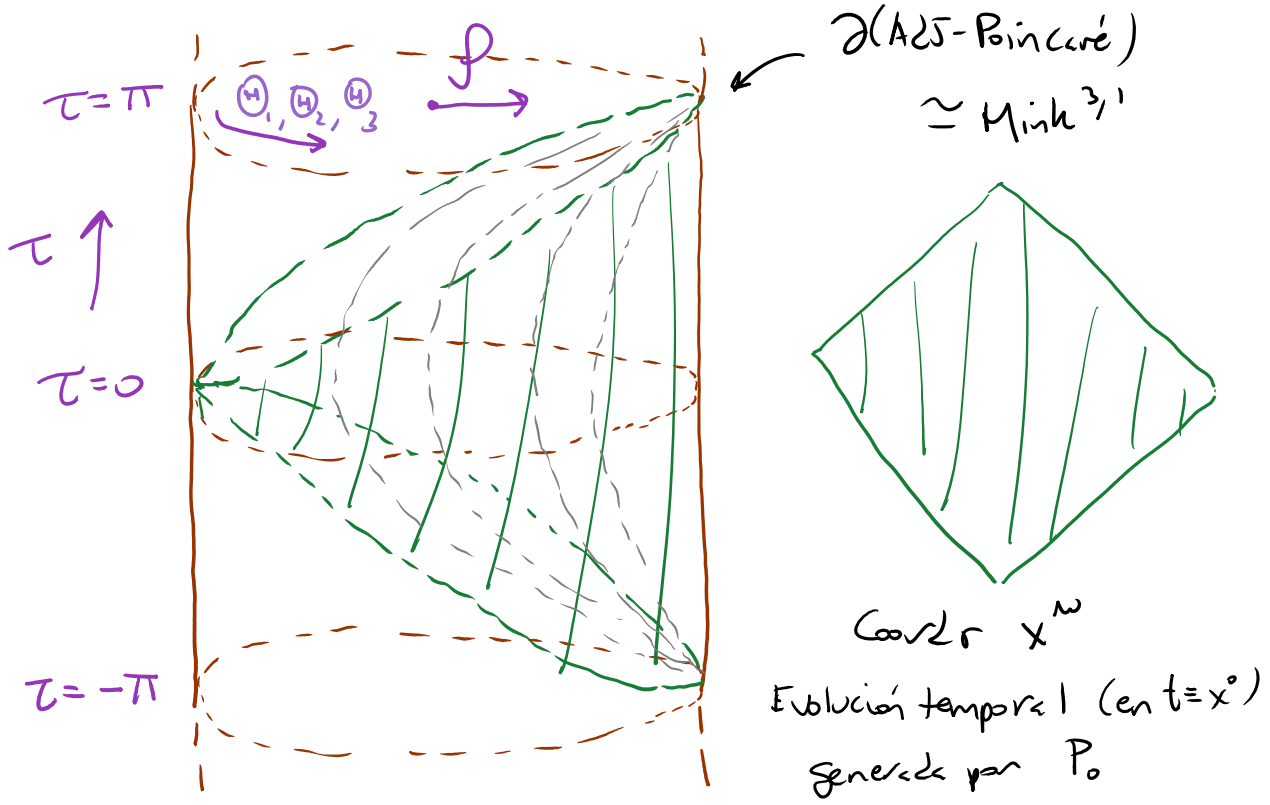
$$\overset{\text{p.269}}{=} \frac{L^2t^2}{z^2} + \frac{z^2}{4}\left[1 + \frac{L^2+\vec{x}^2-t^2}{z^2} + \frac{(L^2+\vec{x}^2-t^2)^2}{z^4}\right],$$

que cerca de la frontera implica

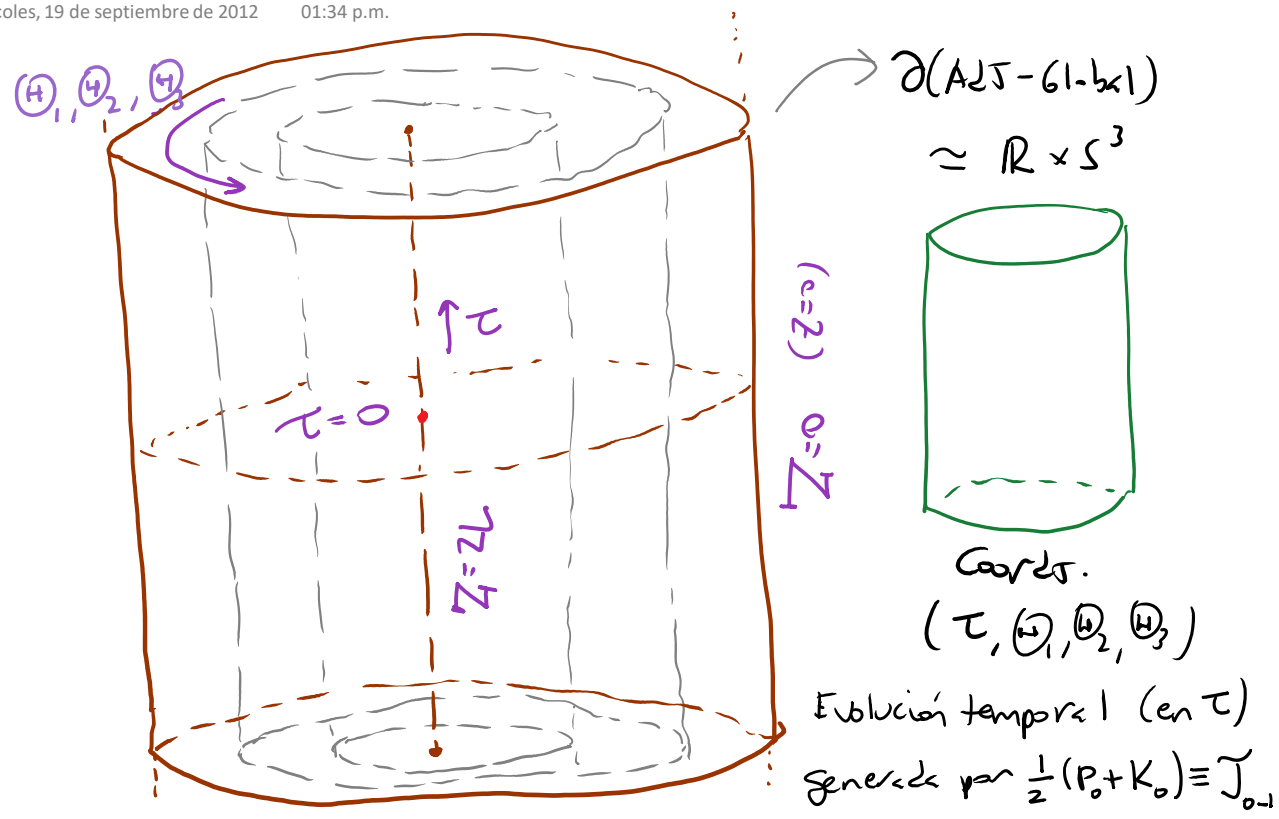
$$Z \simeq \frac{z}{\sqrt{t^2 + \frac{(L^2+\vec{x}^2-t^2)^2}{4L^2}}},$$

es decir, el factor de Weyl entre las coordenadas globales y las de Poincaré es $e^{\omega(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + \frac{(L^2+\vec{x}^2-t^2)^2}{4L^2}}}$.

Entonces, redefiniendo nuestra foliación radial hemos logrado pasar de la correspondencia que teníamos en la cuña de Poincaré,



donde la CFT vivía en Minkowski 3+1, a una nueva situación donde la CFT está definida sobre una 3-esfera $\times$ el tiempo global, que se puede identificar con la frontera de AdS en coordenadas globales,



Y algo interesante es que con esta nueva foliación radial, ¡no tenemos ya un horizonte, y podemos describir el espacio-tiempo AdS_5 completo!

En resumen, podemos entender esto como un nuevo ejemplo de la correspondencia:

MSYM en $\mathbb{R}^{3,1}$ $=$ CIIB en $a AdS_5$-Poincaré $\times S^5$

↓ Weyl $e^{\omega(x)}$ ↓ $z \to \tilde{z} = e^{\omega(x)} z$

MSYM en $\mathbb{R} \times S^3$ $=$ CIIB en $a AdS_5$-Global $\times S^5$

Ambos casos están por supuesto estrechamente relacionados,

↳ conforme ↔ Weyl

particularmente por tratarse de una CFT; pero los detalles de la física son distintos (existe anomalía de Weyl).

LR: 18/10/16

Esto tiene también conexión con el efecto de $SO(4,2)$: si bien en cualquier punto de AdS está bien definido a nivel local el efecto de los generadores de este grupo de isometrías, solo en AdS global está también bien definido el efecto de $SO(4,2)$ a nivel de los elementos del grupo (transformaciones finitas). En particular, hay transformaciones $SO(4,2)$ que nos sacan de la carta de Poincaré. Del lado de la CFT, habíamos enfatizado igualmente que el grupo conforme $SO(4,2)$ (siempre bien definido a nivel local) no está bien definido directamente sobre Minkowski, $\mathbb{R}^{3,1}$, sino que se requiere la adición de puntos en el infinito. Después de esta maniobra, acabamos precisamente con la CFT en $S^3 \times \mathbb{R}$ [Luscher, Mack], que, como ahora sabemos, es dual a AdS global.

Por supuesto, las coordenadas globales y las de Poincaré son apenas 2 ejemplos de distintas foliaciones radiales de AdS, y existe una infinidad de otras opciones. Es posible, por ejemplo, presentar la métrica de AdS en la forma [ver p.ej. 1804.05855 Apéndice A]

$$ds^2_{AdS} = -\left(-1+\frac{r^2}{L^2}\right)dt^2 + r^2 dH_3^2 + \frac{dr^2}{-1+\frac{r^2}{L^2}},$$

con $dH_3^2 \equiv \frac{dy_1^2+dy_2^2+dy_3^2}{y_3^2}$ la métrica en el espacio hiperbólico 3-dimensional (la versión euclideana de AdS_3), o equivalentemente, en la forma de Fefferman-Graham (con $z \equiv L^2/r$)

$$ds^2_{AdS} = \left(1-\frac{L^2}{z^2}\right)dt^2 + \frac{L^4}{z^2}dH_3^2 + \frac{L^4 dz^2}{z^2(L^2-z^2)}$$

$$\overset{z\to 0}{=} \frac{L^2}{z^2}\left[-dt^2 + L^2 dH_3^2 + dz^2 + O(z^2)\right],$$

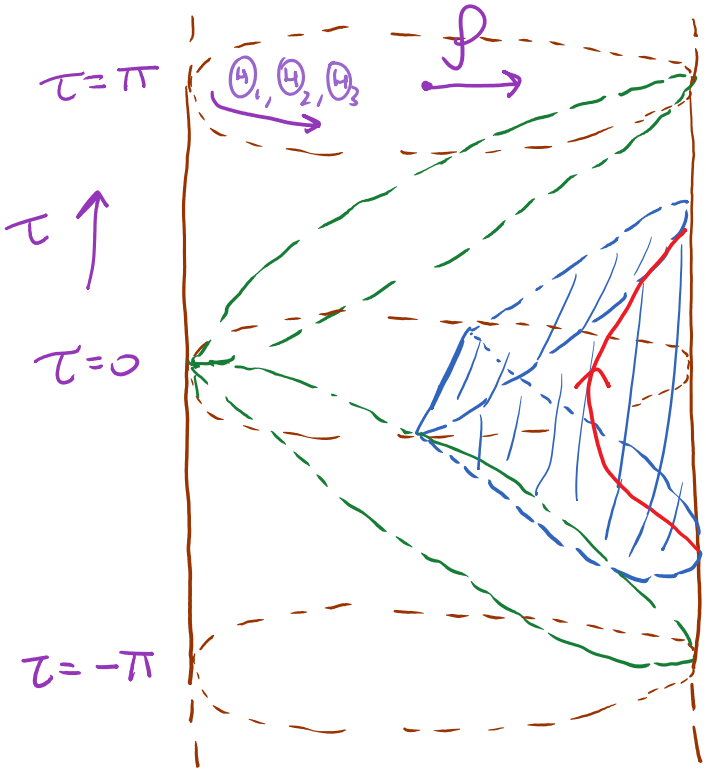
donde vemos que la CFT está ahora definida sobre $\mathbb{R}\times H^3$ con métrica

$$ds^2_{CFT} = -dt^2 + L^2 dH_3^2 .$$

Universo estático abierto de Einstein

↑ curvatura cte. < 0

Esta foliación tiene un horizonte de aceleración en $z = L$ ($\leftrightarrow r = L$), y resulta cubrir una región de AdS que es más pequeña que la cuña de Poincaré,



A diferencia de la cuña de Poincaré, esta cuña de Rindler en AdS sí deja fuera parte de la superficie $\tau = 0$ (~ superficie de Cauchy), así que no contiene toda la información sobre el estado de la teoría gravitacional

Esta región es la que resulta accesible a un observador uniformemente acelerado con $A^2 > 1/L^2$,

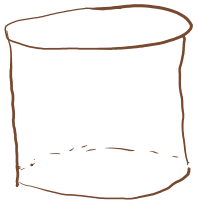
de modo que en este caso sí se tiene un efecto

Unruh: AdS puro corresponde a un estado de la CFT a temperatura finita $T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{A^2 - \frac{1}{L^2}}$. [Emparan]

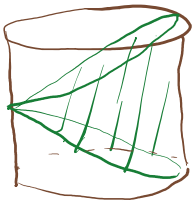
Con otras foliaciones radiales es posible obtener regiones de AdS duales a la CFT en, p.ej., dS_4, AdS_4 global, ó $S^p \times AdS_{4-p}$ [Emparan, Johnson, Myers]. En particular, ¡una teoría de gravedad cuántica en AdS_{d+2} resulta ser dual a una CFT en AdS_{d+1}!

L21: 24/04/24

Además de cambios de foliación radial $\leftrightarrow$ transformaciones de Weyl, podemos hacer rotaciones de Wick sincronizadas en la teoría de gravedad y la CFT, para obtener versiones euclídeas de la correspondencia AdS/CFT. P.ej., a partir de la equivalencia en AdS global, podemos ver que CIIB en H^5 ($\equiv EAdS_5$, la versión euclídea de AdS_5) es dual a MSYM en $\mathbb{R}\times S^3$ euclídeo.



Y de hecho, obtenemos también H^5 completo incluso si empezamos con AdS_5-Poincaré, en cuyo caso MSYM estaría definida sobre



$\mathbb{R}^4$ (la rotación de Wick de $\mathbb{R}^{3,1}$).

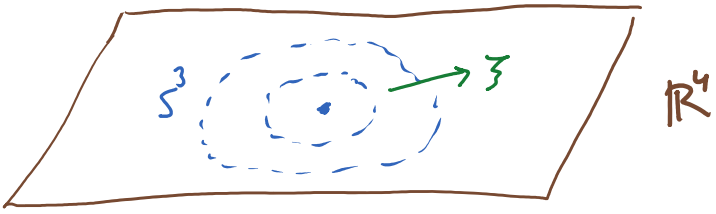
Esto va de la mano con que no existen horizontes en geometrías euclideanas, y también, con que $\mathbb{R}^4$ es completamente equivalente a $\mathbb{R}\times S^3$ bajo una transformación de Weyl:

$$ds^2 = dx_E^i\, dx_E^i \qquad \text{coords. cartesianas} \qquad i = 1,\dots,4$$

$$= dx_E^2 + x_E^2\, d\Omega_3^2 \qquad \text{coords. esféricas} \qquad x_E \equiv \sqrt{x_E^i x_E^i}$$

$$= x_E^2\left(\frac{dx_E^2}{x_E^2} + d\Omega_3^2\right) = e^{2\xi}\left(d\xi^2 + d\Omega_3^2\right).$$

$$\uparrow = d\xi^2 \quad \text{con} \quad \xi \equiv \ln x_E$$



En algunas ocasiones nos convendrá utilizar la versión euclideana de AdS/CFT, y eventualmente hacer la rotación de Wick inversa para volver a la versión Lorentziana.

Continuando con el diccionario de la correspondencia, podemos argumentar que existe un isomorfismo entre los objetos básicos de las 2 teorías.

Del lado de MSYM, los objetos de interés son los operadores invariantes de norma, pues son ellos los que contienen la información física. Por el momento nos concentraremos en operadores locales, $\mathcal{O}(x)$, como p.ej. $\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right)$.

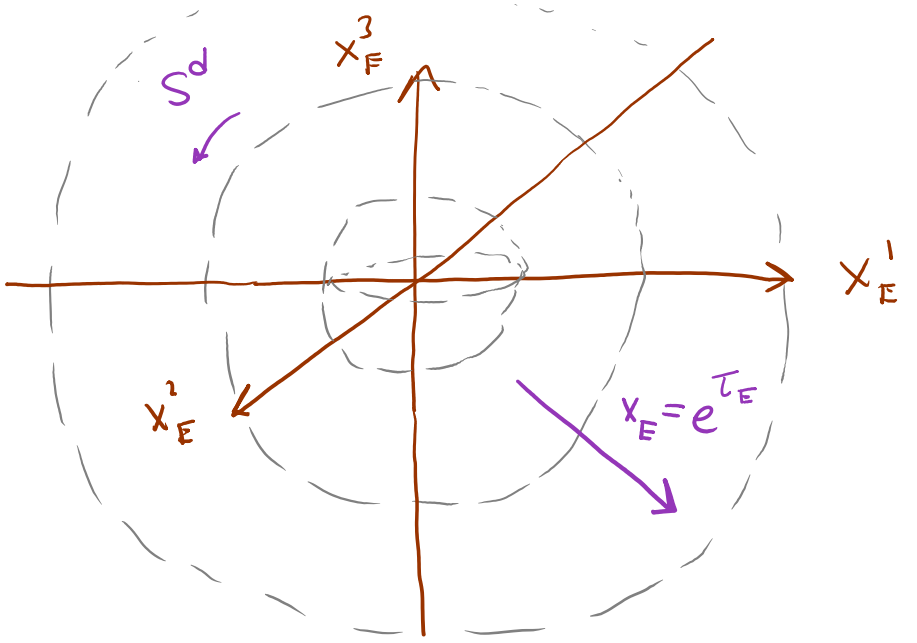
Equivalentemente, podemos considerar a los estados de la teoría, y de hecho, en cualquier CFT_{d+1} existe siempre un isomorfismo entre estados y operadores locales, el llamado mapeo estado-operador.

└ 22:03/12/20

Para entenderlo, conviene pensar en la CFT sobre la versión euclideana de $\mathbb{R}^{d,1}$, es decir, $\mathbb{R}^{d+1}$, y trabajar en coordenadas esféricas $\mathbb{R}\times S^d$, como mencionamos en la página anterior:

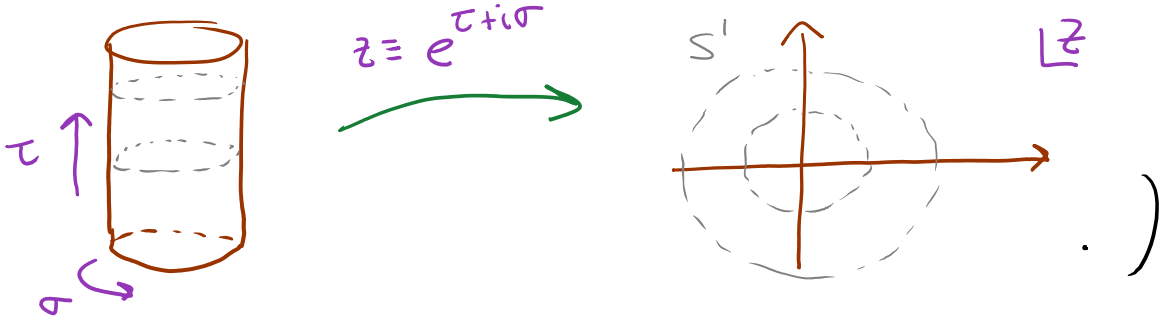
$$ds^2_{CFT} = dx^i_E dx^i_E = dx^2_E + x^2_E d\Omega^2_d$$

$$= e^{2\tau_E}(d\tau_E^2 + d\Omega^2_d) \quad , \quad \text{con } \tau_E \equiv \ln x_E \, .$$



En esta presentación, conocida como cuantización radial, podemos pensar en la dirección radial τ_E (que parametriza al $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}\times S^d$) como si fuera el tiempo, de tal modo que las superficies de tiempo constante son las esferas S^d a distintos valores. El pasado remoto $\tau_E \to -\infty$ corresponde al

origen de $\mathbb{R}^{d+1}$ ($x_E = 0$), y el futuro remoto $\tau_E \to +\infty$ corresponde a la S^d con radio infinito ($x_E \to \infty$). (El mapeo entre el cilindro $\mathbb{R} \times S^1$ y el plano $\mathbb{R}^2$ que se realiza habitualmente para la hoja de mundo de la cuerda cerrada es justamente un caso particular de lo que estamos diciendo aquí,



.)

Podemos notar que las dilataciones $x_E^i \to s\, x_E^i$ en $\mathbb{R}^{d+1}$ corresponden a la evolución temporal $\tau_E \to \tau_E + \ln s$ para la CFT definida en $\mathbb{R} \times S^d$.

El mapeo de operadores a estados es

$$\mathcal{O}(x) \to |\mathcal{O}\rangle \equiv \lim_{x \to 0} \mathcal{O}(x)|0\rangle ,$$

(evaluado en el pasado remoto)

o lo que es lo mismo,

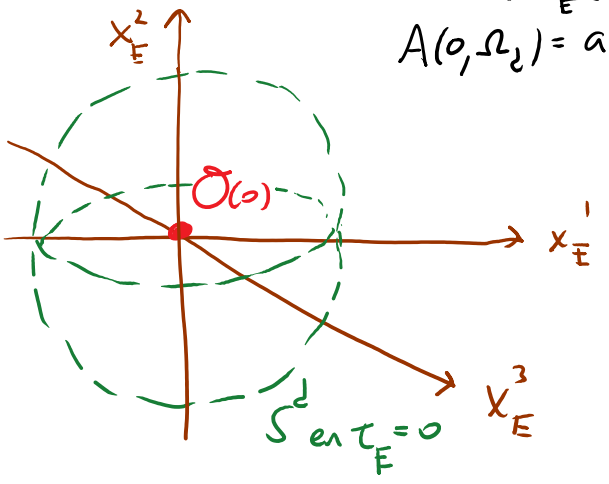
funcional de onda para estado $|\mathcal{O}\rangle$

$$\langle a(\Omega_d)|\mathcal{O}\rangle \equiv \langle a(\Omega_d)|\mathcal{O}(0)|0\rangle$$

$$= \int_{-\infty < \tau_E \le 0} \mathcal{D}A(\tau_E, \Omega_d)\,\mathcal{O}(0)\,e^{-S_{CFT}[A]}$$

$$A(0,\Omega_d) = a(\Omega_d)$$

valor de campos A de CFT sobre S^d



Esta integral funcional define un estado: un mapeo de $a(\Omega_d)$'s a números.

Caso particular:
$\mathcal{O} = 1 \Rightarrow |\mathcal{O}\rangle = |0\rangle$ ✓

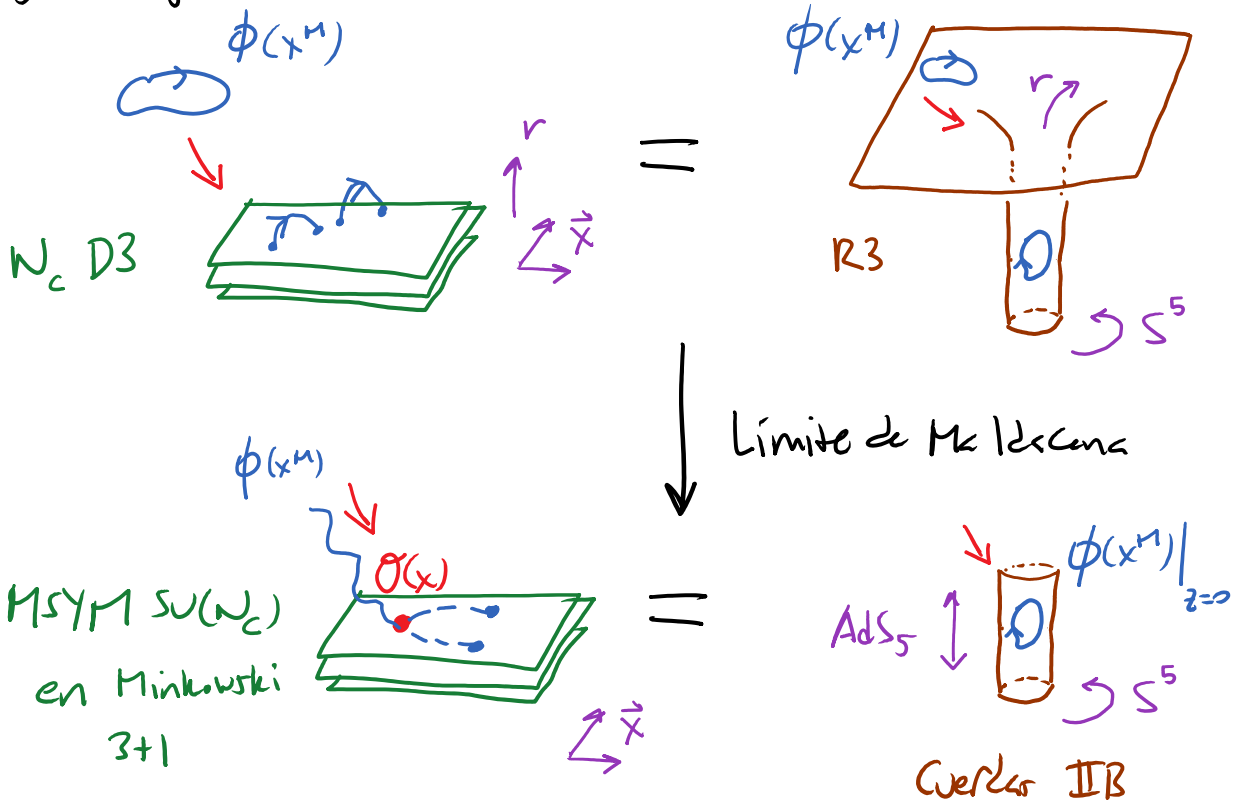
El mapeo inverso, de estados a operadores, toma un estado definido como funcional de $a(\Omega_d)$ a un cierto tiempo/radio τ_E y hace una dilatación para encoger el radio de la S^d (es decir, disminuir el valor de τ_E) hasta cero, de modo que equivale a la inserción de un operador local en el origen ($\tau_E \to -\infty$).

Del lado de la teoría de gravedad, los objetos básicos son los campos $\phi(x^M)$, que en el límite clásico ($N_c \to \infty$) asumen ciertos valores específicos,

← no confundir con dilatón $\varphi(x^M)$

y en la teoría cuántica son también operadores que pueden actuar sobre el vacío para darnos distintos estados.

Esperamos entonces una correspondencia entre operadores $\mathcal{O}(x^M)$ en MSYM y campos $\phi(x^M)$ en CIIB. Podemos entender el origen de esta conexión volviendo a la equivalencia entre la R3-brana negra y el bonche de N_c D3-branas antes del límite de bajas energías:



Podemos explorar a los D3's / jugando arrojándoles una cuerda cerrada vibrando en un modo particular, que corresponde a un campo específico de CIIB, $\phi(x^M)$. En el lado de los D3's, este campo puede excitar a los branes, convirtiéndose en un cierto número de cuerdas abiertas vibrando en modos específicos. En el límite de bajas energías, esto se refleja en el hecho de que el campo $\phi(x^M)$ se acopla a un operador local invariante de norma $\mathcal{O}(x^M)$ en MSYM (cuya inserción en correladores crea un cierto número de gluones + etc. — ver, p.ej., p. 86).

Podemos entonces identificar cuál $\mathcal{O}(x^M)$ le corresponde a cada $\phi(x^M)$ examinando la acción de los D3's en el límite de Maldacena:

$$S_{D3's} = S_{MSYM} + S_{\alpha'} + S_{int}$$

S_{MSYM}: $\int d^4x\, \mathrm{Tr}(F^2 + \dots)$; $S_{\alpha'}$: $\int d^4x\, \ell_c^4\, \mathrm{Tr}(F^4 + \dots)$

S_{int} ← acoplamientos entre campos de MSYM y CIIB: $\int d^4x\, \phi\, \mathcal{O}$ (cf. $\int d^4x\, J\varphi$ en p.ej. φ^4)

En resumen, el valor de $\phi(x^M)$ en la ubicación de los D3's se convierte en una fuente externa de los campos de MSYM a través del operador $\mathcal{O}(x^M)$.

Del lado de CIIB, podemos producir excitaciones de las cuerdas en $AdS_5 \times S^5$, y el valor de $\phi(x^\mu)$ que es fuente de estas excitaciones es el que el campo tiene en la frontera de AdS, $z=0$, porque ese es el "punto de entrada" a (lo que queda de) la garganta, que sabemos es dual a los D3s.

Un ejemplo concreto es el dilatón φ, que figura en la acción de los D3s en la forma (p.189)

$$S_{D3} = -\underbrace{T_{D3}}_{\frac{1}{(2\pi)^3 g_c \ell_c^4}} \int d^4x \; \underbrace{e^{-\varphi}}_{1-\varphi+\dots} \; STr\left\{\sqrt{-\det\left(\eta_{\mu\nu} + 2\pi\ell_c^2 F_{\mu\nu}\right)} + \dots\right\}$$

(traza simetrizada)

($e^{\langle\varphi\rangle}$ ← ; ↑ fluctuación por encima de valor de fondo $\langle\varphi\rangle$)

$$= \underbrace{-\frac{1}{8\pi g_c} \int d^4x \; Tr\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \dots\right)}_{\frac{1}{2g_{YM}^2}} + \int d^4x \; \varphi \underbrace{Tr\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \dots\right)}_{\mathcal{O}_\varphi = \mathcal{L}_{MSYM}} + \dots$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{S_{MSYM}}$$

así que el operador dual a φ (cuyo valor en $z=0$

$S_{MSYM} \supset \int d^4x \, \frac{1}{g_{YM}^2} \mathrm{Tr}(F^2 + \dots)$

determina a $g_c \leftrightarrow g_{YM}^2$) es $\mathrm{Tr}(F^2+\dots) \sim \lim_{l_c \to 0} \left. \frac{\delta S_{D3}}{\delta \varphi} \right|_{\varphi=0}$.

Con un argumento similar, podemos ver que el escalar RR C (cuyo valor en $z=0$ determina a θ_{YM}) es dual a $\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}) \sim \lim_{l_c \to 0} \left. \frac{\delta S_{D3}}{\delta C} \right|_{C=0}$.

El gravitón h_{MN} aparece por supuesto en S_{D3} dentro de la métrica $g_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN}$,

$$S_{D3} = -T_{D3} \int d^4x \; \mathrm{STr} \left\{ \sqrt{-\det\left(g_{\mu\nu} + 2\pi l_c^2 F_{\mu\nu} \right)} + \dots \right\},$$

(métrica inducida)

de modo que sus componentes $\mu\nu$ son duales al tensor de energía momento de MSYM,

$$\mathcal{O}_{h_{\mu\nu}}(x) \sim \lim_{l_c \to 0} \left. \frac{\delta S_{D3}}{\delta h^{\mu\nu}} \right|_{h=0} \equiv T_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\left(F_{\mu}{}^{\lambda} F_{\nu\lambda} + \dots \right).$$

LI9: 20/10/16

Para ser más precisos, debemos notar 2 cosas. Primero, dado que en MSYM todos los campos están en la representación adjunta (son matrices $N_c \times N_c$), los operadores locales invariantes de norma

son necesariamente del tipo

bajo $SU(N_c)$, $M(x) \to U(x) M(x) U^{-1}(x)$

$$\mathcal{O}(x) \sim \mathrm{Tr}\left(M_1(x) M_2(x) \dots\right),$$

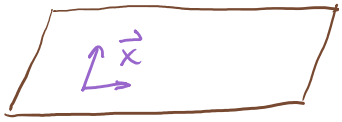
donde los $M_I(x)$ denotan a $F_{\mu\nu}(x)$, $\Phi^e(x)$, $\psi^f(x)$ o derivadas covariantes D_μ de estos campos básicos. (No A_μ)

Más en general, podemos tener sumas de productos de estos operadores de una traza, que habíamos entendido físicamente como operadores de glubla en las pp. 84-91. Cuando $N_c \to \infty$, crean una glubola.

Del lado de AdS, los operadores locales más generales son sumas de productos de los $\phi(x^\mu)$, así que es natural esperar que cada campo básico $\phi(x^\mu)$, que crea una partícula cuando $g_c \propto \frac{1}{N_c} \to 0$, sea dual a un operador de una traza $\mathcal{O}_\phi(x^\mu)$, mientras que productos de los ϕ's, que crean estados de $n \geq 2$ partículas (o quizás estados ligados), sean duales a operadores de $n \geq 2$ trazas.

La segunda observación es que los operadores naturales en MSYM,

$\mathcal{O}(x) \sim Tr(M_1(x) M_2(x) \dots)$,



están localizados en las coordenadas de Minkowski x^μ, pero NO en las coordenadas $\theta^1, \dots, \theta^5$ del espacio interno S^5 asociado a la simetría R $SU(4) \simeq SO(6)$.

Más bien, tienen números cuánticos específicos bajo esta simetría, es decir, pertenecen a alguna representación específica (con dimensión finita) de este grupo de transformaciones. P.ej., $Tr(F^2(x) + \dots)$ ó $Tr(\Phi^e \Phi^e(x))$ (c/suma sobre $e=1,\dots,6$) son escalares (singuletes) bajo $SO(6)$, $Tr(\Phi^e(x))$ transformaría en la rep fundamental ($\underline{6}$) de $SO(6)$ (salvo por el hecho de que $Tr(M(x)) = 0 \ \forall \ M(x)$, porque el grupo de norma es $SU(N_c)$), y $Tr(\Phi^{e_1} \Phi^{e_2}(x))$ transforma en la rep

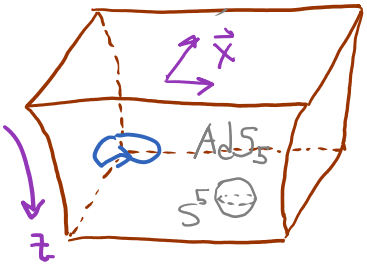
$\underline{20}$ (parte simétrica sin traza) + $\underline{15}$ (parte antisimétrica)

$1+2+\dots+6 = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$ $\qquad$ $1+2+\dots+5 = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$

+ $\underline{1}$ (traza) de $SO(6)$.

Sabiendo que el espacio interno S^5 en MSYM corresponde al factor S^5 del espaciotiempo en CIIB, debemos esperar entonces que los operadores $\mathcal{O}_\phi(x^\mu)$ ($\mu = 0,1,2,3$) correspondan no a campos $\phi(x^M)$ ($M = 0,1,2,\dots,9$) localizados en las 9+1 dimensiones del espaciotiempo, sino a campos $\phi(x^m)$ ($m = 0,1,2,3,4$) en AdS_5, con propiedades de transformación específicas bajo el grupo de isometrías de la S^5. Es decir, cada campo 10-dimensional se descompone en una torre infinita de modos de Kaluza-Klein (KK) sobre la S^5,

¡No es pequeña!



$$\phi(x^m, \theta^a) = \sum_k \phi_k(x^m)\, Y_k(\theta^a)$$

(x^μ, z)

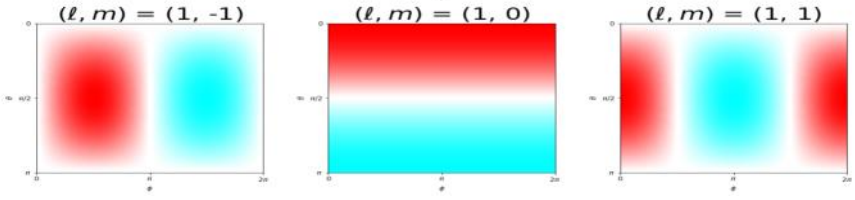
número(s) de KK: índice compuesto análogo a ℓ,m de $Y_{\ell,m}$ en S^2

armónicos esféricos sobre S^5

(análogo a Fourier $\phi(x^m, \theta) = \sum_n \phi_n(x^m) e^{in\theta}$ sobre S^1),

y dado que los $Y_k(\theta^a)$ pertenecen a representaciones de dimensión finita de $SO(6) \simeq SU(4)$, son los modos de KK $\phi_k(x^m)$ los que son directamente duales a operadores de MSYM.

cf. $Y_{\ell m} \hookrightarrow SO(3)$, p.ej. $\ell = 1$ $m = 0, \pm 1$



Juntando las 2 observaciones, concluimos entonces que

martes, 25 de septiembre de 2012 11:07 a.m.

* Campo de CIIB en AdS_5 (modo de KK sobre S^5) ⟷ Operador local invariante de norma en MSYM (con 1 traza cuando $N_c \to \infty$)

$$\phi_k(x^m) \longleftrightarrow \mathcal{O}_{\phi_k}(x^\mu)$$

$\phi_k(x^m)$ ← (x^μ, z)

P.ej., el modo del dilatón que es constante sobre la S^5 (la "onda s") es dual a la densidad lagrangiana de MSYM,

* $\varphi(x^m) \longleftrightarrow \mathcal{O}_\varphi(x^\mu) = \mathrm{Tr}\left(F^2(x^\mu) + \dots\right)$.

sin momento angular sobre S^5

invariante bajo simetría R $SO(6) \simeq SU(4)$

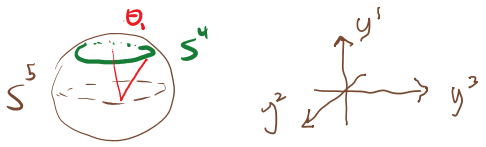
4.23 : 08/12/20

En el caso de un campo escalar como el dilatón, los armónicos relevantes sobre la S^5 (eigenfunciones del Laplaciano sobre S^5, con eigenvalor $\ell(\ell+4)$ cf. $\ell(\ell+1)$ en S^2) pueden definirse como

$$Y_{e_1 \dots e_\ell}(\theta^q) \propto y^{\{e_1} y^{e_2} \cdots y^{e_\ell\}},$$

← Tal como nos es familiar para $Y_{\ell m}$ en S^2

donde $y^{e=1,\dots,6}$ son coordenadas cartesianas en el $\mathbb{R}^6$ donde definimos a S^5 a través de $\sum_{e=1}^{6} (y^e)^2 = 1$,



(es decir $y^1 = \cos\theta_1$, $y^2 = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2$, ..., $y^6 = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cdots \operatorname{sen}\theta_5$)

y $\{\cdots\}$ significa simetrizar los índices y restar todas las trazas.

Los modos de Kaluza-Klein del dilatón con $l \neq 0$ asociados a esta expansión,

$$\varphi(x^m, \theta^a) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{e_1, \ldots, e_l = 1}^{6} \varphi_{e_1 \cdots e_l}(x^m)\, Y_{e_1 \cdots e_l}(\theta^a),$$

tienen momento angular sobre la S^5, y son duales por tanto a operadores en MSYM que son variantes de $\mathrm{Tr}(F^2 + \ldots)$ CON carga R (es decir, que transforman en la representación correspondiente de $SO(6) \simeq SU(4)$),

$$* \quad \varphi_{e_1 \cdots e_l}(x^m) \longleftrightarrow \mathcal{O}_{\varphi_{e_1 \cdots e_l}}(x^\mu) = \mathrm{Tr}\left[(F^2 + \ldots)\Phi^{\{e_1} \cdots \Phi^{e_l\}}\right]$$

(esta conexión es la que se encuentra al desarrollar $S_{int} \subset S_{DJ}$ en armónicos esféricos).

martes, 25 de septiembre de 2012 05:08 p.m.

Similarmente, es la onda s del gravitón la que es dual al tensor de energía-momento en MSYM,

x^ρ, z

* $h_{mn}(x^p) \longleftrightarrow T_{\mu\nu}(x^\rho) = Tr\left(F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda + \dots\right)$,

p.216 difeor $x^m \to x^m + \xi^m \Rightarrow h_{mn} \to h_{mn} + \nabla_m \xi_n + \nabla_n \xi_m$ permiten fijar norma $h_{zm} = 0$

y las ondas parciales de $h_{mn}(x^p, \theta^a)$ con momento angular (que están asociadas a armónicos esféricos tensoriales) son duales a operadores en MSYM que son generalizaciones de $T_{\mu\nu}$ con carga R (por inserciones de $\Phi^{\{e_1} \dots \Phi^{e_l\}}$).

22 : 29/04/24

Podemos hacer aquí una observación importante: en cualquier teoría cuántica de campos local, siempre $T_{\mu\nu}(x)$ es uno de los operadores locales invariantes de norma (que se conserva si hay invariancia bajo translaciones en el espaciotiempo), y su campo correspondiente, el gravitón $h_{mn}(x)$, deberá entonces estar presente en la descripción dual. Veamos entonces que,

en cualquier ejemplo de la correspondencia AdS/CFT (o incluso, no-AdS/no-CFT), la teoría en AdS (o no-AdS) incluye a la gravedad.

Volviendo a nuestro ejemplo favorito CFT = MSYM, ahora que conocemos la conexión que existe entre campos $\phi(x^m)$ en AdS y operadores $\mathcal{O}_\phi(x^m)$ en la CFT, podemos recordar que en el límite $N_c \to \infty$ ($g_c \to 0$) los campos $\phi(x^m)$ se vuelven libres, y crean solo estados de una partícula. Esto empata con (y explica) la propiedad de factorización de los operadores de 1 traza que vimos antes (en las pp. 87-91),

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle \underset{N_c\to\infty}{=} \underbrace{\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\rangle}\cdots\langle \mathcal{O}_{n-1}(x_{n-1})\mathcal{O}_n(x_n)\rangle + \ldots$$

funciones de 2 ptos sobrevivan porque $\langle \mathcal{O}(x)\rangle = 0$ en CFT

que implica que todos los $\mathcal{O}_i$ crean partículas libres. (En MSYM todos estos son operadores de glueballs; pero vimos que la factorización para $N_c \gg 1$ aplica igualmente para operadores de mesones, si los hay en la teoría.) Esto es consistente también con nuestra afirmación

de que la correspondencia campo ↔ operador se puede formular igualmente a nivel de estados, con

$\phi(x)|0\rangle \leftrightarrow \mathcal{O}_\phi(x)|0\rangle$ = estado de 1 partícula (1 glueball)

$\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots|0\rangle \longleftrightarrow \mathcal{O}_{\phi_1}(x_1)\mathcal{O}_{\phi_2}(x_2)\cdots|0\rangle$ = estado de multipartículas (varios glueballs)

↳ en teoría estricta, en una CFT no hay partículas (↔ estados asintóticos)

Para $N_c < \infty$, los campos $\phi(x)$ se vuelven interactuantes, y NO crean estados puramente de 1 partícula.
Lo mismo ocurre entonces para $\mathcal{O}_\phi(x)$, cuyos correladores ya no se factorizan. Los estados de 1 partícula $\sim \left(\phi(x) + \frac{\text{cte.}}{N_c}\phi(x)\phi(x) + \ldots\right)|0\rangle$ están asociados entonces a operadores con contribuciones multitraza,

$\sim \mathcal{O}_\phi(x) + \frac{\text{cte.}}{N_c}\mathcal{O}_\phi(x)\mathcal{O}_\phi(x) + \ldots$

[Banks, Douglas, Horowitz, Martinec; Balasubramanian, Giddings, Lawrence]

Hasta ahora hemos mostrado apenas algunos ejemplos del mapeo entre los campos de CIIB y los operadores invariantes de norma de MSYM. Si la correspondencia AdS/CFT es correcta, debe existir un acuerdo perfecto entre ambas colecciones de objetos.

Dado que las 2 teorías posean las mismas simetrías globales, ambos tipos de objetos se organizan naturalmente en (super) multipletes de estas simetrías, particularmente del grupo (super) conforme. La pregunta clave (y no trivial) es entonces si CIIB y MSYM en verdad contienen los mismos (super-) multipletes: $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2 \leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \mathcal{O}_1 \leftrightarrow \mathcal{O}_2 \leftrightarrow \cdots$.

Del lado de MSYM, como en cualquier CFT, los operadores pertenecen a multipletes que forman una representación irreducible del grupo conforme, y tienen en particular una dimensión (de escalamiento) Δ específica:

miércoles, 26 de septiembre de 2012 05:58 a.m.

Como vimos en la p. 109, bajo $x^\mu \to s x^\mu$ ($s = \exp(\ln s)$) se tiene

$$\mathcal{O}(x) \longrightarrow \mathcal{O}'(x) = s^{iD}\mathcal{O}(x)s^{-iD} = s^{\Delta}\mathcal{O}(sx),$$

($s^{iD} = \exp(iD\ln s)$, $s^{\Delta} = \exp(\Delta \ln s)$)

lo cual equivale a decir que

$$\delta\mathcal{O}(x) \propto [D, \mathcal{O}(x)] = i(-\Delta + x^\mu \partial_\mu)\mathcal{O}(x),$$

(reescala $\mathcal{O}$; reescala x)

de modo que $\mathcal{O}(0)$ es un <u>eigenoperador</u> del generador de dilataciones D, con eigenvalor $-i\Delta$,

$$[D, \mathcal{O}(0)] = -i\Delta\,\mathcal{O}(0).$$

De las pp. 108-9 sabemos también que

$$[D, J_{\mu\nu}] = 0, \quad [D, P_\mu] = -iP_\mu, \quad [D, K_\mu] = +iK_\mu,$$

(Lorentz; traslaciones; especiales)

es decir, $J_{\mu\nu}$, P_μ y K_μ tienen dimensión $0, +1, -1$.

Así que si $\mathcal{O}(0)$ tiene dimensión Δ, entonces

$[J_{\mu\nu}, \mathcal{O}(0)]$, $[P_\mu, \mathcal{O}(0)]$ y $[K_\mu, \mathcal{O}(0)]$

tienen respectivamente dimensión $\Delta, \Delta+1$ y $\Delta-1$.

(Pej., $[D, \underbrace{[K_\mu, \mathcal{O}(0)]}_{\mathcal{O}'(0)}]$ $\overset{\text{Jacobi}}{=}$ $[[D, K_\mu], \mathcal{O}(0)] + [K_\mu, [D, \mathcal{O}(0)]]$

$= +i[K_\mu, \mathcal{O}(0)] - i\Delta[K_\mu, \mathcal{O}(0)]$

$$= -i(\Delta-1)\underbrace{[K_\mu, \mathcal{O}(0)]}_{\mathcal{O}'(0)} \quad . \;)$$

Podemos pensar entonces en K_μ y P_μ como análogos respectivamente a operadores de aniquilación a_μ y creación $a_\mu^\dagger$, que disminuyen o aumentan el eigenvalor Δ, análogo a n (eigenvalor de $N \equiv a_\mu^\dagger a_\mu$).

Ahora bien, en una teoría de campos unitaria los operadores deben tener dimensión positiva (salvo por $\mathcal{O}=1$, que tiene $\Delta=0$) [ver p.ej. Minwalla, hep-th/9712074], ← para evitar normas negativas

así que dado cualquier $\mathcal{O}(0)$, con aplicaciones sucesivas de $[K_\mu, \cdot]$ debemos llegar eventualmente a un operador $\underline{\mathcal{O}}(0)$ que es aniquilado por K_μ,

$$[K_\mu, \underline{\mathcal{O}}(0)] = 0 \;,$$

y tiene entonces la menor dimensión de todos los operadores en ese multiplete. Decimos que tal $\underline{\mathcal{O}}(x)$ es un operador primario (conforme) (y, en la analogía $K_\mu \sim a_\mu$, $P_\mu \sim a_\mu^\dagger$, $\underline{\mathcal{O}}(0)$ es análogo al vacío $|0\rangle$).

Comenzando con un operador primario $\underline{\mathcal{O}}(x)$, podemos generar el multiplete completo actuando repetidamente con los generadores del grupo conforme, que sobre $\underline{\mathcal{O}}(x)$ tienen el efecto

$$[P_\mu, \underline{\mathcal{O}}(x)] = i\partial_\mu \underline{\mathcal{O}}(x) \quad ,$$

$$[J_{\mu\nu}, \underline{\mathcal{O}}(x)] = \{ i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + M_{\mu\nu} \} \underline{\mathcal{O}}(x) \quad ,$$

$M_{\mu\nu}$: matriz en alguna rep de Lorentz, que actúa sobre índices de $\underline{\mathcal{O}}$

$$[D, \underline{\mathcal{O}}(x)] = i(-\Delta + x^\mu \partial_\mu) \underline{\mathcal{O}}(x) \quad ,$$

se anula si $x^\mu = 0$ ✓

$$[K_\mu, \underline{\mathcal{O}}(x)] = \{ i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu + 2x_\mu \Delta) - 2x^\nu M_{\mu\nu} \} \underline{\mathcal{O}}(x) .$$

Más en concreto, actuando sobre $\underline{\mathcal{O}}(0)$ con $J_{\mu\nu}$ obtenemos todas sus otras componentes de Lorentz, y actuando con P_μ un número arbitrario de veces obtenemos todos los nuevos operadores del multiplete $\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_n} \underline{\mathcal{O}}(0)$ (que nos permiten reconstruir a $\underline{\mathcal{O}}(x)$ por expansión de Taylor), los cuales se conocen como los descendientes del operador primario.

índices de Lorentz implícitos

(Esto es análogo al hecho de que podemos construir el espacio de Hilbert completo para un oscilador actuando con $a^\dagger_\mu$ sobre $|0\rangle$.)

La representación de $SO(4,2)$ que obtenemos así tiene dimensión infinita, y se puede caracterizar por los

3 números (Δ, s_I, s_D), donde Δ es la dimensión del operador primario y (s_I, s_D) determinan la manera en que transforma $\mathcal{O}(0)$ bajo Lorentz, es decir, la rep a la que pertenece la matriz $M_{\mu\nu}$. (Podemos recordar que el grupo de Lorentz se descompone como $SO(3,1) \text{ "}=\text{"} SU(2)_I \times SU(2)_D$, y $s_I, s_D = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ son los espines correspondientes. P.ej., $(s_I, s_D) = (\frac{1}{2}, 0)$ denota un espinor de Weyl izquierdo, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es un cuadrivector, etc.)

Estos 3 números determinan a los 3 operadores de Casimir de $SO(4,2)$ (← conmutan con todo, y ∴ clasifican las reps), incluyendo al Casimir cuadrático

(← ver p. 110) (← análogo a $\vec{J}^2$)

$$C_2 \equiv \frac{1}{2} J_{MN} J^{MN} \qquad (M,N = -1,0,1,2,3,4)$$

$$= D^2 + \frac{1}{2}(P\cdot K + K\cdot P) + \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} .$$

Hay además un Casimir cúbico y uno cuártico

En teorías de campo relativistas, estamos acostumbrados a etiquetar las representaciones con el espín

(s_I, s_D) asociado a Lorentz y la masa $m^2 \equiv -P_\mu P^\mu$. Este último operador es un Casimir del grupo de Poincaré; pero NO del grupo conforme, porque $[D, P^2] \neq 0$. Es importante tener presente entonces que los operadores $\mathcal{O}(0)$ (o los estados $\mathcal{O}(0)|0\rangle$ que ellos crean) en los multipletes conformes que hemos descrito arriba, por tener una dimensión definida, no pueden tener una masa ($-P^\mu P_\mu$) ni una energía (P_0) definida. (De hecho, contienen un espectro continuo de m^2 que va desde 0 hasta ∞.)

L20: 25/10/16

Además de ser conforme, MSYM es superconforme (es una SCFT), con lo cual los multipletes de operadores invariantes de norma serán aún más grandes: si tomamos a algún $\mathcal{O}(0)$ primario conforme, actuando con las supercargas conformes $S_{\alpha f}$ ó $\bar{S}^f_{\dot\alpha}$ (que conmutan con K_μ) o con

algunas combinaciones de las supercargas Q^f_α y $\bar{Q}_{\dot\alpha f}$ podemos obtener otros primarios conformes.

Dado que (p. 118) ($\dim = +\frac{1}{2}$, $\dim = -\frac{1}{2}$)

$$[D, Q^f_\alpha] = -\frac{i}{2} Q^f_\alpha \,, \quad [D, S_{\alpha f}] = +\frac{i}{2} S_{\alpha f} \,,$$

vemos que al actuar con las Q's aumentamos la dimensión en $\frac{1}{2}$ (y lo mismo sucede con las $\bar{Q}$'s), mientras que al actuar con las S's (y $\bar{S}$'s) disminuimos la dimensión por $\frac{1}{2}$. (Así que $Q, \bar{Q}$ y $S, \bar{S}$ son resp. análogos a nuevos operadores de creación $b^{\dagger}_\alpha, b^{\dagger}_{\dot\alpha f}$ y aniquilación $b_{\alpha f}, b^f_{\dot\alpha}$, ahora fermiónicos.) Al actuar con R_A no cambia Δ.

La dimensión de los operadores todavía está acotada por debajo, así que debe existir un operador primario $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(x)$ tal que (dependiendo de si $\underline{\underline{\mathcal{O}}}$ es fermiónico o bosónico)

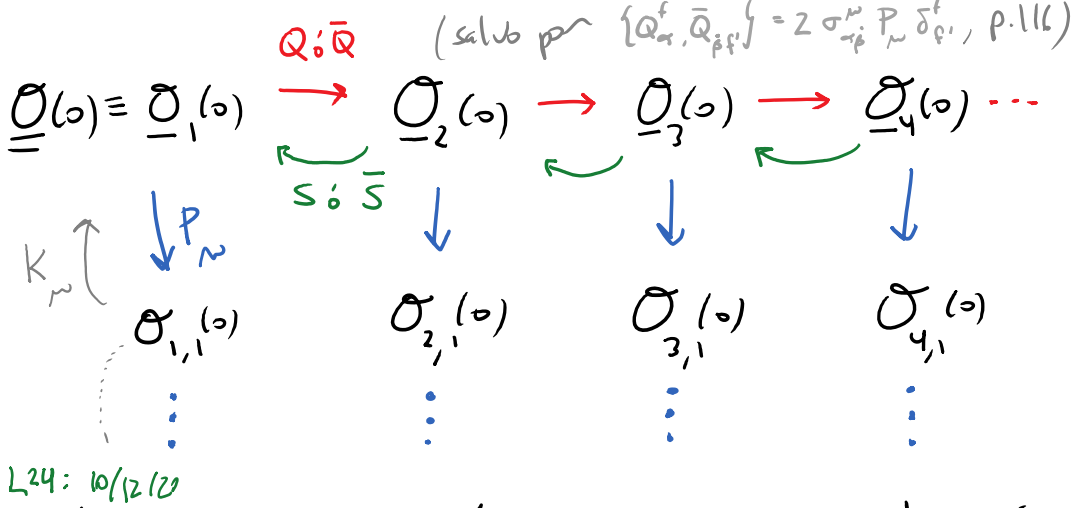
$$[S_{\alpha f}, \underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)]_{\pm} = 0 = [\bar{S}^f_{\dot\alpha}, \underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)]_{\pm} \quad \forall\, \alpha, \dot\alpha, f$$

(además de que $[K_\mu, \underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)] = 0$).

Esto se conoce como un operador primario superconforme.

martes, 02 de octubre de 2012 02:47 p.m.

Un (súper) multiplete completo del grupo superconforme $SU(2,2|4)$ se obtiene entonces comenzando con un operador primario súperconforme $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)$ (que por definición es aniquilado por todos los $S, \bar{S}$ y K_μ), y actuando sobre él con los operadores Q y $\bar{Q}$ para obtener otros primarios conformes $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)$, los cuales a su vez dan lugar a descendientes bajo la acción de P_μ. Esquemáticamente,



L24: 10/12/12

Estos multipletes están caracterizados por los números cuánticos del primario superconforme $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)$ bajo

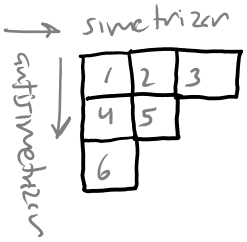
$$SO(4,2) \times SO(6) \simeq SU(2,2) \times SU(4) \subset SU(2,2|4),$$

(conforme; simetría R)

es decir, su dimensión Δ y espín (s_I, s_D)

(asociados respectivamente a $SO(1,1) \times SO(3,1) \subset SO(4,2)$ (dilatación / Lorentz)

y su representación ("carga") bajo la simetría R $SU(4)$, que podemos identificar con un diagrama de Young con ≤ 3 filas: [23:06/05/12]



$\leftarrow r_1$ cajas
$\leftarrow r_2$ cajas
$\leftarrow r_3$ cajas

donde $\square$ denota la rep fundamental de $SU(4)$

$\leftrightarrow \mathcal{O}^{1,\dots,4}_{f_1 f_2 \cdots f_6}(x)$ sim. 123,45 antisim. 146,25

P.ej., $\square = \underline{4}$, $\begin{array}{|c|}\hline\\\hline\\\hline\end{array} = \underline{6}$ (fundamental de $SO(6)$),

$\square\square = \underline{10}$, $\begin{array}{|c|}\hline\\\hline\\\hline\\\hline\end{array} = \overline{\underline{4}}$ (antifundamental de $SU(4)$), etc.

Equivalentemente, se pueden dar las "etiquetas de Dynkin" $[d_1, d_2, d_3]$, donde $d_1 \equiv r_3$, $d_2 \equiv r_2 - r_3$, $d_3 \equiv r_1 - r_2$,

La dimensión de la rep de $SU(4)$ resulta ser (cajas extra: región 2 vs. 3 o 1 vs. 2)

$$\dim [d_1, d_2, d_3] = \frac{1}{12} \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \tilde{d}_3 (\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2)(\tilde{d}_2 + \tilde{d}_3)(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 + \tilde{d}_3),$$

con $\tilde{d}_i \equiv d_i + 1$.

(más en general, $[d_1, d_2, d_3]^* = [d_3, d_2, d_1]$)

P.ej., $[1,0,0] = \overline{\underline{4}}$, $[0,1,0] = \underline{6}$, $[0,0,1] = \underline{4}$.

El multiplete entero tiene dimensión infinita

(puesto que es posible actuar repetidamente con P_μ), pero contiene solo un número finito de primarios conformes, porque ellos se obtienen actuando con las supercargas. Hay 16 componentes de Q y $\bar{Q}$, así que un multiplete genérico contiene 2^{16} primarios conformes (al actuar más de una vez con la misma supercarga se obtiene cero o un descendiente conforme). Las 16 supercargas $Q, \bar{Q}$ tienen espín $1/2$, y actuando con ellas sobre un primario superconforme $\underline{\underline{O}}(0)$ con espín (helicidad) $s \equiv s_I + s_D$ se obtienen primarios conformes $\underline{O}(0)$ con espín

$s, s+\frac{1}{2}, s+1, \ldots, s+\frac{7}{2}, s+4$.

Como los operadores

$$O(x) \sim Tr(M_1(x) M_2(x) \ldots),$$

están construidos a partir de los campos elementales (bajo Lorentz) básicos de la teoría, $M_I(x) = F_{\mu\nu}(x), \bar{\Phi}^e(x), \psi^f(x)$

(o sus derivadas covariantes D_μ), sus propiedades de transformación bajo Lorentz y $SU(4)_R$ son manifiestas. El único dato no trivial es entonces su dimensión conforme Δ.

En la teoría libre ($\lambda = 0$), este dato coincide con el que proviene de análisis dimensional,

$$\Delta^{(0)}_{F_{\mu\nu}} = 2 \quad (\Delta^{(0)}_{A_\mu} = 1), \quad \Delta^{(0)}_{\bar{\Phi}^e} = 1, \quad \Delta^{(0)}_{\psi^f} = \frac{3}{2}, \quad \Delta^{(0)}_{D_\mu} = 1,$$

$$\Delta^{(0)}_{\mathrm{Tr}(M_1 M_2 \cdots)} = \Delta^{(0)}_{M_1} + \Delta^{(0)}_{M_2} + \cdots$$

Llamamos a estos los dimensiones desnudas. Al encender las interacciones, es necesario renormalizar los campos básicos y los operadores compuestos,

$$\bar{\Phi}^e_{ren} \equiv \sqrt{Z_\Phi}\, \bar{\Phi}^e_{(0)}, \quad \psi^f_{ren} \equiv \sqrt{Z_\psi}\, \psi^f_{(0)}, \quad A^{ren}_\mu \equiv \sqrt{Z_A}\, A^{(0)}_\mu,$$

dependen de λ, corte UV (Λ ó ϵ) y escala de renormalización μ_{ren}

$$\mathcal{O}^{ren}_I \equiv Z_I{}^J \mathcal{O}^{(0)}_J$$

suma sobre J

donde hemos tomado en cuenta que en general hay una mezcla entre operadores compuestos con los mismos números cuánticos (pues son solo algunas combinaciones específicas de ellos las que tienen una dimensión de escalamiento bien definida).

Los objetos renormalizados tienen funciones de correlación sin divergencias UV, pero a cambio de ello, en general NO escalan de la manera ingenua, sino que tienen una dimensión corregida

$$\Delta \equiv \Delta^{(0)} + \gamma$$

↖ dimensión anómala

(En MSYM, los campos básicos NO adquieren dimensión anómala, pero los operadores compuestos en general SÍ.)

Determinar los valores de Δ para todos los $\mathcal{O}(0)$ en una CFT es análogo a encontrar el espectro de masas de una teoría relativista habitual (p.ej. QCD).

Cuando $\lambda \ll 1$, podemos calcular $\gamma(\lambda, N_c)$ de forma perturbativa (usando diagramas de Feynman),

$$\Delta(\lambda, N_c) = \Delta^{(0)} + \underbrace{\lambda \Delta^{(1)} + \lambda^2 \Delta^{(2)} + \dots}_{\gamma(\lambda, N_c)} .$$

Pero cuando $\lambda \gtrsim 1$, en general NO conocemos el valor de Δ para cada operador $\mathcal{O}$. Solo sabemos que todos los miembros de un mismo multiplete superconforme dado tienen necesariamente la misma dimensión anómala, porque la aplicación de Q_s y $\bar{Q}_s$ sobre el primario $\underline{\underline{\mathcal{O}}}$ solo puede aumentar Δ en pasos de $1/2$, y la aplicación de P_μ, en pasos de 1.

Pero se presenta una situación excepcional cuando el primario superconforme resulta ser aniquilado por algunas supercargas ($\leftrightarrow$ invariante bajo esas SUSYs),

$$\left[Q^f_\alpha, \underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)\right]_\pm = 0 \quad \text{ó} \quad \left[\bar{Q}_{\dot{\alpha} f}, \underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)\right]_\pm = 0$$

para ciertos valores de α y f. Llamamos a estos operadores primarios (superconformes) quirales ó BPS. Para ellos ocurren 2 cosas importantes. Primero,

el multiplete que generan es automáticamente más corto, porque hay menos supercargas disponibles para actuar sobre $\underline{\underline{O}}$ y generar los otros primarios conformes. P.ej., si $\underline{\underline{O}}$ es aniquilado por la mitad de las Q_s y $\bar{Q}_s$ (es decir, 8 supercargas), entonces su multiplete contiene solo 2^8 $\underline{\underline{O}}$'s (en lugar de 2^{16}), con espines $s, s+\frac{1}{2}, s+1, s+\frac{3}{2}, s+2$. Llamemos a tal $\underline{\underline{O}}$ (y a su multiplete) mitad BPS (½ BPS).

Similarmente, un $\underline{\underline{O}}$ que fuera ¼ BPS (⅛ BPS) sería aniquilado por la cuarta (octava) parte de las supercargas, es decir, 4 (2), y generaría un multiplete con 2^{12} (2^{14}) primarios conformes, con espines $s, \ldots, s+3$ ($s, \ldots, s+\frac{7}{2}$).

Segundo, recordando de la p. 118 que

$$\{Q^f_\alpha, S_{\beta f'}\} = \varepsilon_{\alpha\beta}\left(\delta^f_{f'} D + \sum_A R_A{}^f{}_{f'}\right) + \frac{1}{2}\delta^f_{f'} J_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta},$$

(o la expresión conjugada para $\bar{Q}$), vemos que

$$[S_{\beta f'}, \underline{\underline{O}}(0)]_\pm = 0 \quad \forall\, \beta, f' \quad \text{y} \quad [Q^f_\alpha, \underline{\underline{O}}(0)]_\pm = 0$$

(↑ primario; ↑ igual o BPS)

para algunos valores de α, f implican que

$$0 = \left[\left[Q^f_\alpha, \underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)\right]_\pm, S_{\beta f'}\right] + \left[Q^f_\alpha, \left[S_{\beta f'}, \underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)\right]_\pm\right] = \left[\left\{Q^f_\alpha, S_{\beta f'}\right\}, \underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)\right]$$

$$= \left[\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\delta^f_{f'} D + \sum_A R_A{}^f{}_{f'}\right) + \frac{1}{2}\delta^f_{f'} J_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}, \underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)\right],$$

de modo que la dimensión de escalamiento Δ de un operador primario quiral (o BPS) queda determinada por sus propiedades de transformación bajo Lorentz y bajo la simetría R.

Importantemente, esto implica que la dimensión Δ en cuestión NO puede depender del acoplamiento λ [Witten, Olive]. La razón es que la rep de $SO(3,1)\times SU(4)$ a la que pertenece $\underline{\underline{\mathcal{O}}}$ (especificada por los semienteros (s_I, s_D) y los enteros (r_1, r_2, r_3) ó $[d_1, d_2, d_3]$) no depende de λ, así que mientras $\underline{\underline{\mathcal{O}}}$ siga siendo BPS, $\Delta_{\underline{\underline{\mathcal{O}}}}$ tampoco puede tener dependencia de λ. Y $\underline{\underline{\mathcal{O}}}$ No puede dejar de ser BPS cuando variamos λ, porque en ese caso el número de operadores en el multiplete que genera tendría que saltar de manera discontinua (p.ej., de 2^8 a 2^{16}).

miércoles, 03 de octubre de 2012 08:44 a.m.

Los operadores quirales/BPS (tanto el primario superconforme $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)$ como todo el multiplete que genera) tienen entonces, para cualquier valor de λ, dimensión de escalamiento exactamente igual a su dimensión desnuda,

$$\boxed{\Delta_{BPS} = \Delta^{(0)}_{BPS}}\ .$$

Otros operadores con las mismas cargas (espín y carga R) tienen $\Delta_{BPS} > \Delta_{BPS}$.

Procedemos ahora a establecer cuáles operadores de una traza en MSYM son primarios superconformes, y si algunos de ellos resultan ser BPS. Para esto necesitamos las reglas de transformación de los campos básicos bajo SUSY, que habíamos escrito en la p. 104.

Esquemáticamente,

$$[Q, \Phi] \sim \Psi\ , \qquad [Q, F] \sim \mathcal{D}\Psi\ ,$$

$$\{Q, \Psi\} \sim F^{+} + [\Phi, \bar{\Phi}]\ , \qquad \{Q, \bar{\Psi}\} \sim \mathcal{D}\Phi\ .$$

($F^{+} \to \frac{1}{2}(F + \tilde{F})$)

Un primario superconforme $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(0)$ no puede escribirse en la forma $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(0) = [Q, \text{algo}]_{\pm}$, así que no podrá involucrar a cualquiera de los elementos que

aparecen en el lado derecho de las reglas de transformación. Es decir, no puede incluir a $F_{\mu\nu}$ ni a ψ_α^f, y los escalares Φ^e no pueden aparecer dentro de conmutadores ni con derivadas.

Son entonces primarios superconformes los operadores $Tr(\Phi^{(e_1}\Phi^{e_2}\cdots\Phi^{e_l)})$, con los índices simetrizados.

Estos operadores transforman en una representación reducible del grupo de simetría R $SU(4) \simeq SO(6)$, y para obtener las reps irreducibles es necesario aislar a las trazas sobre los distintos pares de índices.

L25; 05/11/21

Tomemos como ejemplo el caso más sencillo, $l=2$ (para $l=1$ tenemos $Tr(\Phi^e)=0$ porque estamos en $SU(N_c)$). $Tr(\Phi^{(e}\Phi^{e')})$ son 21 operadores en total:

- $Tr(\Phi^e\Phi^e)$ (c/suma $\sum_{e=1}^{6}$) es un singulete ($\underline{1}$)

bajo $SO(6)$ y tiene $\Delta^{(0)} = 2$

- $Tr(\Phi^{\{e_1}\Phi^{e_2\}}) \equiv \underbrace{Tr(\Phi^{(e_1}\Phi^{e_2)}) - \frac{1}{6}\delta^{e_1e_2}Tr(\Phi^e\Phi^e)}_{\equiv \frac{1}{2}Tr(\Phi^{e_1}\Phi^{e_2}) + \frac{1}{2}Tr(\Phi^{e_2}\Phi^{e_1}) = Tr(\Phi^{e_1}\Phi^{e_2})}$

transforma en la rep $\underline{20}$ de $SO(6)$ y tiene $\Delta^{(0)} = 2$.

(lo anterior refleja la descomposición

producto simétrico | producto antisimétrico

$\underline{6} \otimes \underline{6} = \underline{1} \oplus \underline{20} \oplus \underline{15}$

$\underline{6}$	$\underline{6}$	$\underline{1}$	$\underline{20}$	$\underline{15}$
$(1,1,0)$		$(0,0,0)$	$(2,2,0)$	$(2,1,1)$
$r_1\ r_2\ r_3$				
$[0,1,0]$		$[0,0,0]$	$[0,2,0]$	$[1,0,1]$
$d_1\ d_2\ d_3$		primario supergravedad		no primario supergravedad

en $SU(4)$.)

Es claro que $Tr(\Phi^e\Phi^e)$ No puede ser BPS, porque su $\Delta^{(0)} = 2$ No es la mínima posible para sus

cargar bajo Lorentz, $(s_1, s_2) = 0$, y bajo SU(4), $[d_1, d_2, d_3] = [0,0,0]$. Existe un operador (y solo uno) escalar de Lorentz y sin carga R con $\Delta = 0$: la identidad, $\mathcal{O} = 1$, que "es BPS" (¡preserva todas las 32 supersimetrías!) y forma un supermultiplete por sí solo. El estado correspondiente es por supuesto el vacío.

Por otra parte, $\mathrm{Tr}(\Phi^{\{e_1}\Phi^{e_2\}})$ tiene $\Delta^{(0)} = 2$ y carga R $[0,2,0] \leftrightarrow$, y sí resulta ser BPS.

De hecho, se puede mostrar que para cualquier ℓ,

$$\mathcal{O}_\ell(x) \equiv \mathrm{Tr}\left(\Phi^{\{e_1}(x)\cdots\Phi^{e_\ell\}}(x)\right)$$

con $\Delta^{(0)} = \ell$ y carga R $[0,\ell,0]$ es $\frac{1}{2}$ BPS, y que estos son los únicos operadores de 1 traza en MSYM que son quirales primarios. Estos operadores tienen entonces $\Delta = \ell$, para cualquier valor de λ, y sabemos que dan lugar a multipletes superconformes cortos, con 2^8 primarios

conformes y rango de espín 0-2.
(Existen también operadores de ≥ 2 trazas que son $\frac{1}{4}$ BPS, con carga R $[d_1, d_2, d_1]$ y $\Delta = d_2 + 2$, ó $\frac{1}{8}$ BPS, con carga R $[d_1, d_2, d_1 + 2l]$ y $\Delta = d_2 + 2d_1 + 3l$.)
[24: 15/05/24]
Un punto importante es que los $\mathcal{O}_l(x)$ con $l > N_c$ No son independientes de sus contrapartes con $l \leq N_c$, porque la traza del producto de $> N_c$ matrices $N_c \times N_c$ que conmutan entre sí siempre puede expresarse como una suma de productos de trazas de $\leq N_c$ matrices (y podemos restringirnos a matrices que conmutan porque ya habíamos visto que los conmutadores dan lugar a descendientes superconformes). P.ej., para $N_c = 2$, con

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad C \equiv \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

es fácil ver que

$$\mathrm{Tr}(ABC) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(AB)\mathrm{Tr}(C) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(AC)\mathrm{Tr}(B) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(BC)\mathrm{Tr}(A) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(C).$$

($l = 3 > 2$)

Nuestra conclusión es entonces que, en MSYM, los operadores quirales primarios de 1 traza son $\mathcal{O}_\ell(x)$, con $\ell = 2, 3, 4, \ldots, N_c$, que tienen $\Delta = \ell$ y carga R $[0, \ell, 0]$.

Actuando sobre ellos con las supercargas Q y $\bar{Q}$, generamos los otros operadores primarios conformes del multiplete. Los bosónicos resultan ser [ver MA600, D'Hoker-Freedman]:

- Con $\Delta = \ell + 1$ (después de actuar con 2 supercargas),
  - 2 escalares de Lorentz $\sim \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2} \mathrm{Tr}\left(\psi^{f_1}_{\alpha_1} \psi^{f_2}_{\alpha_2} \Phi^{\{e_1} \cdots \Phi^{e_{\ell-2}\}}\right) + \ldots$
    en rep $[2, \ell-2, 0]$ y $[2, \ell-2, 0]^* = [0, \ell-2, 2]$ de $SU(4)$,
  - 2 tensores antisimétricos $\sim \mathrm{Tr}\left(F^{\pm}_{\mu\nu} \Phi^{\{e_1} \cdots \Phi^{e_{\ell-1}\}}\right) + \ldots$
    ↖ $\equiv \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu})$
    en $[0, \ell-1, 0]$,
  - 1 vector de Lorentz $\sim (\sigma^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} \mathrm{Tr}\left(\psi^{f_1}_{\alpha} \bar{\psi}_{\dot{\alpha} f_2} \Phi^{\{e_1} \cdots \Phi^{e_{\ell-2}\}}\right)$
    en $[1, \ell-2, 1]$.
- Con $\Delta = \ell + 2$ (después de actuar con 4 supercargas),
  - 2 escalares reales $\sim \mathrm{Tr}\left(F^{\pm}_{\mu\nu} F^{\pm \mu\nu} \Phi^{\{e_1} \cdots \Phi^{e_{\ell-2}\}}\right) + \ldots$
    ↖ signos cardinales
    en $[0, \ell-2, 0]$,
  - 1 escalar real $\sim \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \mathrm{Tr}\left(\psi^{f_1}_{\alpha} \psi^{f_2}_{\beta} \bar{\psi}_{\dot{\alpha} f_1'} \bar{\psi}_{\dot{\beta} f_2'} \Phi^{\{e_1} \cdots \Phi^{e_{\ell-4}\}}\right) + \ldots$
    en $[2, \ell-4, 2]$,

miércoles, 10 de octubre de 2012 07:49 a.m.

2 vectores reales $\sim Tr(F^{\pm}_{\mu\nu} D^{\nu} \Phi^{e_1} \Phi^{e_2} \cdots \Phi^{e_{l-1}}) + \ldots$

en $[0, l-1, 0]$,

2 tensores antisimétricos reales $\sim Tr(F^{\pm}_{\mu\nu} [\Phi^{e_1}, \Phi^{e_2}] \Phi^{\{e_3} \cdots \Phi^{e_{l-2}\}})$

en $[2, l-3, 0]$ ó $[0, l-3, 2]$,

1 tensor simétrico $\sim Tr(D_{(\mu} \Phi^{e} D_{\nu)} \Phi^{e} \Phi^{\{e_1} \cdots \Phi^{e_{l-2}\}}) + \ldots$

en $[0, l-2, 0]$.

- Con $\Delta = l+3$ (después de actuar con 6 supercargas),

2 escalar reales $\sim \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} Tr(F^{\mu\nu}_{\pm} F_{\pm\mu\nu} \bar{\psi}_{\dot{\alpha} f_1} \bar{\psi}_{\dot{\beta} f_2} \Phi^{\{e_1} \cdots \Phi^{e_{l-4}\}})$

en $[0, l-4, 2]$, ← signos sincronizados

2 tensores antisimétricos $\sim Tr(F^{\pm}_{\mu\nu} (F^{\mp})^2 \Phi^{\{e_1} \cdots \Phi^{e_{l-3}\}})$

en $[0, l-3, 0]$, ← signos sincronizados

1 vector $\sim (\sigma^{\mu})^{\alpha\dot{\alpha}} Tr(F^{+}_{\mu\nu} F^{-\mu\nu} \psi^{f}_{\alpha} \bar{\psi}_{\dot{\alpha} f}, \Phi^{\{e_1} \cdots \Phi^{e_{l-4}\}})$

en $[1, l-4, 1]$.

- Con $\Delta = l+4$ (después de actuar con las 8 supercargas activas)

1 escalar real $\sim Tr(F^{+}_{\mu\nu} F^{+\mu\nu} F^{-}_{\lambda\rho} F^{-\lambda\rho} \Phi^{e_1} \cdots \Phi^{e_{l-4}})$

en $[0, l-4, 0]$.

Podemos notar que en los casos $l=2,3$ algunos de los anteriores reps se anulan, así que hay todavía menos operadores.

En particular, para $\ell=2$ solo se alcanza a llegar hasta $\Delta=\ell+2=4$. Los primeros conformes de este multiplete son

$$Tr(\Phi^{\{e_1}\Phi^{e_2\}}) \qquad \Delta=2 \qquad [0,2,0],$$

$$\epsilon^{\alpha\beta}Tr(\psi^f_\alpha\psi_{\beta f'})+\dots \qquad \Delta=3 \qquad [2,0,0],$$

$$\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}Tr(\bar\psi_{\dot\alpha f}\bar\psi^{f'}_{\dot\beta})+\dots \qquad \Delta=3 \qquad [0,0,2],$$

$$Tr(F^{\pm}_{\mu\nu}\Phi^e)+\dots \qquad \Delta=3 \qquad [0,1,0],$$

(rep adjunta de SU(4))

$$(\sigma^\mu)^{\alpha\dot\alpha}Tr(\psi^f_\alpha\bar\psi_{\dot\alpha f'})+Tr(\partial^\mu\Phi^e\Phi^{e'}) \qquad \Delta=3 \qquad [1,0,1]$$

Corriente de Noether de la simetría R J^μ $= \square\!\square\!\square = 15$,

(Número de generadores de SU(4))

$$Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})+\dots \text{ y } Tr(F_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu}) \qquad \Delta=4 \qquad [0,0,0],$$

Densidad lagrangiana y densidad de instantones

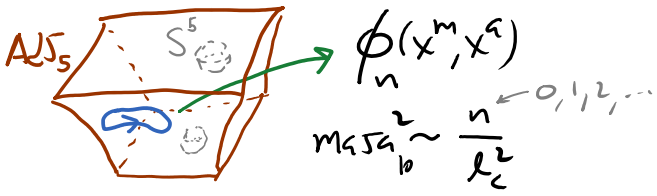
$$Tr(F^{\pm}_{\mu\nu}D^\nu\Phi^e)+\dots \qquad \Delta=4 \qquad [0,1,0],$$

$$Tr(D_{(\mu}\Phi^e D_{\nu)}\Phi^e)+Tr(F_{(\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu)})+\dots \qquad \Delta=4 \qquad [0,0,0]$$

Tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$.

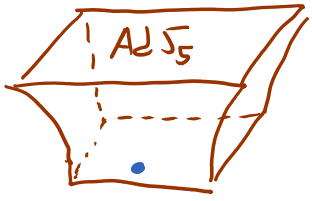
Consideremos ahora el otro lado de la correspondencia. Desafortunadamente No sabemos cómo calcular el espectro completo de la teoría de cuerdas IIB en $AdS_5\times S^5$,

ni siquiera perturbativamente (la presencia del campo RR es un obstáculo importante). Pero en el límite $N_c \to \infty$, $\lambda \to \infty$, sabemos que CIIB se reduce a SUGRA IIB libre ($\text{masa}_{10}=0$). A partir de la acción de SUGRA en 9+1 dim, desarrollada hasta orden cuadrático en fluctuaciones alrededor de $AdS_5 \times S^5$, es posible hacer una descomposición de Kaluza-Klein sobre la S^5 y obtener el espectro de masas para las torres de KK que son campos en AdS_5,



$$\phi_0(x^m, x^a) \sim \sum_{0,K} \phi_{0,K}(x^m)\, Y_K(x^a)$$

$\text{masa} \sim k/L$



Incluso este ejercicio es algo engorroso, porque hace falta encontrar combinaciones de los campos para diagonalizar la matriz de masas. El cálculo fue realizado en 1985 por [Kim, Romans, Van Nieuwenhuizen] y [Günaydin, Marcus], y los resultados para los campos bosónicos se pueden resumir en la siguiente tabla, donde m, n denotan índices en AdS_5 y a, b son índices en S^5:

$\mathcal{L} \sim m^2\phi^2 \quad (m^2 \neq -p_m p^m)$

Campos (KK)	Masas en AdS_5		Reps de SU(4)
			reps complejas
φ, C	$m^2L^2 = k(k+4)$ (k: momento angular en S^5)	$k \geq 0$	$\underline{1}_c, \underline{6}_c, \underline{20}_c, \ldots$
	(L: radio de S^5 (cf. KK en S^1 $m \sim k/L$))		
B_{ab}, C_{ab}	$m^2L^2 = (k-2)(k+2)$	$k \geq 1$	$\underline{10}_c, \underline{45}_c, \ldots$
	$m^2L^2 = (k+2)(k+6)$		$\underline{10}_c, \underline{45}_c, \ldots$
escalares en AdS			
B_{ma}, C_{ma}	$m^2L^2 = (k+1)(k+3)$	$k \geq 1$	$\underline{15}_c, \underline{64}_c, \ldots$
vectores en AdS			
B_{mn}, C_{mn}	$m^2L^2 = k^2$	$k \geq 1$	$\underline{6}_c, \underline{20}_c, \ldots$
	$m^2L^2 = (k+4)^2$	$k \geq 0$	$\underline{1}_c, \underline{6}_c, \ldots$
tensores antisimétricos			
h_{ab}	$m^2L^2 = k(k+4)$	$k \geq 2$	$\underline{84}, \underline{300}, \ldots$
escalares			
$h^a{}_a$	$m^2L^2 = k(k-4)$	$k \geq 2$	$\underline{20}_{[0,2,0]}, \underline{50}_{[0,3,0]}, \ldots$ ← primarios
C_{abcd}	$m^2L^2 = (k+4)(k+8)$	$k \geq 0$	$\underline{1}_{[0,0,0]}, \underline{6}_{[0,1,0]}, \underline{20}_{[0,2,0]}, \ldots$
escalares			
h_{ma}	$m^2L^2 = (k-1)(k+1)$	$k \geq 1$	$\underline{15}, \underline{64}, \underline{175}, \ldots$
C_{mabc}	$m^2L^2 = (k+3)(k+5)$		$\underline{15}, \underline{64}, \underline{175}, \ldots$
vectores			
h_{mn}	$m^2L^2 = k(k+4)$	$k \geq 0$	$\underline{1}, \underline{6}, \underline{20}, \ldots$
tensor simétrico			
C_{mnab}	$m^2L^2 = (k+2)^2$	$k \geq 1$	$\underline{10}, \underline{45}, \ldots$
tensor antisimétrico			

miércoles, 10 de octubre de 2012 10:08 a.m.

Todos estos campos se acomodan naturalmente en reps del grupo $SU(2,2|4)$, construidos a partir de un campo primario superconforme que resulta ser la primera de las combinaciones lineales de $h^a{}_a$ y C_{abcd}.

Estos campos son escalares en AdS_5 (y por tanto también en las direcciones x^μ paralelas a ∂AdS_5, que se identifican directamente con las de $N=4$ SYM), transforman en la rep $[0,k,0]$ de $SU(4)$ para $k \geq 2$, y tienen masas $m^2 L^2 = k(k-4)$.

L26: 07/61/21

Podemos notar que los modos de KK de estos campos con $k=2,3$, y también algunos de los asociados a otros campos en la tabla, ¡tienen masas al cuadrado que son negativas, es decir, son taquiones!

Si estuviéramos en Minkowski, la existencia de modos taquiónicos sería señal de inestabilidad, porque con $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, $m^2 < 0$ y $\vec{p}^2 < |m^2|$ implican que la energía E es imaginaria.

martes, 16 de octubre de 2012 06:48 p.m.

Pero en AdS la historia es distinta, porque la métrica depende de la coordenada radial (ρ en coords. globales o z en coords. de Poincaré), y como consecuencia de ello las partículas (asociadas a modos de los campos que resuelven las ecuaciones de movimiento correspondientes) No pueden tener energía cinética igual a cero. ← $\partial_m \to \partial_\rho$

P.ej., para un campo escalar en coordenadas globales (ver p.ej. MA600, sección 2.2.2) se encuentra que la energía está dada por

$$E = 2 + \sqrt{4 + (mL)^2} + j + 2n ,$$

n: número radial, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\sqrt{4+(mL)^2}$: adimensional, conjugada a τ

j: momento angular en $S^3 \subset AdS_5$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

que es real siempre y cuando

$$(mL)^2 \geq -4 .$$

En AdS_{d+1}, la condición correspondiente es

$$\boxed{(mL)^2 \geq -\frac{d^2}{4}} ,$$

y se conoce como la cota de Breitenlohner-Freedman (BF).

Tiene su contraparte para campos no escalares, cuya cota toma formas ligeramente distintas dependiendo del espín del campo. En todos los casos, lo que importa es la relación entre la masa y la energía de la partícula en cuestión. En el caso de AdS_5 (global) y cuando los números cuánticos se eligen para dar la menor energía posible (p.ej. $j=0=n$ en el caso escalar), la relación resulta ser

$$\text{Espín } 0 \text{ ó } 2: \quad m^2L^2 = E(E-4)$$
$$\text{Espín } \tfrac{1}{2} \text{ ó } \tfrac{3}{2}: \quad |m|L = E-2$$
$$\text{p-formas}: \quad m^2L^2 = (E-p)(E+p-4)$$

Todos los modos de KK en la tabla de la p. 317 obedecen la cota BF correspondiente, así que, a pesar de las apariencias, no hay ninguna patología: la solución $AdS_5 \times S^5$ es (perturbativamente) estable.

L21: 27/10/16 (+14)

Entre los infinitos multipletes de $SU(2,2|4)$ que se arman con los campos de la tabla en la p. 317, el de masas más bajas corresponde a tomar el primer modo de KK (es decir, el menor valor posible de k) en varias de las series. Consiste de

- 1 gravitón, h_{mn} $(k=0)$, ← onda s, con $m^2L^2 = 0$.
- 42 campos escalares en 3 reps distintas de $SU(4)$:
  - $\underline{1}_c$ proveniente de φ, C $(k=0)$, ← onda s, con $m^2L^2 = 0$.
  - $\underline{10}_c$ proveniente de B_{ab}, C_{ab} $(k=1)$, con $m^2L^2 = -3$.
  - → $\underline{20}$ proveniente de $h^a{}_a, C_{abcd}$ $(k=2)$, con $m^2L^2 = -4$ que es el primario superconforme de este multiplete.
- 15 componentes del campo de Yang-Mills para $SU(4)$, ← cf. $U(1)$ para KK sobre S^1, en la rep adjunta $\underline{15}$ $(= 4^2 - 1$ generadores), provenientes de h_{ma}, C_{mabc} $(k=1)$, con $m^2L^2 = 0$.
- 12 tensores antisimétricos provenientes de B_{mn}, C_{mn} $(k=1)$, en la rep $\underline{6}_c$, con $m^2L^2 = 1$.

- 48 campos de espín $1/2$, incluyendo:

  $\underline{4}^*$ $(k=0)$ con $m_L = -3/2$.

  $\underline{20}^*$ $(k=1)$ con $m_L = -1/2$.

- 8 gravitinos (espín $3/2$), en la rep $\underline{4}$ $(k=0)$, con $m_L = +3/2$.

Este se conoce como el (súper)multiplete del gravitón, o (súper)multiplete 'no masivo'.

Si retenemos solo estos modos partiendo de la acción de SUGRA IIB en $9+1$ dimensiones, obtenemos la teoría de campos conocida como supergravedad (gauged) normada $\mathcal{N}=8$ en $4+1$ dimensiones.

En el ejemplo original de Kaluza y Klein, donde compactificamos $\mathbb{R}^{d,1} \to \mathbb{R}^{d-1,1} \times S^1$ (o $\mathbb{R}^{d-p,1} \times T^p$),

$$\phi(x^m, x^a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x^m) e^{inx^a/L}$$

$x^a \sim x^a + 2\pi L$

los torres de KK tienen masas $m = |n|/L$, donde L es el radio del círculo, así que mientras trabajemos con energías $E \ll 1/L$ (o, equivalentemente, tomemos el

límite $L \to 0$), podemos quedarnos solo con los modos cero ($n=0$), que tienen las masas más ligeras, $m^2 = 0$. Esto se conoce como reducción dimensional.

En cambio, en la compactificación que nosotros estamos considerando, $AdS_5 \times S^5$, NO hay ningún límite que podamos tomar para retener solo al multiplete del gravitón (es decir, los modos 'no masivos'), porque el radio de la S^5 es igual al radio de curvatura de AdS_5, y la diferencia entre las masas de los taquiones y otros modos dentro de dicho multiplete es del mismo orden ($\Delta m \sim 1/L$) que la que separa a este multiplete de los otros.

Aún así, se sabe que la SUGRA normada $N=8$ en $4+1$ dimensiones es lo que se conoce como un

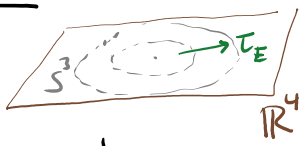
truncamiento consistente de SUGRA IIB en 9+1 dimensiones. Es decir, cualquier solución a sus ecs. de movimiento puede 'levantarse' ← uplift a una solución de las ecs. completas de SUGRA IIB. Es por esta razón que resultará válido restringirnos a la SUGRA normada 4+1 cuando lo consideremos conveniente.

Ahora que conocemos parte del espectro de masas de CIIB en $AdS_5 \times S^5$, podemos comparar con el espectro de dimensiones de escalamiento que obtuvimos en MSYM. Hicimos allá una distinción entre multipletes quirales/BPS, como el asociado al primario superconforme $Tr(\Phi^{\{e_1} \Phi^{e_2\}})$, y no quirales, como el asociado a $Tr(\Phi^e \Phi^e)$, porque solo para los primeros conocemos la dimensión Δ para cualquier valor de λ. ¿Qué pasa en CIIB? Podemos notar que los modos de KK de los campos de SUGRA IIB ← conocemos m^2 solo para $\lambda, N \to \infty$

tienen todos espín ≤ 2, así que deben pertenecer a multipletes cortos. Es decir, ¡todos los modos de SUGRA IIB están en multipletes quirales ($\frac{1}{2}$ BPS)!

En cambio, los modos masivos de cuerdas, con masas $m \sim 1/l_c$, pertenecen a multipletes no quirales.

Para hacer una comparación directa entre los operadores quirales $\mathcal{O}$ en SYM y los campos ϕ de SUGRA IIB, solo nos falta saber cómo relacionar la dimensión Δ_ϕ con la masa m_ϕ. Para esto, recordemos de la p. 279 que, cuando hacemos una rotación de Wick para ir a la versión euclideana de la correspondencia, y consideramos a la CFT en



cuantización radial, el generador de dilataciones D se convierte en el generador de traslaciones en el tiempo (es decir, el Hamiltoniano,) para la CFT definida sobre $S^3 \times \mathbb{R}$. Sabiendo que esta última es dual a CIIB

en AdS_5 global, concluimos entonces que la dimensión conforme Δ en la CFT corresponde a la energía E asociada al tiempo global τ en AdS.

(En signatura lorentziana, el origen de esta conexión es más sutil. En términos de los generadores de $SO(4,2)$ J_{MN} con $M,N=-1,0,1,2,3,4$ que definimos en la p. 110, y que en la descripción dual actúan sobre el espacio $\mathbb{R}^{4,2}$ donde está encajado AdS_5 como un hiperboloide, $\eta_{MN}X^M X^N = -L^2$, según vimos en la p. 224, el generador de dilataciones es el empujón $J_{4-1} \equiv D$, mientras que el generador de traslaciones en el tiempo para la CFT en $S^3 \times \mathbb{R}$, conocido como el Hamiltoniano conforme, es la rotación $J_{0-1} \equiv \frac{1}{2}(P_0 + K_0)$. La distinción se evapora tras la rotación de Wick que vuelve a X^0 una dirección tipo espacio; ¿pero qué pasa sin Wick?

El punto es que existen 2 maneras distintas de clasificar a los operadores/estados en la CFT:

- Con los números (Δ, s_I, s_D) asociados al subgrupo no compacto $SO(1,1) \times SO(3,1) \subset SO(4,2)$.
  $D \qquad J_{\mu\nu}$
- Con los números (Δ', s_I', s_D') asociados al subgrupo compacto $SO(2) \times SO(4) \subset SO(4,2)$.
  $\frac{1}{2}(P_0 + K_0) \qquad J_{IJ} \quad I,J = 1,\dots,4$

Pero se puede mostrar que estas 2 descripciones están formalmente conectadas por una cierta rotación por un ángulo imaginario, de tal modo que $\Delta' = \Delta$, $s_I' = s_I$, $s_D' = s_D$ – ver [Günaydin, Minic, Zagermann, hep-th/9810226] y [Chiodaroli, Günaydin, Roiban, arXiv: 1108.3085].

Como Δ', el eigenvalor asociado al Hamiltoniano conforme, es justamente la energía E en AdS global, concluimos que efectivamente tenemos $\Delta = E$.)

A partir de la relación entre E y m que vimos en la p.320, tenemos entonces la siguiente traducción entre la dimensión Δ de los operadores en la CFT y la masa m de los campos (modos de KK) en AdS:

Espín 0 ó 2	:	$m^2L^2 = \Delta(\Delta-4)$
Espín ½ ó 3/2	:	$\|m\|L = \Delta-2$
p-forma	:	$m^2L^2 = (\Delta-p)(\Delta+p-4)$

Si la correspondencia AdS/CFT es correcta, y en verdad MSYM y CIIB son teorías equivalentes, entonces por cada multiplete ½ BPS de operadores de una traza en MSYM, debemos tener un multiplete ½ BPS de campos en CIIB. Los primeros están basados como vimos en los primarios superconformes

$$\mathcal{O}_\ell \equiv Tr\left(\Phi^{\{e_1}\Phi^{e_2}\cdots\Phi^{e_\ell\}}\right) \qquad \ell = 2,\ldots,N_c,$$

que tienen $\Delta=\ell$, $s_I=0=s_p$, y están en la rep $[0,\ell,0]$ de $SU(4)$. La predicción de AdS/CFT es entonces que debe existir en CIIB un multiplete ½ BPS para cada valor de $\ell=2,\ldots,N_c$, basado en un campo primario superconforme con espín cero, masa $m^2L^2=\ell(\ell-4)$ y en la rep $[0,\ell,0]$ de $SU(4)$.

¡¡Y esto es exactamente lo que encontramos en la tabla de la p. 317 (con $k \leftrightarrow \ell$)!! [Witten, hep-th/9802150]

Los multipletes completos se mapean así [D'Hoker, Freedman]:

Operador en MSYM	Origen	Campo SUGRA	Δ	(S_L, S_R)	SU(4)
$\mathcal{O}_\ell \sim \mathrm{Tr}\,\Phi^\ell$ $\ell \geq 2$	$\bar{\mathcal{O}}$	$h^a{}_a$, C_{abcd} ← primario superconforme	ℓ	$(0,0)$	$[0,\ell,0]$
$\sim \mathrm{Tr}\,\psi\Phi^{\ell-1}$	$Q\bar{\mathcal{O}}$	Gravitino Ψ_a	$\ell+\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},0)$	$[1,\ell-1,0]$
$\sim \mathrm{Tr}\,\psi\psi\Phi^{\ell-2}$	$Q^2\bar{\mathcal{O}}$	B_{ab}, C_{ab}	$\ell+1$	$(0,0)$	$[2,\ell-2,0]$
$\sim \mathrm{Tr}\,\psi\bar{\psi}\Phi^{\ell-2}$ (abelian SU(4))	$Q\bar{Q}\bar{\mathcal{O}}$	h_{ma}, C_{mabc} ← campo de norma SU(4)	$\ell+1$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$[1,\ell-2,1]$
$\sim \mathrm{Tr}\,F_+\Phi^{\ell-1}$	$Q^2\bar{\mathcal{O}}$	B_{mn}, C_{mn}	$\ell+1$	$(1,0)$	$[0,\ell-1,1]$
$\sim \mathrm{Tr}\,F_+\bar{\psi}\Phi^{\ell-2}$	$Q^2\bar{Q}\bar{\mathcal{O}}$	Gravitino Ψ_m	$\ell+\frac{3}{2}$	$(1,\frac{1}{2})$	$[0,\ell-2,1]$
$\sim \mathrm{Tr}\,F_+\psi\Phi^{\ell-2}$	$Q^3\bar{\mathcal{O}}$	Dilatino Λ	$\ell+\frac{3}{2}$	$(\frac{1}{2},0)$	$[1,\ell-2,1]$
$\sim \mathrm{Tr}\,\psi\psi\bar{\psi}\Phi^{\ell-3}$	$Q^2\bar{Q}\bar{\mathcal{O}}$	Gravitino Ψ_a	$\ell+\frac{3}{2}$	$(0,\frac{1}{2})$	$[2,\ell-3,1]$
$\sim \mathrm{Tr}\,F_+^2\Phi^{\ell-2}$ (ℓ)	$Q^4\bar{\mathcal{O}}$	φ, C ← dilatón, axión	$\ell+2$	$(0,0)$	$[0,\ell-2,0]$
$\sim \mathrm{Tr}\,F_+F_-\Phi^{\ell-2}$ ($T_{\mu\nu}$)	$Q^2\bar{Q}^2\bar{\mathcal{O}}$	h_{mn} ← gravitón	$\ell+2$	$(1,1)$	$[0,\ell-2,0]$
$\sim \mathrm{Tr}\,F_+\psi\bar{\psi}\Phi^{\ell-3}$	$Q^3\bar{Q}\bar{\mathcal{O}}$	B_{ma}, C_{ma}	$\ell+2$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$[1,\ell-3,1]$
$\sim \mathrm{Tr}\,F_+\bar{\psi}\bar{\psi}\Phi^{\ell-3}$	$Q^2\bar{Q}^2\bar{\mathcal{O}}$	C_{mnab}	$\ell+2$	$(1,0)$	$[0,\ell-3,2]$
$\sim \mathrm{Tr}\,\psi\psi\bar{\psi}\bar{\psi}\Phi^{\ell-4}$	$Q^2\bar{Q}^2\bar{\mathcal{O}}$	h_{ab}	$\ell+2$	$(0,0)$	$[2,\ell-4,2]$

$\sim Tr\, F_+^2 \bar{\Psi} \bar{\Phi}^{l-3} \quad Q^4 \bar{Q} \bar{Q} \quad$ Dilatino $\Lambda \quad l+\frac{5}{2} \quad (0,\frac{1}{2}) \quad [0,l-3,1]$

$\sim Tr\, F_+ \psi \bar{\psi} \bar{\Phi}^{l-4} \quad Q^3 \bar{Q}^2 \bar{Q} \quad$ Gravitino $\Psi_a \quad l+\frac{5}{2} \quad (\frac{1}{2},0) \quad [1,l-4,2]$

$\sim Tr\, F_+ F_- \psi \bar{\Phi}^{l-3} \quad Q^3 \bar{Q}^2 \bar{Q} \quad$ Gravitino $\Psi_m \quad l+\frac{5}{2} \quad (\frac{1}{2},1) \quad [1,l-3,0]$

$\sim Tr\, F_+ F_-^2 \bar{\Phi}^{l-3} \quad Q^4 \bar{Q}^2 \bar{Q} \quad B_{mn}, C_{mn} \quad l+3 \quad (1,0) \quad [0,l-3,0]$

$\sim Tr\, F_+ F_- \psi \bar{\psi} \bar{\Phi}^{l-4} \quad Q^3 \bar{Q}^3 \bar{Q} \quad h_{ma}, C_{mabc} \quad l+3 \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad [1,l-4,1]$

$\sim Tr\, F_+^2 \bar{\psi} \bar{\psi} \bar{\Phi}^{l-4} \quad Q^4 \bar{Q}^2 \bar{Q} \quad B_{ab}, C_{ab} \quad l+3 \quad (0,0) \quad [0,l-4,2]$

$\sim Tr\, F_+^2 F_- \bar{\psi} \bar{\Phi}^{l-4} \quad Q^4 \bar{Q}^3 \bar{Q} \quad$ Gravitino $\Psi_a \quad l+\frac{7}{2} \quad (0,\frac{1}{2}) \quad [0,l-4,1]$

$\sim Tr\, F_+^2 F_-^2 \bar{\Phi}^{l-4} \quad Q^4 \bar{Q}^4 \bar{Q} \quad h^a{}_a, C_{abcd} \quad l+4 \quad (0,0) \quad [0,l-4,0]$

Notamos en particular que el multiplete del primario quiral más sencillo en SYM, $Tr(\Phi^{\{e_1} \Phi^{e_2\}})$, $\Delta = l = 2$, que como vimos incluye a la densidad Lagrangiana, el tensor de energía-momento y las corrientes R, ← corrientes de Noether para SU(4) es dual a los modos de KK más bajos de SUGRA, contenidos en el multiplete del gravitón, que como vimos incluye a la onda s del dilatón, del gravitón y de los campos de norma de SU(4). Por esta conexión, frecuentemente se le

LZ: 12/01/21

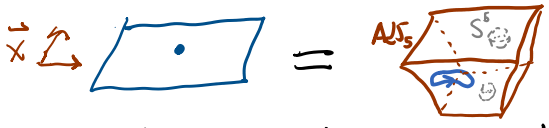
llamo a este multiplete en MSYM el "multiplete del gravitón".

Vale la pena enfatizar la idea física que justifica este nombre: con el cuerdo que hemos establecido para $\ell=2$, hemos logrado comprobar que entre los estados ($\leftrightarrow$ operadores) de MSYM en verdad se encuentran los de SUGRA ← gravitón + parientes normada $N=8$ en $4+1$ dimensiones. Y, tomando en cuenta las torres completas con ℓ arbitrario, hemos demostrado que ¡¡MSYM en $3+1$ dimensiones incluye a todos los estados de SUGRA IIB ← gravitón + parientes en $9+1$ dimensiones!!

L25: 20/05/24

Hasta ahora hemos hablado de estos estados a nivel de campos libres, es decir, en el límite $N_c \to \infty$. Más adelante compensaremos las interacciones.

A primera vista, podría haber parecido imposible que una teoría 4-dimensional tenga tantos estados como una 10-dimensional. Pero hemos visto que en verdad hay más que suficientes estados, debido a que los campos de la CFT



son matrices grandes, $N_c \times N_c$: vimos que los modos de KK sobre la S^5 provienen de trazas de productos de muchos operadores, que son todos independientes entre sí para $N_c \to \infty$. De hecho, de lo que hemos visto queda claro que MSYM incluye más que a SUGRA 9+1 dim. P.ej., $Tr(\Phi^6 \Phi^6)$ ← no trivial no es un modo de SUGRA. Regresaremos a este punto más adelante.

Ahora bien, para ℓ grande, sabemos que en MSYM los primeros quiebres de una traza terminan en $\Delta = \ell = N_c$, porque los $\mathcal{O}_\ell$ con $\ell > N_c$ NO son independientes (p. 312). No esperaríamos poder confiar en los resultados de SUGRA para masas más grandes que la escala de cuerdas,

$$m \gtrsim \frac{1}{\ell_c} \leftrightarrow \Delta \sim mL \gtrsim \frac{L}{\ell_c} = \lambda^{1/4},$$

← $m^2 L^2 = \Delta(\Delta - 4)$

o que la escala de Planck,

$$m \gtrsim \frac{1}{g_c^{1/4} \ell_c} \leftrightarrow \Delta \sim mL \gtrsim \frac{L}{g_c^{1/4} \ell_c} = N_c^{1/4},$$

← $G_N^{(10)} \sim g_c^2 \ell_c^8$

$g_{YM}^{1/2} N_c^{1/4}$

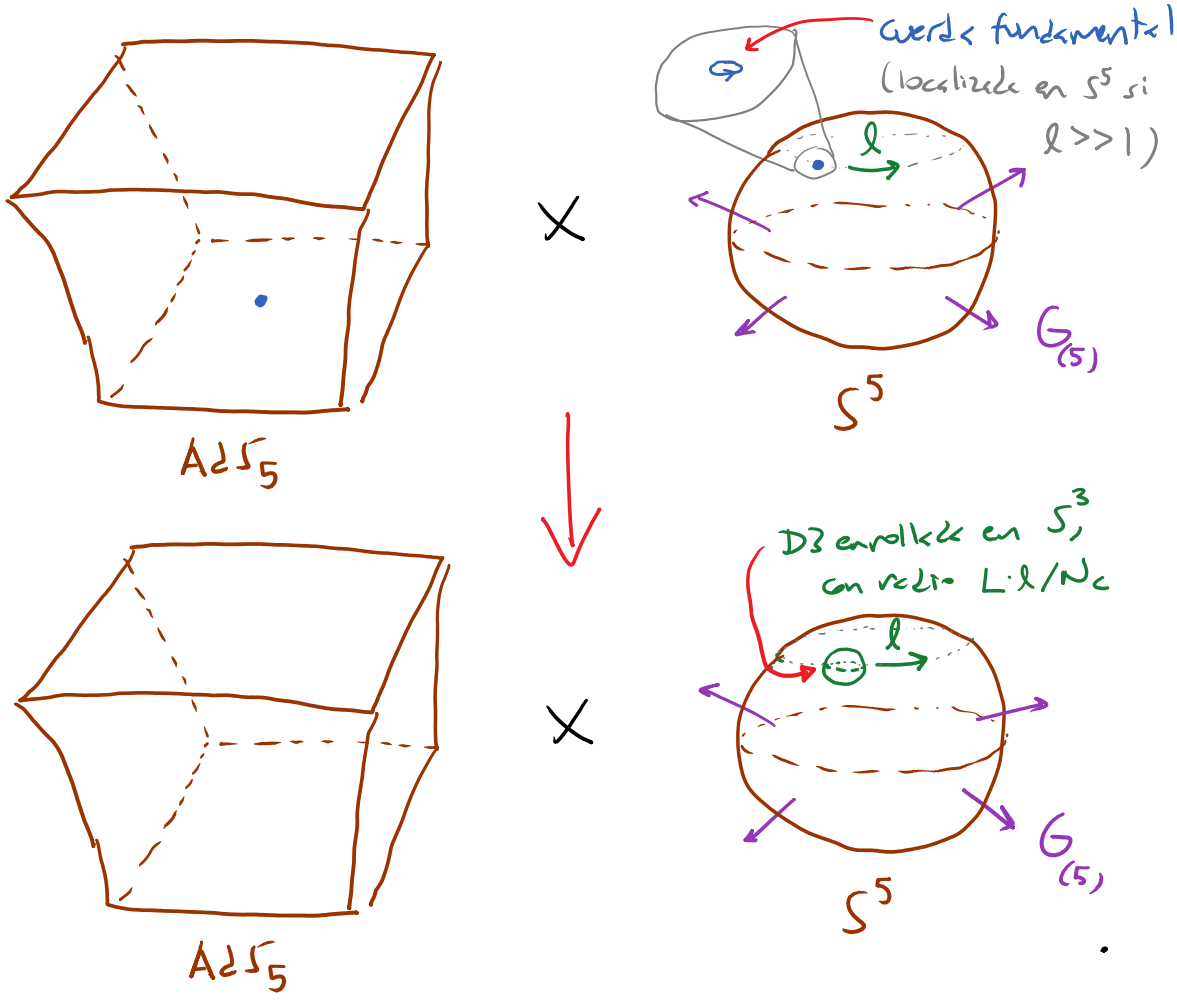
así que no podemos alcanzar $\Delta = N_c \gg N_c^{1/4} \gg \lambda^{1/4}$, y tenemos un acuerdo perfecto dentro del rango de validez de SUMA (es decir, en el límite $N_c \to \infty$, $\lambda \to \infty$).

└ 22 : 03/11/16 (-30 min)

Pero es interesante notar que para $N_c < \infty$, mientras que uno ingenuamente supondría que es posible tener valores arbitrariamente altos de ℓ (el momento angular de las ondas parciales / armónicos esféricos en S^5), la correspondencia AdS/CFT predice que existe una cota $\boxed{\ell \leq N_c}$ (que es no perturbativa en $g_c \sim 1/N_c$). Llamamos a esto el principio de exclusión cuerdero ("stringy exclusion principle"), y fue resaltado por primera vez por [Maldacena, Strominger] en el caso de AdS_3.

Tiempo después se entendió su origen físico del lado de cuerdas [Mcgreevy, Susskind, Toumbas]:

Conforme l aumenta, el correspondiente modo de KK del gravitón (u otros objetos del multiplete), que originalmente pensamos como una cuerda esencialmente puntual, se expande por su interacción con el campo RR $G_{(5)}$ (a través del llamado efecto Myers), convirtiéndose en una D3-brana enrollada en una $S^3 \subset S^5$, con un radio que crece de tal forma que, para $l > N_c$, ¡el "gravitón" simplemente no cabría en la S^5!



Se conocen soluciones explícitas donde una D3 está enrollada de esta manera sobre $S^3 \subset S^5$, que resultan ser $\frac{1}{2}$ BPS y tienen los mismos números cuánticos que el gravitón. Se les llama gravitones gigantes (de esfera). (Existen también otras soluciones con los mismos números cuánticos donde una D3 se expande en $S^3 \subset AdS_5$, conocidos como gravitones gigantes de AdS [Grisaru, Myers, Tafjord; Hashimoto, Hirano, Itzhaki], que NO tienen una cota sobre l.)

Es muy sorprendente que el principio de exclusión cuerdero se implemente a través de este mecanismo de expansión de los gravitones. Vale la pena resaltar que esta es una verificación de la dualidad ¡que ocurre a N_c finito!

Al examinar este aspecto del diccionario de AdS/CFT, es importante tener presente que para $l \sim N_c$ ya NO es cierto que los operadores de una traza correspondan a estados de una partícula: hay tenían componentes dentro

de $\mathcal{O}_\ell = \mathrm{Tr}\left(\Phi^{\{e_1}\Phi^{e_2}\cdots\Phi^{e_k\}}\right)$, que el conteo de factores de N_c en los diagramas de Feynman (pp. 68-90) se ve modificado (porque ahora aparecen factores adicionales de $\ell \sim N_c$ por las muchas maneras de contraer a los campos básicos dentro de cada traza) y los correladores de $\mathcal{O}_\ell$ ya No se factorizan como los de campos libres.

Los gravitones gigantes (de S^5 o AdS_5) son entonces duales no a los $\mathcal{O}_\ell$ directamente, sino a combinaciones lineales de ellos con operadores multitraza, que se conocen como polinomios de Schur [Balasubramanian, Berkooz, Naqvi, Strassler; Corley, Jevicki, Ramgoolam], y pueden etiquetarse con diagramas de Young.

Más allá de los detalles, el punto importante es que los operadores de MSYM duales a los gravitones gigantes de esfera tienen una cota $\ell \leq N_c$, y esta cota se explica por el hecho de que la D3 correspondiente se expande hasta no caber más en la S^5. Esto nos da además nuestra primera verificación de que MSYM incorpora objetos de C||D más allá de los modos de SUGRA. Podemos notar que estos

$\tilde{E}$ global

últimos tienen $\tilde{\Delta} \sim N_c^0$, en contraste con $\Delta \sim N_c^1$ para los $\mathcal{O}$ que son D-branas ($m_{D\text{-brana}} \sim \frac{1}{g_s}$). Para $\Delta \sim N_c^2$, los estados en CIIB ya no son objetos sobre $AdS_5 \times S^5$, sino fondos distorsionados como las "geometrías burbujeantes" (BPS) de [Lin, Lunin, Maldacena].

Para los operadores que no son BPS, en general No podemos comparar los resultados entre los 2 lados de la correspondencia. Si suponemos la validez de ésta, lo que tenemos entonces son predicciones de AdS/CFT para el comportamiento en un régimen inaccesible de MSYM ó CIIB.

P.ej., sabemos que en el límite $N_c \to \infty$, $\lambda \gg 1$, CIIB contiene, después de los modos de SUGRA (que como hemos dicho son todos BPS), con masas $m_{SUGRA} \sim 1/L$, a los modos excitados de cuerdas, con masas

$$m_c \sim \frac{1}{l_c} \gg \frac{1}{L} \quad \text{(recordar que } L \sim \lambda^{1/4} l_c\text{)}.$$

Esto nos permite predecir que los operadores no BPS en MSYM tienen dimensiones de escalamiento que genéricamente son al menos tan grandes como

$$\Delta \sim m_c L = \frac{L}{\ell_c} \sim \lambda^{1/4}$$

(donde nuevamente hemos usado, p.ej., $m^2 L^2 = \Delta(\Delta-4)$).

En otras palabras, dichos operadores tienen una enorme dimensión anómala cuando $\lambda \gg 1$.

Los operadores más sencillos de este tipo son los que están contenidos en el multiplete asociado al primario superconforme de dimensión desnuda $\Delta^{(0)} = 2$,

$$Tr(\Phi^e \Phi^e).$$

Se le conoce como el multiplete (operador) de Konishi.

(La razón es que contiene en particular a los operadores que Konishi, en el contexto de teorías de norma con SUSY $N=1$, identificó en 1984 como sujetos a reglas de transformación anómalas bajo SUSY (relacionadas también con la no conservación de corrientes de Noether $U(1)$), efecto conocido como la anomalía de Konishi.)

[Ver, p.ej., Andrianopoli, Ferrara, hep-th/9803171
9807150
9812067;

Bianchi, Kovacs, Rossi, Staneu, hep-th/0104016;

Eden, Jarczak, Sokatchev, Staneu, hep-th/0501077]

A partir de 2002 han habido enormes avances en el cálculo del espectro de dimensiones ↔ masas para modos excitados de cuerdas. El primer paso clave fue el descubrimiento de que los operadores con números cuánticos (como carga R o espín) grandes, que en lugar de mantenerse fijos escalan a infinito cuando N_c y/o $\lambda \to \infty$, pueden tener dimensiones anómalas comparativamente pequeñas, por la aparición de potencias de esos números cuánticos en el denominador.

Los pioneros fueron [Berenstein, Maldacena, Nastase, hep-th/0202021], quienes centraron su atención en operadores con carga R enorme. Denotando con $J \equiv R^{56}$ al generador de $SO(6) \simeq SU(4)$ que rota $\Phi^5 \leftrightarrow \Phi^6$ (y

no cambia a $\Phi^{1,\dots,4}$), es decir, aquel bajo el cual el campo complejo $Z \equiv \Phi^5 + i\Phi^6$ tiene carga (eigenvalor) $J=1$, BMN consideraron operadores del tipo

$$\mathcal{O}_J \sim \mathrm{Tr}[\underbrace{ZZZ\cdots Z}_{J\ Z\text{'s en total}} Y_1 Z\cdots Z Y_2 Z\cdots Z Y_3 Z\cdots],$$

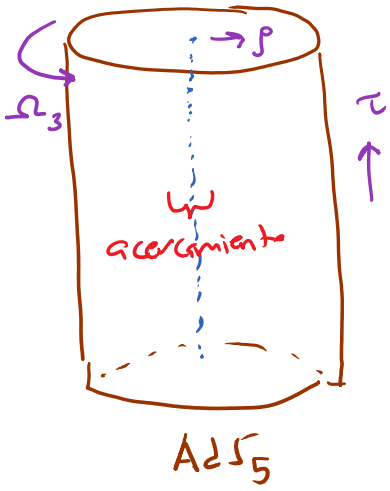
donde Y_r denota otros campos distintos a Z (con $J=0$), y mostraron que en el límite ($\neq$ 't Hooft)

$$N_c \to \infty, \quad g_{YM} \ll 1 \text{ fijo} \quad (\Rightarrow \lambda \to \infty),$$
$$J \to \infty \text{ con } J^2/N_c \text{ fijo} \quad \text{y} \quad g_{YM} J^2/N_c \ll 1,$$

suceden 2 cosas interesantes.

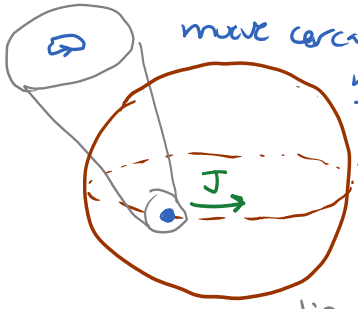
Primero, del lado de CFT, este subsector de estados que tienen momento angular $J \to \infty$ sobre la S^5 con $E-J$ fijo queda completamente descrito por la región inmediatamente vecina a una geodésica nula sobre la S^5. Esto es un ejemplo de lo que se conoce como límite de Penrose, y reduce el fondo $AdS_5 \times S^5$ a uno más sencillo, el

tipo conocido como onda pp (≡ onda de frente plano con rayos paralelos), que tiene isometría $SO(4)\times SO(4)$ (en lugar de $SO(4,2)\times SO(6)$) y todavía preserva 32 SUSYs [Blau, Figueroa-O'Farrill, Hull, Papadopoulos, hep-th/0110242].



AdS_5

×



S^5

Para $J\sim\sqrt{N_c}\to\infty$, cuerda se mueve cerca de geodésica nula $\psi=\tau$ ($\rho=0=\theta$)

cambio de coordenadas:

$\cos\theta_1 \equiv \cos\theta\sin\psi$

$\cos\theta_2 \equiv \dfrac{\cos\theta\cos\psi}{\sqrt{1-\cos^2\theta\sin^2\psi}}$

$0\le\theta\le\pi,\ 0\le\psi<2\pi$

$\theta_3,\theta_4,\theta_5$

$$ds^2 = L^2\Big[\underbrace{-\cosh^2\rho\,d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\,d\Omega_3}_{AdS_5} + \underbrace{d\theta^2 + \cos^2\theta\,d\psi^2 + \sin^2\theta\,d\Omega_3'^2}_{S^5}\Big]$$

↓ Región vecina a geodésica nula

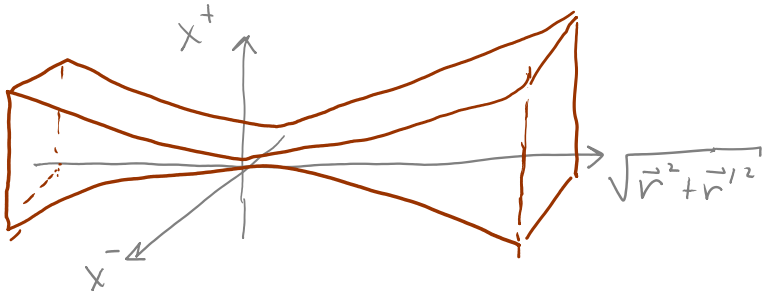
$$ds^2 = -4\,dx^+dx^- - (\vec{r}^2+\vec{r}'^2)(dx^+)^2 + d\vec{r}^2 + d\vec{r}'^2$$

$x^+ \equiv \dfrac{\tau+\psi}{2}$ $\quad x^- \equiv L^2\dfrac{(\tau-\psi)}{2}$ $\quad \mathbb{R}^4$ proveniente de AdS_5 $\quad \mathbb{R}^4$ proveniente de S^5

LZ: 14/1/21

$$(y\ G_{+1234} = G_{+5678} = \text{const.})$$

El fondo de onda pp tiene la forma esquemática:



En tal fondo, la acción en la hoja de mundo de la cuerda (con la "norma del cono de luz") resulta ser cuadrática, justo como en Minkowski (que de hecho es un caso particular de onda pp), ¡así que el espectro de la cuerda puede obtenerse de manera exacta [Metsaev, hep-th/0112044]! En notación de MSYM, el resultado es

$$\Delta = J + \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n \sqrt{1 + \frac{\lambda n^2}{J^2}} \quad .$$

($\sim \sqrt{N_c}$; número de excitación del modo n)

(Notar que la dimensión anómala $\sim \Delta - J \not\propto \lambda^{1/4}$. La manera en que escala J hace que estos estados sean "casi BPS".)

Segundo, a pesar de que $\lambda \to \infty$, la expresión para Δ admite una expansión en potencias de λ/J^2, que puede tomarse pequeño (la condición $g_{YM} J^2/N_c \ll 1$ solo implica que $\lambda/J^2 \gg g_{YM}^3$, con $g_{YM} \ll 1$) ¡y examinarse entonces perturbativamente en MSYM!

[Para algunos detalles de esta historia, ver p.ej. el capítulo 12 del curso de Nastase, arXiv: 0712.0689, o el artículo de revisión de Plefka, hep-th/0307101.]

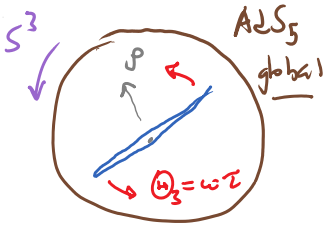
La construcción de BMN (junto con muchos análisis posteriores) demuestra que MSYM contiene, cuando menor, ¡el espectro completo de las cuerdas en un fondo de ondas pp (que es un subsector del espectro completo en $AdS_5 \times S^5$), incluyendo el caso de Minkowski!

Otro trabajo importante fue [Gubser, Klebanov, Polyakov, hep-th/0204051], que estudió operadores con espín alto, como, p.ej.,

miércoles, 24 de octubre de 2012 05:50 a.m.

derivadas covariantes

$$\mathcal{O}_S \sim Tr\left(\Phi^e D_{\{\mu_1} D_{\mu_2} \cdots D_{\mu_S\}} \Phi^e\right) \longleftrightarrow$$



(que se dice tiene "torcedura" (="twist") $\Delta^{(0)} - S = 2$)

identificándolos con cuerdas macroscópicas rotantes en AdS_5 (soluciones clásicas de las ecs. de mov. clásicas para la cuerda, que pueden considerarse solitones de la teoría en la hoja de mundo), y encontrando para ellos que

$$\Delta = S + \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \ln\left(\frac{S}{\sqrt{\lambda}}\right) + O(S^0)$$

cuando $S \gg \sqrt{\lambda} \gg 1$ (de nuevo, la dimensión anómala $\sim \Delta - S \propto \lambda^{1/4}$). Esto es interesante porque en acoplamiento débil se encuentra el mismo tipo de comportamiento logarítmico (característico de las teorías de norma),

$$\Delta = (S+2) + c_1 \lambda \ln S + \ldots \quad \text{para } \lambda \ll 1,$$

y se ha argumentado que para cualquier λ se tendrá

$$\Delta - S = f(\lambda) \ln S + \ldots$$

↳ término dominante para S grande

(con $f(\lambda)$ la llamada "dimensión anómala de cúspide", asociada a un lazo de Wilson con cúspide ⟩).

BMN y GKP fueron seguidos por una verdadera avalancha de trabajos, que exploraron cada vez con mayor profundidad y precisión la conexión entre el espectro (e interacciones) de MSYM y CIIB.

Una observación clave fue la traducción entre cada operador de MSYM y una cadena de espín (es decir, una hilera de sitios, en cada uno de los cuales hay una variable física descrita por un espín)
[Minahan, Zarembo, hep-th/0212208]. P.ej., los operadores del tipo (8 campos en total)

$$Tr(ZZ\cdots ZYZ\cdots ZYZ\cdots)$$

($Z \equiv \Phi^5 + i\Phi^6$, $Y \equiv \Phi^3 + i\Phi^4$)

que utilizan un solo campo escalar complejo Y además de Z (y no involucran a los conjugados complejos $Z^\dagger$ y $Y^\dagger$), se convierten, con el reemplazo

miércoles, 24 de octubre de 2012 08:48 a.m.

$$Z \to |\downarrow\rangle \quad , \quad Y \to |\uparrow\rangle ,$$

en cadenas de espín SU(2) (se trata de un $SU(2) \subset SU(4)$)

$$|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\rangle$$

(L sitios en total)

(y debemos exigir que los estados físicos sean invariantes bajo translaciones, para reflejar la ciclicidad de la traza). Bajo este mapeo, el generador de dilataciones Δ, cuyos eigenvalores deseamos obtener, se interpreta como el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ de la cadena de espín.

Cuando se trabaja hasta I lazos en la expansión perturbativa en $\mathcal{N}=4$ SYM, se encuentra que $\mathcal{H}$ contiene interacciones entre cada espín y sus vecinos hasta I sitios de distancia. P.ej., en el sector SU(2) descrito más arriba, a 1 lazo, se encuentra que

$$\mathcal{H}^{(1)}_{SU(2)} = \frac{\lambda}{8\pi^2}\left[-2\sum_{j=1}^{L}(\vec{\sigma}_j\cdot\vec{\sigma}_{j+1}-1)\right] ,$$

($\vec{\sigma}$: matrices de Pauli)

que contiene interacciones únicamente entre vecinos más

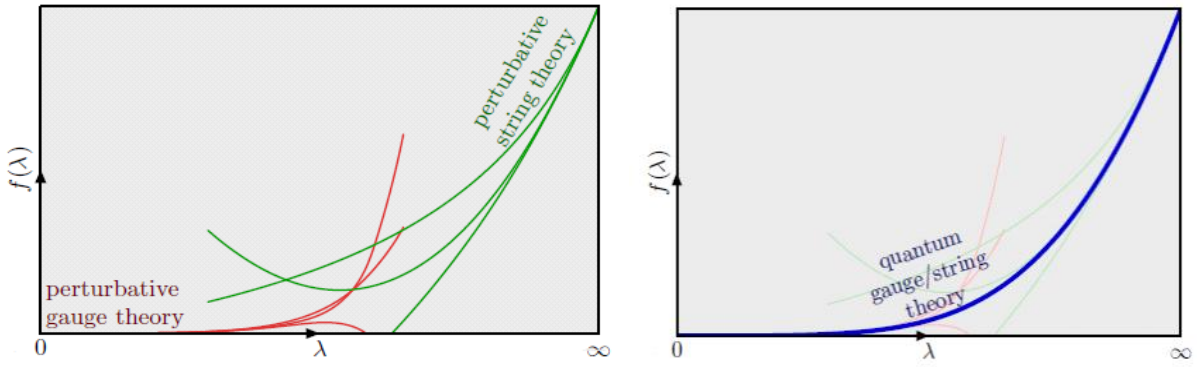
cercanos, y de hecho coincide con el llamado modelo de Heisenberg isotrópico (≡"XXX"), resuelto por Bethe en 1931. Tenemos entonces

Cadena de Espín ⟷ Subsector de MSYM ⟷ Subsector de CIIB.

También es posible regresar directamente de la cadena de espín a la acción de la cuerda [Kruczenski, hep-th/0311203].

La conclusión más importante de este tipo de análisis [realizados de manera prominente por Beisert y diversos colaboradores] es que, en el límite planar $N_c \to \infty$, tanto MSYM como CIIB son teorías integrables a nivel cuántico, para cualquier valor de λ. Es decir, poseen un número infinito de cargas conservadas, que permiten que la teoría sea soluble. Esto permite la utilización de técnicas de sistemas integrables (como p.ej. el "ansatz de Bethe termodinámico" o el "sistema Y") para obtener resultados en MSYM/CIIB ¡a cualquier valor de λ! Para ser más

precisos, las técnicas en cuestión permiten expresar a cualquier cantidad deseada (p.ej., dimensiones conformes) como las solución a un sistema de ecuaciones integrales (que pueden ser infinitas en número). Al menos en algunos casos, dicho sistema puede ser resuelto numéricamente, obteniendo así una función $F(\lambda)$ que interpole correctamente entre los resultados esperados para $\lambda \ll 1$ (provenientes de la expansión perturbativa en MSYM) y para $\lambda \gg 1$ (provenientes de cálculos perturbativos en CIIB). Esquemáticamente:



[del compendio Beisert et al., arXiv: 1012.3982].

23: 08/11/16

P.ej., a partir del sistema de ecuaciones integrales

obtenido en [Gromov, Kazakov, Vieira, arXiv:0901.3753], que codifica a las dimensiones $\Delta(\lambda)$ de todos los operadores de MSYM en el límite $N_c \to \infty$, [Gromov, Kazakov, Vieira, arXiv:0906.4240] fueron capaces de calcular numéricamente la dimensión del operador de Konishi (discutido brevemente en la p. 338), que no es BPS ni tiene números cuánticos grandes (a diferencia de los operadores de BMN o GKP), logrando reproducir el comportamiento $\Delta \propto \lambda^{1/4}$ predicho por AdS/CFT:

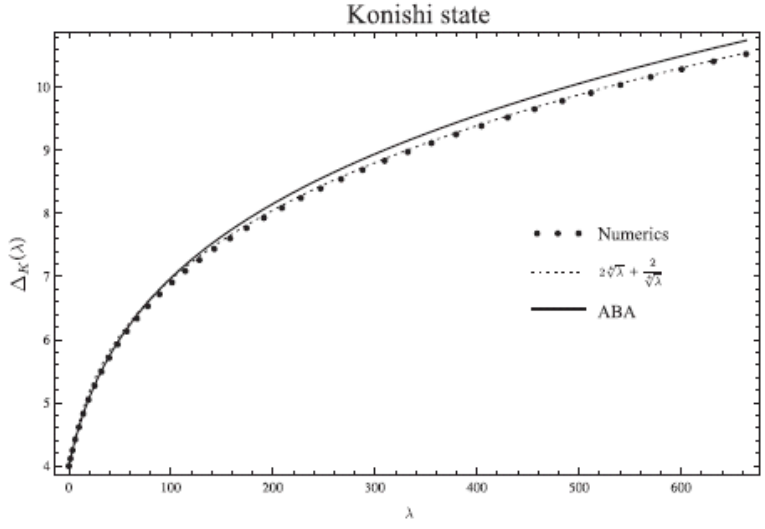


Figure 1: Numerical solution of exact finite size integral Y-system equations for the Konishi dimension $\Delta_K(\lambda)$ in a wide range of 't Hooft couplings λ, compared to the asymptotic Bethe ansatz curve and to the predicted large λ asymptotics $\Delta_K(\lambda) \simeq 2\lambda^{1/4} + 2/\lambda^{1/4}$ obtained by fit.

Otro ejemplo de este tipo de comprobaciones es el cálculo de un coeficiente dentro del llamado "factor de vestido" (que determina una matriz de dispersión $2 \to 2$ en MSYM/CIIB, la cual a su vez determina el espectro) [tesis de Vieira, Volin, arXiv: 1012.3992]:

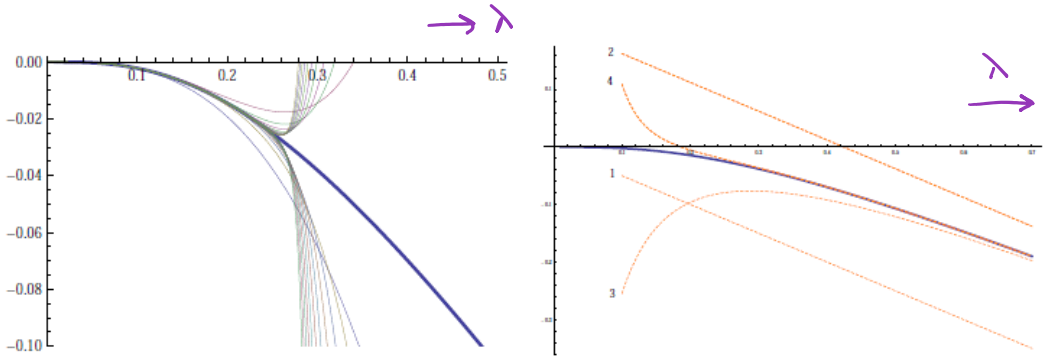


Figure 4: Left: $c_{1,2}(g)$ as given by (4.3) or (4.4) can be evaluated for any g: thick line. The weak coupling Taylor expansion (4.5) has a finite radius of convergence. The several thin lines plotted in this figure are several truncations of this expansion (from 1 to 20 terms); the more terms are included the most they approach the real curve for $g < 1/4$, the radius of convergence. **Right:** $c_{1,2}(g)$ (blue line) compared with its strong coupling expansion (dotted orange lines). 1 is the AFS result, 2 is AFS plus HL, 3 already includes the two loop correction and 4 contains the first four non-trivial terms. We see that the fit with four terms is perfect even for relatively small g! This fast convergency was also observed in numerical computations of dimensions, see e.g. [27].

Un muy extenso artículo de revisión sobre el tema de integrabilidad en AdS/CFT es

[Beisert et al., arXiv: 1012.3982].

buscar liga a colección completa de compendios

En los análisis que hemos esbozado, se puede ver que las cuerdas emergen en el límite $N_c \to \infty$ a partir de estructuras (como las cadenas de espín) que son discretas cuando $N_c < \infty$. Es decir, las cuerdas No son ingredientes fundamentales de la teoría, sino que se construyen con elementos más básicos. De esta manera, la correspondencia norma/gravedad nos ofrece el camino más prometedor que tenemos para entender la estructura microscópica de las cuerdas (y otras branas), el espacio y el tiempo.

Sabiendo ya que los operadores / campos (o, equivalentemente, los estados) de ambas teorías coinciden, ¿qué hay de las interacciones?

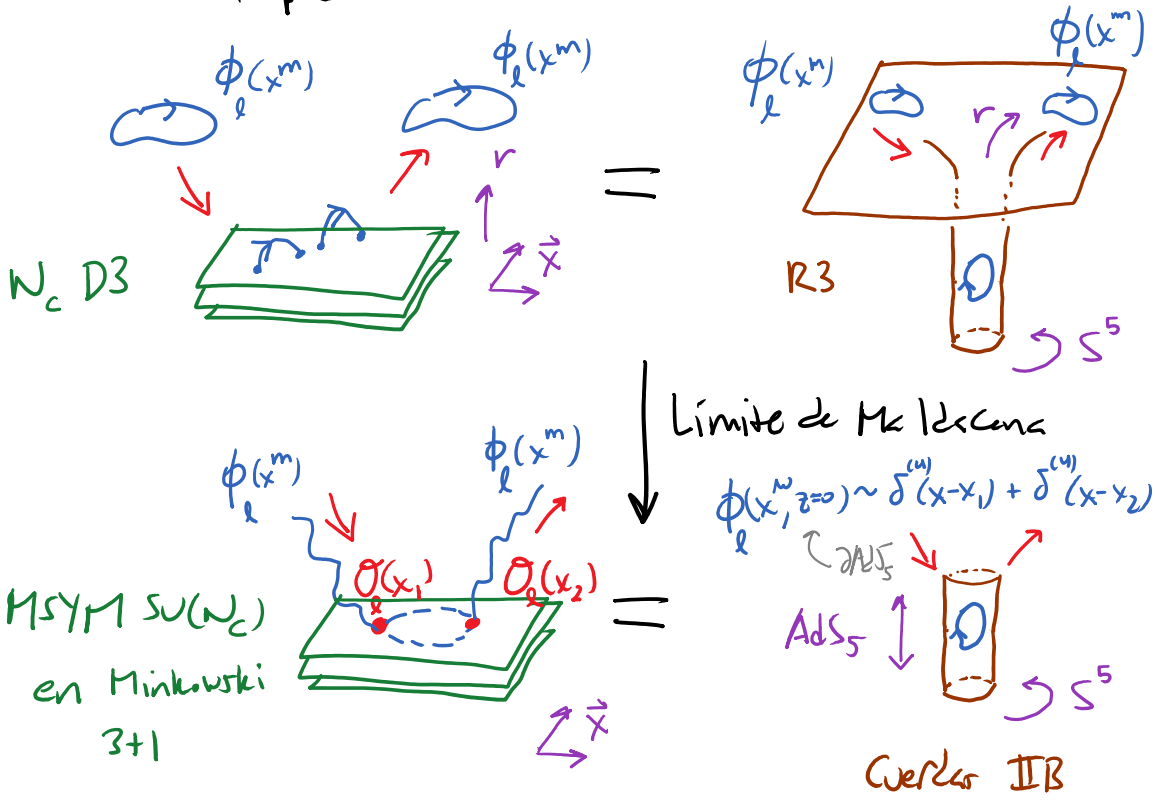
En MSM, ellas están codificadas en los correladores de operadores invariantes de norma,

$$\langle \mathcal{O}_{j_1}(x_1)\, \mathcal{O}_{j_2}(x_2) \cdots \mathcal{O}_{j_n}(x_n) \rangle .$$

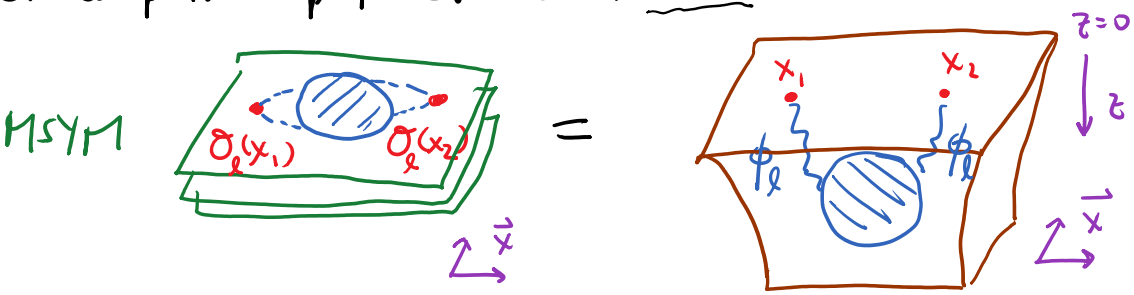
(En una CFT no es posible definir amplitudes de dispersión, porque no hay una escala con respecto a la cual podamos definir el límite de grandes separaciones y tiempos tempranos/tardíos, y no existen entonces estados asintóticos en el sentido tradicional.)

↳ 29: 19/01/21

Para vislumbrar cómo podríamos calcular estos correladores en AdS/CFT, regresemos a nuestra imagen de la situación previa al límite de Maldacena:



Así que, para calcular un correlador en MSYM, esencialmente queremos encender el campo correspondiente en los puntos apropiados de la frontera de AdS:



Del lado de MSYM, sabemos que una manera eficiente de empaquetar toda la información sobre correladores es a través de la funcional generatriz o función de partición

$$Z_{CFT}[J_j] \equiv \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi^e \mathcal{D}\Psi^f \exp\left[iS_{MSYM} + i\sum_j \int d^4x\, \mathcal{O}_j(x) J_j(x)\right]$$

incluir fantasmas y término fijador de norma

operadores compuestos (invariantes de norma) de interés

fuentes

(análoga a p.ej. $\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left[iS_{QED} + i\int d^4x (A_\mu J^\mu + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi})\right]$),

a partir de la cual podemos determinar

$$\langle \mathcal{O}_{j_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{j_n}(x_n)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_{CFT}[0]}\frac{\delta}{i\delta J_{j_1}(x_1)}\cdots\frac{\delta}{i\delta J_{j_n}(x_n)}\mathcal{Z}_{CFT}[J_j]\Big|_{J_j=0}.$$

Notar que, para calcular la funcional generatriz, lo que hacemos es deformar la teoría de modo que

$$S_{N=4\,SYM} \longrightarrow S_{N=4\,SYM} + \sum_j \int d^4x\, \mathcal{O}_j(x) J_j(x),$$

(≠ CFT, en general (a menos que $\mathcal{O}_j$s sean marginales)

y en el cálculo de correladores eventualmente apagamos esta deformación. (Después veremos qué pasa si decidimos NO apagarla.)

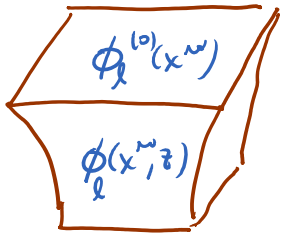
¿26: 22/05/24

Del lado de CFT, es posible también definir una función de partición, teniendo cuidado de especificar las condiciones de frontera para cada campo $\phi_\ell(x^m)$, que como sabemos juegan un papel más importante en AdS que en Minkowski, debido a la estructura causal:

$$\mathcal{Z}_{AdS}[\phi_j^{(0)}] = \int \mathcal{D}\varphi_\ell\, \mathcal{D}h_\ell^{mn}\, \mathcal{D}B_\ell^{mn}\cdots \exp[iS_{CFT}]$$

$$\phi_\ell(x^m, z=0) \sim \phi_\ell^{(0)}(x^m)$$

etc.



Pero, en más detalle, las condiciones de frontera que

podemos imponer para los campos $\phi_j(x^m)$ están restringidos por las ecuaciones de movimiento correspondientes.

P.ej.; para un campo escalar $\phi(x^\mu, z)$ en AdS_5 con masa m (un modo de KK específico en la S^5), la acción libre

$$\int d^5x \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2} g^{mn}\partial_m\phi\partial_n\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)$$

implica la ecuación de Klein-Gordan

$$(\Box - m^2)\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_m(\sqrt{-g}\,g^{mn}\partial_n\phi) - m^2\phi = 0,$$

$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2)$

que en coordenadas de Poincaré dice que

$$\left(\frac{z}{L}\right)^5\left[\partial_z\left(\left(\frac{L}{z}\right)^{5-2}\partial_z\phi\right) + \left(\frac{L}{z}\right)^{5-2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi\right] - m^2\phi = 0,$$

es decir, $z^5\partial_z\left(\frac{\partial_z\phi}{z^3}\right) + z^2\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - m^2L^2\phi = 0.$

Hablaremos de la solución exacta más adelante. Por ahora, solo nos interesa resaltar que esta ecuación obliga a ϕ a tener el comportamiento asintótico $\phi \underset{z\to 0}{=} z^{\Delta}\phi^{(0)}(x^\mu)$:

en breve explicaremos la notación para este exponente

miércoles, 31 de octubre de 2012 08:30 a.m.

$z^5\partial_z\left(\frac{\partial_z\phi}{z^3}\right)+z^2\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi$ (podemos descomponer en modos de Fourier, $\phi^{(0)}\sim\exp(ip\cdot x)$)

$$z^5\,\Delta(\Delta-4)\,z^{\Delta-5}\phi^{(0)}+z^{\Delta+2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^{(0)}-m^2L^2z^\Delta\phi^{(0)}=0$$

(z^Δ en total; $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^{(0)}$ subdominante para $z\to 0$)

$$\Longrightarrow\quad \Delta(\Delta-4)=m^2L^2 .$$ cf. $\Delta(\Delta-4)=m^2L^2$

De la p. 328 podemos ver que esta relación es la misma que existe entre la masa de ϕ y la dimensión conforme Δ del operador dual $\mathcal{O}$. En realidad esta ecuación tiene 2 soluciones:

$$\boxed{\Delta_\pm = 2\pm\sqrt{4+m^2L^2}}\quad \left(\text{ó } \Delta_\pm=\frac{d}{2}\pm\sqrt{\frac{d^2}{4}+m^2L^2}\text{ en } AdS_{d+1}\right),$$

que corresponden a los 2 posibles comportamientos asintóticos de las 2 soluciones independientes a la ec. de mov. (que es de 2do. orden): $\phi_+\sim z^{\Delta_+}$, $\phi_-\sim z^{\Delta_-}$.

Se tiene $\boxed{\Delta_+=\Delta,\ \Delta_-=4-\Delta_+}$ $(\Delta_-=d-\Delta_+)$.

Dado que $\Delta_-=\Delta_+-2\sqrt{4+m^2L^2}<\Delta_+$, es ϕ_- la que crece más rápido conforme $z\to 0$. Tan es así, que ϕ_- genéricamente es no normalizable. La distinción entre normalizable y no normalizable se establece

miércoles, 22 de mayo de 2024 03:31 p. m.

a partir del comportamiento de la acción: $\phi_+ \propto z^{\Delta}$

$$\Rightarrow \int d^5x \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{mn}\partial_m\phi\partial_n\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)$$

$$\propto \int d^4x \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^5}\left(z^2\partial_z\phi\,\partial_z\phi + z^2\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi\,\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)$$

ϵ: corte

$z^2\partial_z\phi\,\partial_z\phi \sim z^{2\Delta-2}$, $z^2\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi\,\eta^{\mu\nu} \sim z^{2\Delta}$, $\frac{1}{2}m^2\phi^2 \sim z^{2\Delta}$

$z^{2\Delta}$, $z^{2\Delta+2}$ subdominante

$$\propto \frac{z^{2\Delta}}{z^4}\Big|_{z=\epsilon}$$ es finita si $\Delta \geq 2 \leftrightarrow m^2L^2 \geq -4$ $\left(\Delta \geq \frac{d}{2}\right)$

y en cambio, reemplazando $\Delta = \Delta_+ \to \Delta_- = 4-\Delta$,

$$\propto \frac{z^{2(4-\Delta)}}{z^4}\Big|_{z=\epsilon}$$ es divergente si $\Delta > 2$ $\left(\Delta > \frac{d}{2}\right)$

Alternativa pero equivalentemente, la normalizabilidad se puede definir a partir del producto interno de Klein-Gordan

$\det$ de métrica inducida a t fijo

$$(\phi_1,\phi_2) \equiv i\int d^3\vec{x}\, dz\, \sqrt{\gamma}\sqrt{g^{tt}}\left(\phi_1^*\partial_t\phi_2 - \phi_2\partial_t\phi_1^*\right)$$

2 soluciones cualesquiera de KG

(bajo el cual los modos de Fourier usuales en Minkowski, $\phi_{\vec{p}} \equiv \frac{e^{ip\cdot x}}{\sqrt{2p^0}}$ con $p^2=-m^2$, son ortonormales,

$$(\phi_{\vec{p}},\phi_{\vec{p}'})\Big|_{t=0} = i\int d^3\vec{x}\,(-1)\left\{\frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2p^0}}\left(-ip'^0\frac{e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2p'^0}}\right) - \frac{e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2p'^0}}\left(ip^0\frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2p^0}}\right)\right\}$$

$$= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\quad),$$

de tal modo que la norma de Klein-Gordon

$$\|\phi_1\|^2 \equiv (\phi_1,\phi_1) = i\int d^3\vec{x}\, dz\,\sqrt{\gamma}\sqrt{g^{tt}}\left(\phi_1^*\partial_t\phi_1 - \phi_1\partial_t\phi_1^*\right)$$

es la integral de la componente $m=t$ de la corriente de Noether $j^m \equiv g^{mn}(\phi^*\partial_n\phi - \phi\partial_n\phi^*)$, y por tanto es independiente de t si j^m satisface condiciones de frontera adecuadas en el infinito espacial. Vemos que

$z^{\Delta_-} \frac{e^{ip\cdot x}}{\sqrt{2p_0}}$

$$(\phi_-, \phi_-) = i \int d^3\vec{x}\, dz \sqrt{\gamma}\sqrt{g^{tt}} \left(\phi_-^* \partial_t \phi_- - \phi_- \partial_t \phi_-^*\right)$$

$$\sim (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}) \underbrace{\int_0 dz \left(\frac{L}{z}\right)^3 \left(\frac{z}{L}\right) z^{2\Delta_-}}_{\to \infty \text{ si } \Delta_- < 1} \propto z^{2\Delta_- - 2}\Big|_{z=0}$$

Es decir, ϕ_- es no normalizable si

$$2 - \sqrt{4+m^2L^2} < 1 \implies \boxed{m^2L^2 > -3}$$

cf. cota BF (p. 319-20) $m^2L^2 \geq -4$

(para AdS_{d+1}, esto sería $m^2L^2 > -(d^2-4)/4$).

Por otra parte, $(\phi_+, \phi_+) \propto z^{2\Delta_+ - 2}\Big|_{z=0} < \infty$ si $\Delta_+ = 2 + \sqrt{4+m^2L^2} \geq 1$, es decir, ϕ_+ siempre es normalizable.)

Aunque hemos hecho el análisis aquí explícitamente para un campo escalar, este resultado es genérico: los posibles comportamientos asintóticos son

$$\phi \underset{z\to 0}{\sim} z^{\Delta_\pm}, \text{ con } \begin{cases} \Delta_+ = \Delta & \text{normalizable} \\ \Delta_- = 4-\Delta & \text{NO normalizable} \end{cases},$$

donde Δ coincidirá con la dimensión conforme del operador $\mathcal{O} \in CFT$ que es dual a ϕ. (Podremos

comprobar esta conexión genérica más adelante.)

Al cuantizar el campo $\phi(x^\mu, z)$, son solo los modos normalizables $u_n(x)$ los que pueden fluctuar y están asociados a operadores de creación/aniquilación $a_n, a_n^\dagger$ [para cuantización de campos en fondos curvos, ver p.ej. Birrell & Davies].

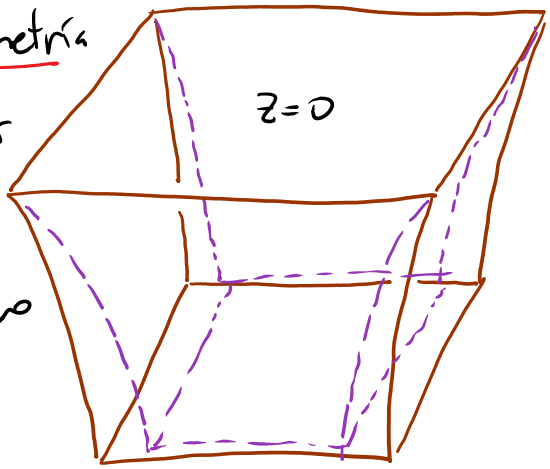
Los modos no normalizables, en cambio, tienen un comportamiento asintótico tan violento que No pueden fluctuar, y representan simplemente un fondo fijo sobre el cual ocurren las fluctuaciones dinámicas. Decidimos si los encendemos o no especificando condiciones de frontera en $z \to 0$. En resumen,

Modos NO normalizables (no fluctuantes, clásicos) $\longleftrightarrow$ Fondo que define a nuestra TEORÍA

Modos normalizables (fluctuantes, sujetos a cuantización) $\longleftrightarrow$ Especificación del ESTADO de interés en la teoría dada

Habíamos enfatizado antes que, para tener el dual de

una CFT, pedimos que la geometría sea asintóticamente AdS, es decir, fijamos el comportamiento de la métrica en la frontera, pero dejamos que fluctúe en el interior. Ahora podemos ser más precisos respecto a este punto. Si escribimos



$$g_{mn} \equiv \frac{L^2}{z^2}(\eta_{mn} + h_{mn}),$$

gravitón (onda s)

el posible comportamiento asintótico de h_{mn}, constreñido por la ecuación de Einstein linealizada, es

$$h_{mn} \sim z^{\Delta_\pm} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \Delta_+ = \Delta = 4 \\ \Delta_- = 4 - \Delta = 0 \end{cases},$$

con $\Delta = 4$ la dimensión del operador dual $T_{\mu\nu}$.

Nuestra definición de un fondo asintóticamente AdS requiere no excender los modos no normalizables de la métrica, pero sí dar oportunidad de que se excitan los modos normalizables, es decir, $h_{mn} \underset{z\to 0}{\sim} \mathcal{O}(z^4)$,

o lo que es lo mismo,

$$g_{mn}dx^m dx^n = \frac{L^2}{z^2}\left\{ dx^\mu dx_\mu + dz^2 + \mathcal{O}(z^4) \right\}.$$

↳ modos sujetos a cuantización

Para el resto de los campos debemos utilizar una prescripción similar: si queremos el fondo dual a una CFT específica, como MSYM, exigimos que los modos NO normalizables estén apagados, al tiempo que permitimos que los modos normalizables puedan estar encendidos. Esto es entonces también parte de lo que queremos decir en el contexto de AdS/CFT al hablar de un fondo "asintóticamente AdS".

Encender modos NO normalizables, modificando las condiciones de frontera, significa cambiar de teoría. Recordando que esto es justamente lo que necesitamos hacer para calcular la funcional generatriz

$$Z_{CFT}[J_j] \equiv \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi^e \mathcal{D}\psi^f \exp\Big[\underbrace{iS_{MSYM} + i\sum_j \int d^4x\, \mathcal{O}_j(x) J_j(x)}_{iS_{CFT\ deformada}}\Big]$$

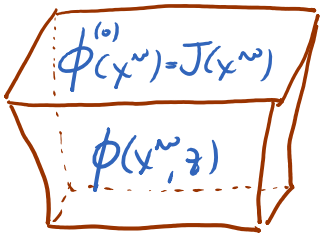
vemos que es natural proponer la identificación

$$** \quad \boxed{Z_{CFT}[J_j] = Z_{AdS}[\phi_j^{(0)} = J_j]} \qquad \text{Receta GKPW}$$

[Gubser, Klebanov, Polyakov; Witten], donde

$$Z_{AdS}[\phi_j^{(0)}] \equiv \int \mathcal{D}\varphi_\ell \mathcal{D}h_\ell^{mn} \mathcal{D}B_\ell^{mn} \cdots \exp[iS_{CIIB}]$$

con $\lim_{z\to 0} \phi_j(x^\mu, z) = z^{4-\Delta_j} \phi_j^{(0)}(x^\mu)$.



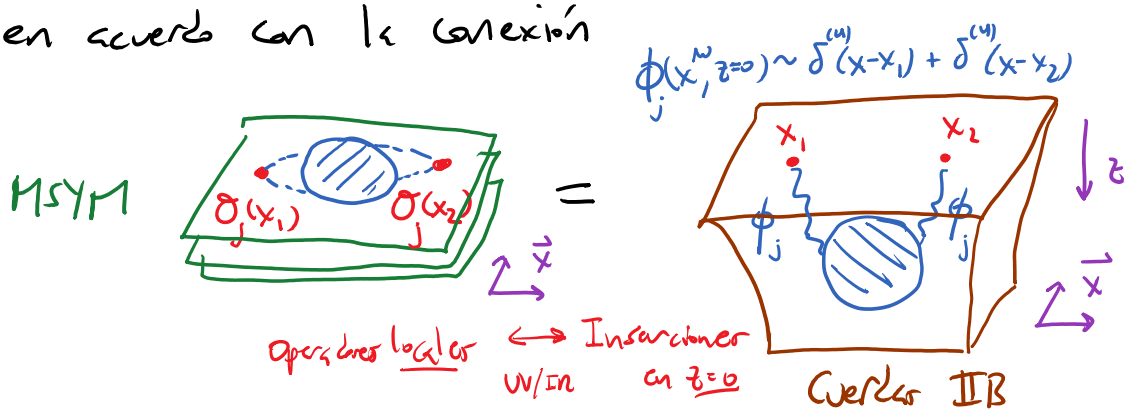
etc. solo si $\Delta_j = 4$ (como $Tr(F^2)$ o $T_{\mu\nu}$)

Es decir, el valor de frontera $\phi_j^{(0)}(x^\mu) \equiv \lim_{z\to 0} z^{\Delta_j - 4} \phi_j(x^\mu, z)$ del campo $\phi_j(x^\mu, z)$ se interpreta como la fuente $J_j(x^\mu)$ del operador dual $\mathcal{O}_j(x^\mu)$.

L27: 27/05/14

Para calcular funciones de correlación $\langle \mathcal{O}_{j_1}(x_1)\, \mathcal{O}_{j_2}(x_2) \cdots \rangle$, encendemos estas fuentes solo en los puntos específicos $x_1^\mu, x_2^\mu, \ldots$, es decir, ponemos $\phi_j^{(0)}(x) \sim \delta^{(4)}(x - x_j)$,

en acuerdo con la conexión



que habíamos vislumbrado (en la p.353) a partir de la deducción de la correspondencia.

[30: 21/01/21

La identificación de GKPW entre las funciones de partición implica que el diccionario de AdS/CFT incorpora la interpretación de los modos sí/no normalizables que ya teníamos del lado de AdS:

Encender modos NO normalizables de $\phi_j(x,z)$, $\phi_j(x,z) \underset{z\to 0}{\sim} z^{4-\Delta}\phi_j^{(0)}(x)$ ↔ Cambiar la TEORÍA por $\delta S = \int d^4x\, \mathcal{O}_j(x)\,\phi_j^{(0)}(x)$

Encender modos SÍ normalizables de $\phi_j(x,z)$, $\phi_j(x,z) \underset{z\to 0}{\sim} z^{\Delta}\left[\sum_n u_{jn}(x)\, a_n^\dagger + \text{c.h.}\right]$ ↔ Cambiar el ESTADO a $\sim \sum_n u_{jn}(x)\, a_n^\dagger |0\rangle$

[Balasubramanian, Kraus, Lawrence; Banks, Douglas, Horowitz, Martinec].

Cabe señalar que, debido a que nuestro análisis del campo escalar en la p. 358 mostró que los modos $\phi_-(x,z) \sim z^{\Delta_-}\phi^{(0)}(x)$ son NO normalizables cuando $m^2L^2 > -3$, mientras que la cota de Breitenlohner-Freedman (pp. 319-20) exige solo que $m^2L^2 \geq -4$ para tener estabilidad del fondo, hay una pequeña ventana

$$\boxed{-4 \leq m^2L^2 < -3} \quad \left(-d^2/4 \leq m^2L^2 < -d^2/4+1 \text{ en } AdS_{d+1}\right)$$

en donde tanto $\phi_+ \sim z^{\Delta_+}$ como $\phi_- \sim z^{\Delta_-}$ son de hecho normalizables. En ese caso es consistente fijar ϕ_- por condiciones de frontera y tomar a ϕ_+ como fluctuante, o fijar ϕ_+ por condiciones de frontera y tomar a ϕ_- como fluctuante. Estas 2 distintas cuantizaciones son duales a 2 distintas CFTs, donde el operador $\mathcal{O}$ dual a ϕ tiene respectivamente $\Delta = \Delta_+$ ó $\Delta = \Delta_-$ [Klebanov, Witten].

En general no sabemos calcular Z_{AdS}. Si $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c >> 1$, entonces podemos restringir atención a los modos de SUGRA IIB en 9+1 dim (pp. 157-8),

$$S_{SIIB} = \frac{1}{16\pi G_N^{(10)}} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} \left\{ R^{(10)} - \frac{1}{2} \partial_M \varphi \partial^M \varphi + \dots \right\},$$

o, después de la descomposición en modos de KK sobre la S^5,

$$\boxed{S_{SIIB} = \frac{1}{16\pi G_N^{(5)}} \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} \left\{ R^{(5)} - \frac{1}{2} \partial_m \varphi \partial^m \varphi + \dots \right\},}$$

incluye torre de KK

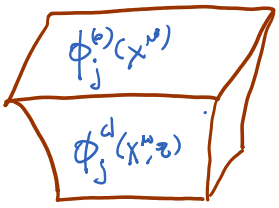
donde

$$\frac{1}{16\pi G_N^{(5)}} \equiv \frac{\mathrm{Vol}(S^5)}{16\pi G_N^{(10)}} = \frac{L^5 \Omega_5}{16\pi G_N^{(10)} L^3} \overset{\text{p. 240}}{=} \frac{(4\pi g_c N_c \ell_c^4)^2 \pi^3}{(2\pi)^7 g_c^2 \ell_c^8 L^3} = \frac{N_c^2}{8\pi^2 L^3}.$$

Para $N_c \to \infty$, esta acción $S_{SIIB} \propto N_c^2$ se vuelve muy grande, justo como cualquier acción $\frac{S}{\hbar}$ en el límite clásico $\hbar \to 0$, así que la función de partición puede calcularse en la aproximación de punto silla (o de fase estacionaria),

miércoles, 07 de noviembre de 2012 10:22 a.m.

$$Z_{AdS}[\phi_j^{(0)}] \equiv \int \mathcal{D}\varphi_\ell \mathcal{D}h_\ell^{mn} \mathcal{D}B_\ell^{mn} \cdots \; e^{iS_{SIIB}[\phi_j]}$$



$$\lim_{z\to 0} \phi_j(x^\mu, z) = z^{4-\Delta_j} \phi_j^{(0)}(x^\mu)$$

GKPW $= J_j(x^\mu)$

$$\underset{N_c\to\infty}{\simeq} \exp\left\{ iS_{SIIB}[\phi_j^{cl}[\phi_j^{(0)}]] \right\}\Big|_{\lim_{z\to 0} \phi_j^{cl}(x^\mu, z) = z^{4-\Delta_j}\phi_j^{(0)}(x^\mu)}$$

donde ϕ_j^{cl} denota la solución a las ecs. de mov. de SUGRA (es decir, el perfil de los campos que extremiza a S_{SIIB}) con las condiciones de frontera dadas.

Así que para $\lambda, N_c \gg 1$, podemos determinar las funciones de correlación de SYM a través de un cálculo en AdS_5 que involucra simplemente resolver las ecs. de mov. clásicas de SUGRA!

Antes de explicar cómo se realizan los cálculos del lado de gravedad, conviene tener claro qué es lo que esperamos del lado de la teoría de norma. En cualquier CFT, la forma de los correladores está fuertemente restringida por la simetría conforme.

En la p.296 vimos la manera en que se comportan los operadores primarios bajo transformaciones conformes infinitesimales. Concentrándonos por simplicidad en el caso de operadores escalares $\mathcal{O}_j(x)$ con dimensión Δ_j, la versión finita de la regla de transformación bajo $x \to x'(x)$ es

$$\mathcal{O}_j(x) \to \left|\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right|^{\Delta_j/d} \mathcal{O}_j(x') \,.$$

(d: dimensión espaciotemporal; $\left|\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right|$: jacobiano de matriz $d \times d$)

P.ej., bajo una dilatación $x' = sx \leftrightarrow \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = s\,\delta^\mu_\nu$ (δ^μ_ν: delta de Kronecker),

$$\mathcal{O}_j(x) \to s^{\Delta_j}\mathcal{O}_j(sx) \,,$$ como ya sabíamos.

Consideraremos ahora funciones de correlación de n puntos, en el vacío invariante conforme.

- $n=1$: Por invariancia bajo traslaciones, $\langle \mathcal{O}_j(x)\rangle$ (valor esperado en vacío conforme) debe ser constante. Pero bajo una dilatación,

$$\langle \mathcal{O}_j(x)\rangle \to s^{\Delta_j}\underbrace{\langle \mathcal{O}_j(sx)\rangle}_{=\langle \mathcal{O}_j(x)\rangle} \,,$$

así que sólo tendremos invariancia si $\Delta_j = 0$ (en cuyo caso $\mathcal{O}_j \propto \mathbb{1}$) o si $\langle \mathcal{O}_j(x) \rangle = 0$. En resumen,

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_j(x) \rangle = 0 \quad \forall \quad \mathcal{O}_j \neq \mathbb{1}} \; .$$

• $n=2$: Por invariancia bajo Poincaré, $\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\rangle$ solo puede depender de $(x_1-x_2)^2$, es decir,

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\,\mathcal{O}_2(x_2)\rangle = f(|x_1-x_2|) \; .$$

Bajo dilataciones debemos tener

$$f(|x_1-x_2|) = \langle \mathcal{O}_1(x_1)\,\mathcal{O}_2(x_2)\rangle = s^{\Delta_1+\Delta_2}\langle \mathcal{O}_1(sx_1)\,\mathcal{O}_2(sx_2)\rangle$$
$$= s^{\Delta_1+\Delta_2}\, f(s|x_1-x_2|) \; ,$$

lo cual implica que

$$f(|x_1-x_2|) = \frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \; .$$

Por último, notando que bajo una transformación conforme especial

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1+2b\cdot x + b^2x^2} \qquad \text{se tiene}$$

$$(x_1'-x_2')^2 = \frac{(x_1-x_2)^2}{(1+2b\cdot x_1+b^2x_1^2)(1+2b\cdot x_2+b^2x_2^2)}$$

y $\left|\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right| = \frac{1}{|1+2b\cdot x+b^2x^2|^d}$,

$\mathcal{O}_j(x) \to \left|\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right|^{\Delta_j/d}\mathcal{O}_j(x')$

la invariancia de $\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\rangle$ equivale a

$$\frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} = \left|\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right|^{\frac{\Delta_1}{d}}\left|\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right|^{\frac{\Delta_2}{d}}\langle \mathcal{O}_1(x_1')\mathcal{O}_2(x_2')\rangle$$

$$= \frac{C_{12}\,(1+2b\cdot x_1+b^2x_1^2)^{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}}(1+2b\cdot x_2+b^2x_2^2)^{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}}}{|1+2b\cdot x_1+b^2x_1^2|^{\Delta_1}|1+2b\cdot x_2+b^2x_2^2|^{\Delta_2}|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}}$$

Si $C_{12}\neq 0$, esto solo se satisface si $\Delta_1=\Delta_2$.

En resumen,

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\rangle = \delta_{\Delta_1,\Delta_2}\frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}}$$

L24: 10/11/16

(donde C_{12} podría escalarse a 1 ajustando la normalización de los operadores).

En particular, $\langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2)\rangle = |x_1-x_2|^{-2\Delta}$ implica que una manera de determinar la dimensión de un operador $\mathcal{O}$ es calcular su función de 2 puntos.

- $n=3$: Un análisis similar [ver MA600] permite mostrar que

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\rangle = \frac{C_{123}}{|x_{12}|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}\,|x_{13}|^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}\,|x_{23}|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}}$$

con $x_{ij} \equiv x_i - x_j$. Después de normalizar las funciones de 2 puntos a 1, las constantes C_{123} son características de la teoría. Están relacionadas con la expansión del producto de operadores, OPE: $\mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(0) \xrightarrow[x\to 0]{} \sum_k |x|^{\Delta_k-\Delta_i-\Delta_j} C_{ijk}\mathcal{O}_k(0)$, y en general dependen de los parámetros/acoplamientos de la teoría (en el caso de MSYM, g^2_{YM} y N_c, ó λ y N_c).

- $n\geq 4$: Aquí la dependencia espaciotemporal deja de estar determinada por completo, porque con $n\geq 4$ variables x_j^μ se pueden formar combinaciones invariantes conformes del tipo

$$x_{1234} \equiv \frac{x_{12}\,x_{34}}{x_{13}\,x_{24}},$$

conocidos como "cocientes cruzados" (cross-ratios) o "cocientes anarmónicos." Para una función de n puntos

miércoles, 14 de noviembre de 2012 05:07 a.m.

$= 2$ para $n=4$

existen $n(n-3)/2$ cocientes cruzados independientes.

Utilizando la invariancia conforme, se puede identificar la forma de los correladores salvo por una función de los correspondientes cocientes cruzados. P.ej.,

$$\langle \mathcal{O}_{j_1}(x_1)\mathcal{O}_{j_2}(x_2)\mathcal{O}_{j_3}(x_3)\mathcal{O}_{j_4}(x_4)\rangle = f\left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{14}}\right)\prod_{i<j} x_{ij}^{\frac{\Delta}{3}-\Delta_i-\Delta_j}.$$

con $\Delta \equiv \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4$

Podemos regresar ahora a la receta GKPW para correladores (para $N_c \gg 1$, $\lambda \gg 1$),

$= Z_{AdS}$ p. 366

$$\langle \mathcal{O}_{j_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{j_n}(x_n)\rangle = \frac{\delta}{i\delta J_{j_1}(x_1)}\cdots\frac{\delta}{i\delta J_{j_n}(x_n)}\left[e^{iS_{SUGRA}[\phi_j^d[J_j]]} \right]_{\substack{\phi_j^d \xrightarrow[z\to 0]{} z^{4-\Delta} J_j \\ J_j = 0}}.$$

Queda claro de esta fórmula que para determinar la función de 2 puntos de algún operador $\mathcal{O}$, basta con considerar los términos de S_{SUGRA} que son cuadráticos en el campo dual ϕ.

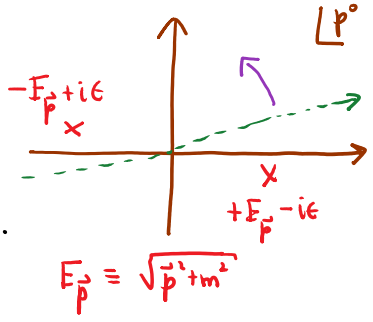
Si lo que queremos es el correlador de 2 puntos

ordenado en el tiempo, es decir, el propagador de Feynman, (que es el que calcula en automático la integral funcional),

$$\langle 0| T\{\mathcal{O}_{j_1}(x_1)\mathcal{O}_{j_2}(x_2)\}|0\rangle ,$$

↑ orden temporal: tiempo aumenta de derecha a izquierda

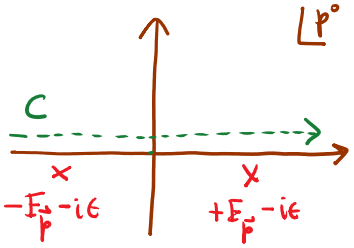
podemos obtenerlo con una rotación de Wick a partir de la versión euclideana de la correspondencia. (Recordar que la prescripción del $+i\epsilon$ que implementa el orden temporal justamente permite la rotación de Wick.



P.ej., para un campo libre,

$$\langle T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\}\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{ip\cdot(x_1-x_2)}}{-p^2-m^2+i\epsilon} \quad \leftarrow = [p^0-(E_{\vec{p}}-i\epsilon)][p^0+(E_{\vec{p}}-i\epsilon)] \,.$$

Este No es el caso para correladores No ordenados en el tiempo, como p.ej., el propagador retardado



$$\langle \theta(x_1^0-x_2^0)[\varphi(x_1),\varphi(x_2)]\rangle = \int_C \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{ip\cdot(x_1-x_2)}}{-p^2-m^2} \,.$$

Para determinar tales correladores, se requiere una implementación lorentziana de GNPW, desarrollada por [Balasubramanian, Kraus, Lawrence] y sobre todo [Skenderis, Van Rees]. Nos enfocaremos aquí en correladores de Feynman.

El primer paso en el cálculo del correlador será entonces resolver la ecuación de movimiento para ϕ en la versión euclídea de AdS_5 (es decir, el espacio hiperbólico 5-dimensional, H_5). Tomemos por simplicidad el caso de un campo escalar con masa m (como p.ej. los modos de KK del dilatón, $\varphi_l(x)$, con $m^2L^2 = l(l+4)$),

$$S = c\int dz\, d^4x \sqrt{g}\left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right]$$

cte. de normalización $\propto \frac{1}{G_N^{(5)}} \propto N_c^2$ p.365

$$\uparrow \quad ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(dx_4^2 + d\vec{x}^2 + dz^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad (\Box - m^2)\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_m\left(g^{mn}\sqrt{g}\,\partial_n\phi\right) - m^2\phi = 0\,,$$

es decir (p.355)

$\mu,\nu = 4,1,2,3$

$$z^5\partial_z\left(\frac{\partial_z\phi}{z^3}\right) + z^2\,\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - m^2L^2\phi = 0.$$

Podemos descomponer en modos de Fourier a lo largo de x^μ, $\phi(x,z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot x}\tilde{\phi}(p,z)$, obteniendo

$$z^5\partial_z\left(\frac{\partial_z\tilde{\phi}}{z^3}\right) - z^2\underbrace{\delta^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}_{\equiv p^2}\tilde{\phi} - m^2L^2\tilde{\phi} = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$J^5 \partial_J\left(\frac{\partial_J \tilde{\phi}}{J^3}\right) - J^2\tilde{\phi} - m^2L^2\tilde{\phi} = 0 \,,$$

con $J \equiv pz$. Si ahora ponemos $\tilde{\phi}(J) = J^2 B(J)$, la ecuación para B resulta ser la de Bessel modificada,

$$J^2\partial_J^2 B + J\partial_J B - (J^2+\nu^2)B = 0 \quad \text{con } \nu = \sqrt{4+m^2L^2} \,,$$

de modo que encontramos 2 soluciones independientes,

$$\tilde{\phi}(J) = \begin{cases} c' J^2 K_\nu(J) \\ c'' J^2 I_\nu(J) \end{cases} \quad \text{con } \nu = \sqrt{4+m^2L^2} = \Delta - 2 \,. \qquad m^2L^2 = \Delta(\Delta-4) \text{ p.328}$$

Descartamos la segunda opción porque diverge exponencialmente para $J = pz \to \infty$, así que NO da una contribución $\neq 0$ a $Z = \exp(-S[\phi])$. Nos quedamos con solución tal que $\tilde{\phi} \xrightarrow[z\to\infty]{} \text{finito}$.

[31: 26/01/21

Notar que $z \to \infty$ es donde estaría el horizonte de Poincaré en la versión lorentziana, para la cual, cuando $p^2 < 0$, las 2 soluciones I_ν y K_ν se convierten en J_ν y $H^{(1)}_\nu$, que tienen comportamiento oscilatorio en lugar de exponencial.

Los correladores lorentzianos NO ordenados en el tiempo, o los correladores sí ordenados en el tiempo pero tomados

en un estado distinto al vacío, se distinguirán por tener una condición de frontera diferente en $z \to \infty$ [Herzog, Son hep-th/0212072] y [Skenderis, van Rees 0812.2909].

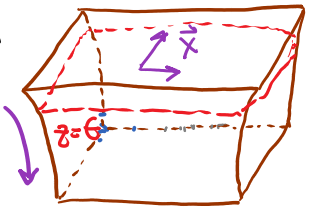
La solución $\phi(x,z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{c}(p)\, e^{ip\cdot x} J^{\Delta} K_{\nu}(Jz)$ queda completamente determinada en cuanto imponemos la condición de frontera en $z=0$, $\phi(x,z) \longrightarrow z^{4-\Delta}\phi_0(x)$ con $\phi_0(x) = J(x)$. (fuente arbitraria)

[28 : 29/05/24]

Pero antes de hacer esto, recordemos que nuestro siguiente paso sería sustituir la solución obtenida, $\phi_{cl}[J]$, en la acción $S \sim \int_0^{\infty} dz\, d^4x\, \sqrt{g} \cdots$. En general, esta integral será divergente en $z \to 0$, por la sencilla razón de que el volumen del espacio diverge ahí, $\sqrt{g} \sim (L/z)^5$. Por la conexión UV/IR (p. 262), esta divergencia IR en AdS corresponde a una divergencia UV en la CFT, que es precisamente lo que esperamos encontrar al calcular correladores.

Debemos entonces enfrentarlos con un procedimiento análogo al que es estándar en teoría de campos (pp. 32-35), modificando temporalmente la teoría a través de

algún método de regularización (para que las divergencias se vuelvan cantidades manejables), y después renormalizando por medio de contratérminos que permiten obtener resultados finitos al retirar la regularización.

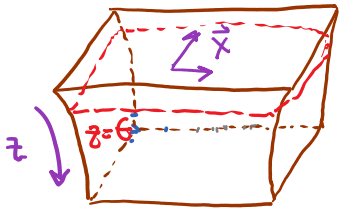


Como el problema se origina de la región $z \to 0$, es natural regularizar truncando la integral $\int_0^\infty dz$ a $\int_\epsilon^\infty dz$. Por la conexión UV/IR, esto debe corresponder básicamente a un corte UV en nuestra escala de resolución espacial de la CFT, $\ell \geq \epsilon$, o energética, $|p| \leq \Lambda \sim 1/\epsilon$, aunque preserve la invariancia de Lorentz y de norma, así que No puede ser exactamente un corte de fuerza bruta. (Recordar que al regularizar una teoría de norma, como MSYM, un corte de fuerza bruta rompe la invariancia de norma, y es por ello que normalmente recurrimos a la regularización dimensional. Lo malo es que este método solo está definido a nivel perturbativo.

El único método no perturbativo invariante de norma conocido es la regularización por retícula, el cual NO es invariante de Lorentz. Mágicamente, después de pasar a la descripción de gravedad, la correspondencia AdS/CFT nos permite implementar un método de regularización ¡que es a la vez no perturbativo, invariante de Lorentz, e invariante de norma!)

Como condición de frontera, pediremos entonces que

$$\phi(x^\mu, z) \xrightarrow[z\to\epsilon]{} \epsilon^{4-\Delta} J(x^\mu),$$



o, en espacio de momentos,

$$\tilde{\phi}(p, z) \xrightarrow[z\to\epsilon]{} \epsilon^{4-\Delta} \tilde{J}(p).$$

Mas/menos, esto equivale a insertar una fuente que no está completamente localizada, sino esparcida en una región de tamaño $\sim\epsilon$.

Usando la solución que encontramos en la p. 374,

$$\tilde{\phi}(p, z) = c'(pz)^2 K_\nu(\underbrace{pz}_{J}) \quad \text{con } \nu = \Delta - 2,$$

claramente debemos elegir $c' = \dfrac{\epsilon^{4-\Delta}\tilde{J}(p)}{(p\epsilon)^2 K_{\Delta-2}(p\epsilon)}$, y

concluimos entonces que

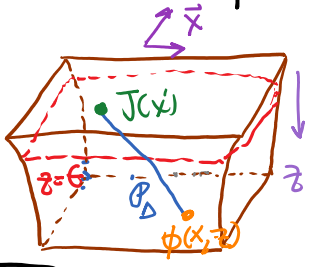
$$\tilde{\phi}(p,z) = \frac{(pz)^2 K_{\Delta-2}(pz)}{(p\epsilon)^2 K_{\Delta-2}(p\epsilon)} \epsilon^{4-\Delta} \tilde{J}(p)$$

← solución queda determinada por completo tras imponer:
① condición de borde en $z=\epsilon$ (UV)
② condición de regularidad en $z\to\infty$ (IR)

El factor que aparece frente a la fuente $\tilde{J}(p)$ se conoce como el propagador bulto-frontera (bulk-to-boundary) en espacio de momentos:

$$\tilde{P}_\Delta(p;z,\epsilon) \equiv \frac{z^2 K_{\Delta-2}(pz)}{\epsilon^2 K_{\Delta-2}(p\epsilon)} \epsilon^{4-\Delta}$$

Es una solución a la ec. de Klein-Gordon homogénea (NO una función de Green) finita en $z\to\infty$ y con la propiedad de que



$$\phi(x,z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot x} \tilde{\phi}(p,z)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot x} \tilde{P}_\Delta(p;z,\epsilon) \underbrace{\tilde{J}(p)}_{\int d^4x' e^{-ip\cdot x'} J(x')}$$

$$= \int d^4x' \underbrace{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot(x-x')} \tilde{P}_\Delta(p;z,\epsilon)}_{\equiv P_\Delta(x-x';z,\epsilon)} J(x')$$

← Núcleo (kernel) que propaga desde (x',ϵ) hasta (x,z)

propagador bulto-frontera en espacio de posiciones

$z \to \epsilon$

$$\epsilon^{4-\Delta} J(x) = \int d^4x' \, P_\Delta(x-x';\epsilon,\epsilon)\, J(x') \qquad \forall J,$$

es decir,

$$\boxed{z^{\Delta-4} P_\Delta(x-x';z,\epsilon) \xrightarrow[z\to\epsilon]{} \delta^{(4)}(x-x')}.$$

Se puede mostrar [ver p.ej. D'Hoker, Freedman] que

$$P_\Delta(x-x';z,0) = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\Gamma(\Delta-\frac{d}{2})} \left(\frac{z}{z^2+(x-x')^2} \right)^\Delta .$$

(Para $\epsilon>0$, no se tiene una expresión sencilla en espacio de posiciones.)

Con la solución $\phi^{cl}(x,z)$ en mano, podemos ahora calcular

$$S_\epsilon[\phi^{cl}[J]] = \frac{c}{2} \int_\epsilon^\infty dz \int_{-\infty}^\infty d^4x \, \sqrt{g} \left\{ g^{mn} \partial_m \phi^{cl} \partial_n \phi^{cl} + m^2 (\phi^{cl})^2 \right\}$$

$$\overset{\text{parter}}{=} \frac{c}{2} \int_\epsilon^\infty dz \int_{-\infty}^\infty d^4x \, \sqrt{g} \left\{ \underbrace{-\phi^{cl} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_m (\sqrt{g} g^{mn} \partial_n) \phi^{cl}}_{-\phi^{cl}(\Box - m^2)\phi^{cl} \to 0} + m^2 (\phi^{cl})^2 \right\}$$

$$+ \frac{c}{2} \int_\epsilon^\infty dz \int_{-\infty}^\infty d^4x \, \partial_m \left\{ \sqrt{g} g^{mn} \phi^{cl} \partial_n \phi^{cl} \right\},$$

↑ sólo contribuye z, dirección en la cual tenemos ∂AdS_5

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \sqrt{g}\, g^{zn} \phi^{cl} \partial_n \phi^{cl} \Big|_{\epsilon}^{\infty}$$

← No contribuye, por $\sqrt{g} \sim (L/z)^5$ y $\phi^{cl} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$

es decir,

$$S_\epsilon[\phi^{cl}[J]] = -\frac{c}{2} \int_{z=\epsilon} d^4x \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^5 \left(\frac{\epsilon}{L}\right)^2 \phi^{cl} \partial_z \phi^{cl},$$

$$\phi^{cl}: \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot x} \tilde{\phi}^{cl}(p,z) \qquad \partial_z \phi^{cl}: \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{ip'\cdot x} \tilde{\phi}^{cl}(p',z)$$

$$= -\frac{c}{2} \int_{z=\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+p') \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^3 \tilde{\phi}^{cl}(p,z) \partial_z \tilde{\phi}^{cl}(p',z)$$

$$\tilde{\phi}^{cl}(p,z): \left(\frac{z}{\epsilon}\right)^2 \frac{K_{\Delta-2}(pz)}{K_{\Delta-2}(p\epsilon)} \epsilon^{4-\Delta} \tilde{f}(p)$$

$$= -\frac{c}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+p') \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^3 \epsilon^{8-2\Delta-2} \frac{\tilde{f}(p)\,\tilde{f}(p')}{K_{\Delta-2}(p'\epsilon)} \partial_z \left[z^2 K_{\Delta-2}(p'z)\right]_{z=\epsilon}.$$

En espacio de momentos, el término fuente en la CFT es

$$\int d^4x\, \mathcal{O}_\Delta(x) J(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \int d^4x\, e^{i(p+p')\cdot x} \tilde{\mathcal{O}}_\Delta(p) \tilde{f}(p')$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{O}}_\Delta(p) \tilde{f}(-p),$$

martes, 20 de noviembre de 2012 07:56 p.m.

así que

$$\langle \tilde{\mathcal{O}}_\Delta(k)\tilde{\mathcal{O}}_\Delta(k')\rangle_\epsilon = (2\pi)^4\frac{\delta}{\delta\tilde{J}(-k)}(2\pi)^4\frac{\delta}{\delta\tilde{J}(-k')}\underbrace{\left\langle e^{-\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{\mathcal{O}}_\Delta(p)\tilde{J}(-p)}\right\rangle_\epsilon}_{Z^\epsilon_{CFT}[\tilde{J}]=Z^\epsilon_{AdS}[\tilde{J}]}\Bigg|_{\tilde{J}=0}$$

valor esperado en el vacío de la CFT

funcional generatriz

$$Z^\epsilon_{AdS}[\tilde{J}] = e^{-S_\epsilon[\phi^{(4)}]}$$

$$= -(2\pi)^4\delta^{(4)}(k+k')\,\underbrace{c'}\,\frac{L^3\epsilon^{3-2\Delta}}{K_{\Delta-2}(k'\epsilon)}\partial_z\left[z^2K_{\Delta-2}(k'z)\right]_{z=\epsilon}$$

esperada por conservación de momento

omitiremos

Necesitamos hacer la expansión asintótica de la función modificada de Bessel para argumento pequeño. Los detalles son distintos dependiendo de si el orden $\nu=\Delta-2$ es entero o no. El caso entero es el que más nos interesa (hemos visto que Δ para todos los operadores duales a campos bosónicos de SUGRA es entero), y para el se tiene

$$K_n(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^{-n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(-\frac{y^2}{4}\right)^m$$

$\leftarrow \mathrm{Tr}(\Phi^{\{e_1}\Phi^{e_2}\cdots\Phi^{e_k\}})$ y sus descendientes superconformes $\Delta=2,3,\ldots$

$$-\ln\left(\frac{J}{2}\right)\left(-\frac{J}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{J^2}{4}\right)^m$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{J}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty}\{\psi(m+1)+\psi(n+m+1)\}\frac{1}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{J^2}{4}\right)^m.$$

$\psi(x) \equiv \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ función digamma

La mayor parte de esta información no será necesaria para nuestros propósitos, así que nos basta con escribir

$$K_n(J) = J^{-n}(a_0 + a_1 J^2 + a_2 J^4 + \dots) + J^n \ln(J)(b_0 + b_1 J^2 + b_2 J^4 + \dots) + J^n(\dots).$$

donde $a_0 = 2^{n-1}(n-1)!$, $b_0 = -\frac{1}{(-2)^n\, n!}$.

Veamos entonces que

$$\partial_J(J^2 K_n) = J^{-n+1}\left[(-n+2)a_0 + (-n+4)a_1 J^2 + \dots\right]$$

$$+ J^{n+1}\ln(J)\left[(n+2)b_0 + (n+4)b_1 J^2 + \dots\right]$$

$$+ J^{n+1}\left[b_0 + b_1 J^2 + \dots\right].$$

Usando esta expansión y la de K_n misma, se puede mostrar que (omitiendo la delta de Dirac $(2\pi)^4\delta^{(4)}(k+k')$)

$$\langle \tilde{\mathcal{O}}_\Delta(k)\tilde{\mathcal{O}}_\Delta(-k)\rangle_\epsilon = -\frac{c'\,\epsilon^{4-2\Delta}}{\epsilon k\, K_{\Delta-2}(k\epsilon)}\partial_J\left[J^2 K_{\Delta-2}(J)\right]_{J=k\epsilon}$$

$$= \frac{C'}{\epsilon^{2\Delta-4}} \left\{ -2 + (\Delta-2)\left(1 + c_2\epsilon^2 k^2 + c_4 \epsilon^4 k^4 + \dots\right) \right.$$

$$\left. - 2(\Delta-2)\frac{b_0}{a_0}\, \epsilon^{2(\Delta-2)} k^{2(\Delta-2)} \ln(k\epsilon)\left(1 + d_2\epsilon^2 k^2 + \dots\right) \right\},$$

$\Delta \geq 2$

25 : 15/11/16

donde los coeficientes c_j, d_j son combinaciones sencillas de los a_j, b_j. Es decir,

$$\langle \tilde{\mathcal{O}}_\Delta(k)\tilde{\mathcal{O}}_\Delta(-k)\rangle_\epsilon = C\left\{ \underbrace{\frac{\Delta-4 + (\Delta-2)\left(c_2\epsilon^2k^2 + \dots + c_{2\Delta-6}\epsilon^{2\Delta-6}k^{2\Delta-6}\right)}{\epsilon^{2\Delta-4}}}_{\text{términos que divergen como potencias cuando } \epsilon\to 0} \right.$$

$$- 2(\Delta-2)\frac{b_0}{a_0} k^{2(\Delta-2)} \ln(k\epsilon)$$ ← divergencia UV logarítmica

$$\left. + \text{términos que se anulan cuando } \epsilon \to 0 \right\},$$

$\Delta - 2$

donde podemos usar $\dfrac{2n\, b_0}{a_0} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-2}(n-1)!^2} = \dfrac{(-1)^{\Delta-1}}{2^{2\Delta-6}(\Delta-3)!^2}$.

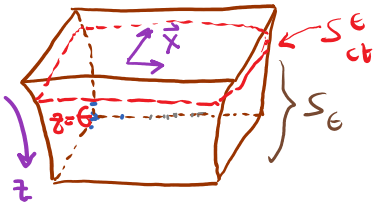
El punto importante aquí es que los términos que divergen al retirar el corte UV $\Lambda \sim 1/\epsilon \to \infty$, incluyendo la divergencia logarítmica $k^{2(\Delta-2)}\ln\epsilon$, son analíticos en k. Al transformar de vuelta al espacio

de posiciones, tenemos $k^{2m} \longrightarrow \Box^m \delta^{(4)}(x-x')$, así que estos términos solo contribuirían al correlador $\langle \mathcal{O}_\Delta(x)\mathcal{O}_\Delta(x')\rangle$ en puntos coincidentes. Por esta razón, se les conoce como términos de contacto. Este es justamente el tipo de términos que SÍ pueden ser eliminados/modificados por los contratérminos locales que uno agrega (separa) en el Lagrangiano de la teoría de campos, como parte del proceso de renormalización. Tales contratérminos involucran a los campos básicos de la CFT y/o a sus derivadas, y es por ello que solo pueden dar lugar a vértices que son polinomiales en los momentos.

Interesantemente, del lado de gravedad se puede mostrar que las divergencias UV se cancelan si uno agrega a la acción regularizada en el bulto $S_\epsilon[\phi]$ contratérminos definidos solo en la frontera $\partial_\epsilon AdS_5$ (es decir, en la superficie de corte $z=\epsilon$), construidos con el campo ϕ, sus derivadas, y la métrica inducida

$\eta_{\mu\nu}$ en caso lorentziano

$\gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{L^2}{\epsilon^2} \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ sobre $\partial_\epsilon AdS_5$:



$$S^\epsilon_{ct} \equiv c \int_{z=\epsilon} d^4x \sqrt{\gamma} \left\{ \left(\frac{4-\Delta}{2}\right)\phi^2 + \frac{1}{2(2\Delta-6)} \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi + \dots \right\}.$$

"contratérminos"

Escrita de esta forma, queda claro que S^ϵ_{ct} es invariante bajo difeos en 4 dimensiones. La acción total $S_\epsilon + S^\epsilon_{ct}$ da lugar a las mismas ecuaciones de movimiento que S_ϵ, pero no tiene divergencias IR (UV en la CFT) cuando se le evalúa en la capa de masa en el límite $\epsilon \to 0$. A este procedimiento se le conoce como renormalización holográfica [ver artículo de revisión de Skenderis, hep-th/0209067, y hep-th/0404176].

Concluimos entonces que, en el resultado que teníamos para la función de 2 puntos en la p. 383, es solo el término No analítico $k^{2(\Delta-2)} \ln k$ (que es finito cuando $\epsilon \to 0$) el que da el resultado físico (=renormalizado) en la teoría original ya sin corte UV:

$$\langle \tilde{\mathcal{O}}_\Delta(k) \tilde{\mathcal{O}}_\Delta(-k) \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} (2\pi)^8 \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(-k)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(k)} \left(e^{-S_\epsilon[\phi^{cl}] - S^\epsilon_{ct}[\phi^{cl}]} \right)_{\tilde{J}=0}$$

$$\langle \tilde{\mathcal{O}}_\Delta(k)\,\tilde{\mathcal{O}}_\Delta(-k)\rangle = c'\,\frac{(-1)^{\Delta-1}}{2^{2\Delta-6}(\Delta-3)!^2}\,k^{2(\Delta-2)}\ln k \quad .$$

Esto resulta ser [ver MAGOO] la transformada de Fourier de

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(x_1)\mathcal{O}_\Delta(x_2)\rangle = \frac{c''}{(x_1-x_2)^{2\Delta}} \quad ,$$

que tiene justamente la forma esperada en una CFT (p. 369) para el correlador de 2 puntos de un operador con dimensión Δ [Gubser, Klebanov, Polyakov; Witten]. ✓

L29 = 03/06/24

En el caso de los operadores duales al dilatón, al gravitón y sus superparejas (donde sabemos que Δ, y por tanto el correlador de 2 puntos, no recibe correcciones), es posible identificar en detalle todas las constantes de normalización (empezando por la del término de interacción entre ϕ y $\mathcal{O}$ en S_{D3}) y verificar que el resultado coincide perfectamente con el de MSYM [ver, p.ej., Gubser, Klebanov, Polyakov; Freedman, Mathur, Matusis, Rastelli; D'Hoker, Freedman, Skiba].

Con esto tenemos entonces más evidencia a favor de la correspondencia, y en particular, la primera comprobación de la receta GKPW para correladores.

Pero las funciones de 2 puntos todavía nos mantienen al nivel donde la teoría en el lado de gravedad es libre ($\leftrightarrow$ acción cuadrática $\leftrightarrow g_c \to 0$), lo cual en la teoría de norma quiere decir que estamos en el límite estricto $N_c \to \infty$.

Resulta por tanto interesante analizar las funciones de correlación de $n \geq 3$ puntos, que reflejan el efecto de las interacciones entre los distintos estados de ambas teorías. De la p.89 sabemos que (para operadores de global normalizados de tal forma que su función de 2 puntos es independiente de N_c)

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle_{\text{Gnexo}} \propto N_c^{2-n} .$$

Para $n=3$, en una CFT tenemos

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \langle \mathcal{O}_1(x_1) \rangle \langle \mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3) \rangle + \cdots + \langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3) \rangle_{\text{Gnexo}} \propto N_c^{-1},$$

(el primer término se anula para $N_c = \infty$, pero queremos ver su valor para $1 \ll N_c < \infty$)

porque $\langle \mathcal{O}_j(x) \rangle = 0$ (p. 368).

La receta GKPW nos dice que (para $\lambda, N_c \gg 1$)

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\rangle = -\frac{\delta}{\delta J_1(x_1)}\frac{\delta}{\delta J_2(x_2)}\frac{\delta}{\delta J_3(x_3)}\left(Z_{CFT}[J_1,J_2,J_3]\right)_{J_j=0},$$

$$= -\frac{\delta}{\delta J_1(x_1)}\frac{\delta}{\delta J_2(x_2)}\frac{\delta}{\delta J_3(x_3)}\left(e^{-S_{sIIB}[\phi_1^{cl}[J_1],\phi_2^{cl}[J_2],\phi_3^{cl}[J_3]]}\right)_{J_j=0},$$

posiblemente con derivadas

así que necesitaremos el término $\propto \phi_1\phi_2\phi_3$ en S_{sIIB}.

Tomemos como ejemplo el caso de 3 campos escalares ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 con masas m_j, duales a operadores $\mathcal{O}_j$ con dimensiones $\Delta_j = 2+\sqrt{4+m_j^2L^2}$, y con acción

acoplamiento $\neq g_s$

$$S = \int d^5x\sqrt{g}\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left((\partial\phi_j)^2 + m_j^2\phi_j^2\right) + g\,\phi_1\phi_2\phi_3\right\}.$$

normalización canónica

En la normalización convencional de SUGRA, los campos ϕ_j serían adimensionales, y tendríamos enfrente un factor común de $1/G_N^{(5)} \propto N_c^2$ (p. 365), con ninguna otra constante de acoplamiento en el integrando. Al pasar a la normalización canónica para los ϕ_j, $\phi_{SUGRA} \propto \sqrt{G_N^{(5)}}\,\phi_{canónico}$, encontramos entonces que $\frac{\phi^3_{SUGRA}}{G_N^{(5)}} \propto \sqrt{G_N^{(5)}}\,\phi^3_{canónico}$, por lo

≠ canónica

que el acoplamiento cúbico es $g \propto \sqrt{G_N^{(5)}} \propto N_c^{-1}$ (de modo que la teoría efectivamente se vuelve libre para $N_c \to \infty$, como esperamos).

Como primer paso, en principio tendríamos ahora que resolver las ecs. de movimiento no lineales

$$(\Box - m_1^2)\phi_1 = g\phi_2\phi_3 \quad , \text{ etc.},$$

cosa que por supuesto no podemos hacer de manera exacta. Pero dado que $g \propto 1/N_c$ es pequeño, es natural trabajar en una expansión perturbativa en potencias de g, escribiendo

(omitir el)

$$\phi_1(x,z) = \phi_1^{(0)}(x,z) + g\int dz'd^4x'\sqrt{g}\; {}_{\Delta_1}\!\mathcal{G}(x,z;x',z')\,\phi_2^{(0)}(x',z')\,\phi_3^{(0)}(x',z') + \cdots$$

(soluciones a ecs. libres)

$\equiv \phi_1^{(1)}(x,z)$

Propagador bulto-bulto (bulk-to-bulk)

tal que $(\Box_{x,z} - m_1^2)\,{}_{\Delta_1}\!\mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta(z-z')\delta^{(4)}(x-x')$

(función de Green solución normalizable)

$\equiv \phi_1^{(2)}(x,z)$

+ términos de orden g^2 (donde habría que tomar en cuenta además interacciones cuárticas en S_{SUGRA}),

y expresiones similares para ϕ_2 y ϕ_3.

De la p. 378 sabemos que para satisfacer las condiciones de frontera

$$\phi_j(x,z) \xrightarrow[z\to\epsilon]{} \epsilon^{4-\Delta_j} J_j(x)$$

podemos escribir

$$\phi_j^{(0)}(x,z) = \int d^4x' \, P_\Delta(x-x';z) \, J_j(x') \,,$$

← y entonces debe ser que $\phi_j^{(1)}$ es subdominante con respecto a $z^{4-\Delta}$

donde P_Δ es el propagador bulto-frontera (p. 379)

$$P_\Delta(x-x';z,0) = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\Gamma(\Delta-\frac{d}{2})} \left(\frac{z}{z^2+(x-x')^2} \right)^\Delta .$$

← solución homogénea (no función de Green)

Para ser más precisos, habríamos dicho que esta expresión se convierte en $z^{4-\Delta}\delta^{(4)}(x-x')$ cuando $z\to 0$, no cuando $z\to\epsilon$, así que, estrictamente, para imponer de manera correcta las condiciones de frontera en $z=\epsilon$ necesitaríamos el propagador bulto-frontera que llamamos $P_\Delta(x-x';z,\epsilon)$ en la p. 378 (y que solo conocemos en espacio de momentos). La diferencia entre ambos objetos resulta ser importante

para la función de 2 puntos [Freedman, Mathur, Matusis, Rastelli], pero no para correladores de $n \geq 3$ puntos, porque las integrales correspondientes tienen una dependencia de ϵ más benigna.)

Aunque en realidad no vamos a necesitar la forma explícita del propagador bulto-bulto, se puede mostrar [ver MAGoo] que

$$\mathcal{G}_\Delta(x,z;x',z') = C_\Delta \, \xi^{-\Delta} \, F_1\left(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta+1}{2}; \Delta+1-\frac{d}{2}; \frac{1}{\xi^\Delta}\right),$$

↑ función hipergeométrica $\propto \xi^{-\Delta}$ para $\xi \to \infty$

con

$$C_\Delta \equiv \frac{2^{-\Delta}\Gamma(\Delta)}{(2\Delta-d)\pi^{d/2}\Gamma(\Delta-\frac{d}{2})}, \qquad \xi \equiv \frac{z^2+z'^2+(x-x')^2}{2zz'}$$

"distancia conformal" (calculada en $\mathbb{R}^{d+1,2} \supset AdS_5$)

(de tal forma que la distancia geodésica $d \equiv \int ds$ entre (x,z) y (x',z') está dada por $\cosh d = \xi$). Puede mostrarse también que la relación de $\mathcal{G}_\Delta$ con el propagador bulto-frontera es

$$P_\Delta(x',z';x) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{2\Delta-d}{\Delta}\right) z^{d-\Delta} \sqrt{\gamma}\, n\cdot\partial\, \mathcal{G}_\Delta(x,z;x',z')$$

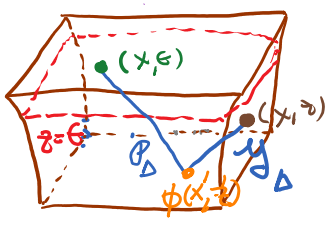
n^M vector unitario normal a ∂AdS_5, $n^M = (0, \frac{z}{L})$

↑ métrica inducida en ∂AdS_5, $\gamma_{\mu\nu} = \frac{L^2}{z^2}\delta_{\mu\nu}$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{2\Delta-d}{\Delta}\right) z^{d-\Delta}\left(\frac{L}{z}\right)^d \left(\frac{z}{L}\right) \partial_z \mathcal{G}_\Delta(x,z;x',z')$$

$\propto z^\Delta$ porque $\mathcal{G}$ tiene comportamiento normalizable

↑ si $x \neq x'$



$$= \lim_{z\to 0} \frac{L^{d-1}(2\Delta-d)}{z^{\Delta}} y_{\Delta}(x,z;x',z')$$

(lo cual puede verificarse usando la identidad de Green (se cancelan)

$$\int_{\mathcal{V}} d^{d+1}x\sqrt{g}\{\phi(\Box-m^2)\psi - \psi(\Box-m^2)\phi\} = \int_{\partial\mathcal{V}} d^d x\sqrt{\gamma}\{\phi n\cdot\partial\psi - \psi n\cdot\partial\phi\}$$

con $\mathcal{V}=\Delta d\Sigma_{d+1}$, $\phi = y_\Delta$, $\psi = \phi_\Delta$).

Ya con la solución para ϕ_j^{cl} en mano, podemos proceder al siguiente paso: sustituir en la acción. Después de integrar por partes, la acción toma la forma (omitir el; solo $m=z$ contribuye)

$$S = \int dz\, d^4x\sqrt{g}\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\phi_j\underbrace{(-\Box+m^2)\phi_j}_{=-g\phi_k\phi_\ell \text{ por ec. de mov.}} + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_m(\sqrt{g}\phi_j g^{mn}\partial_n\phi_j)\right)\right.$$

$$\left. \sum_{\substack{k,\ell\neq j\\ k\neq\ell}} + g\phi_1\phi_2\phi_3\right\}$$

$$= \int_{z=\epsilon} d^4x\sqrt{g}\,\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\phi_j g^{zz}\partial_z\phi_j - \frac{1}{2}g\int dz\, d^4x\sqrt{g}\,\phi_1\phi_2\phi_3 .$$

$\sim \underbrace{\mathcal{P}_{\Delta_j}\cdot J_j}_{\phi_j^{(0)}} + g\, y_{\Delta_j}\cdot\underbrace{\mathcal{P}_{\Delta_k}\cdot J_k}_{\phi_k^{(0)}}\underbrace{\mathcal{P}_{\Delta_\ell}\cdot J_\ell}_{\phi_\ell^{(0)}} + \dots$

Notar que esto ya NO es puramente un término de frontera.

Hay 2 maneras aquí de obtener términos proporcionales a $J_1 J_2 J_3$. Una es utilizar en el término (cuadrático) de frontera la contribución de orden g^1 en uno de los ϕ_j y de orden g^0 en el otro, p.ej.,

$$\int_{z=\epsilon} d^4x \sqrt{\gamma}\, \frac{1}{2}\, \phi_1\, \gamma^{zz}\partial_z \phi_1$$

$\phi_1^{(1)}(x)$, $\phi_2^{(0)}(x')$, $\phi_3^{(0)}(x')$

$$\supset \int_{z=\epsilon} d^4x \sqrt{\gamma}\, \frac{1}{2}\Big[g \int d^5x' \sqrt{\gamma}\, \underset{\Delta_1}{\mathcal{G}}(x;x') \int d^4x''\, \underset{\Delta_2}{\mathcal{P}}(x',x'')\, J_2(x'') \int d^4x'''\, \underset{\Delta_3}{\mathcal{P}}(x',x''')\, J_3(x''') \Big]$$

$$\gamma^{zz}\partial_z \Big[\underbrace{\int d^4x''''\, \underset{\Delta_1}{\mathcal{P}}(x,x'''')\, J_1(x'''')}_{\phi_1^{(0)}(x)} \Big] .$$

Se puede mostrar que este tipo de término NO contribuye, por tener $\mathcal{G}_\Delta$ un comportamiento normalizable cuando $z \to \epsilon$ ($\mathcal{G}_\Delta \propto \epsilon^\Delta$).

La segunda manera de obtener $J_1 J_2 J_3$ es utilizar en el término cúbico en el bulto las contribuciones de orden g^0 en cada ϕ_j (las contribuciones de orden más alto contienen más Js de las 3 que estamos buscando).

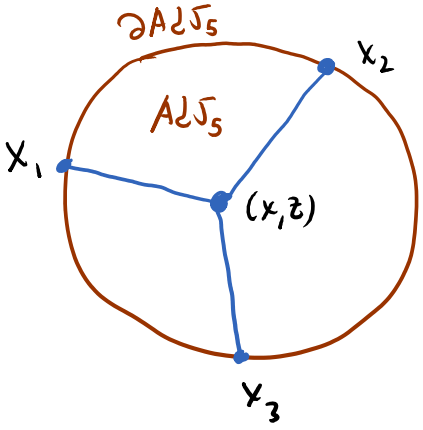
Sustituyendo en S y tomando las 3 derivadas funcionales, obtenemos entonces

$$\langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2)\mathcal{O}(x_3)\rangle$$

$$= \frac{\partial}{2}\int dz\, d^4x\, \sqrt{g}\; \mathcal{P}_{\Delta_1}(x-x_1;z)\mathcal{P}_{\Delta_2}(x-x_2;z)\mathcal{P}_{\Delta_3}(x-x_3;z),$$

↑ dependencia esperada $\propto 1/N_c$

expresión que se puede resumir diagramáticamente como



, diagrama como si fuera AdS5 global, con z saliendo de la página (pero puntos exteriores pueden estar a distinto z)

donde cada línea denota un propagador bulto-frontera, y el vértice cúbico es el que se lee de la acción original en el bulto S, con las reglas de Feynman usuales.

Usando la expresión explícita para $\mathcal{P}_\Delta$ que tenemos en la p. 390, se puede mostrar que la integral transforma de la manera esperada bajo el grupo conforme, así que obtenemos correctamente

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\rangle = \frac{1}{N_c}\,\frac{C_{123}}{|x_{12}|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|x_{13}|^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}|x_2-x_3|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}}$$

← cte. de orden N_c^0

en acuerdo con la estructura que discutimos en la p. 370. ✓

Sabemos que, en general, C_{123} puede depender de λ y N_c, pero [Lee, Minwalla, Rangamani, Seiberg] encontraron que para los primeros quivales $\mathrm{Tr}(\Phi^{\{e_1}\cdots\bar\Phi^{e_l\}})$ la cuenta en ALS ($\lambda\to\infty$) arroja exactamente el mismo resultado que en MSYM libre ($\lambda\to 0$). Esto naturalmente motivó la conjetura de que C_{123} para este tipo de operadores es independiente de λ. Cálculos en MSYM aportaron evidencia para esta conjetura [D'Hoker, Freedman, Skiba], y condujeron a otra más fuerte todavía: que C_{123} es además independiente de N_c, es decir, que las funciones de 3 puntos de primeros $\frac{1}{2}$ BPS "no se renormalizan". ← El mismo resultado a todo orden

Un correlador de 3 puntos que resulta particularmente interesante es el de las corrientes de Noether J_a^μ ($a=1,\dots,15$) asociadas a la simetría $SU(4)_R$ (p. 315), que están en el mismo multiplete superconforme que $\mathrm{Tr}(\Phi^{\{e_1}\Phi^{e_2\}})$ y $T_{\mu\nu}$.

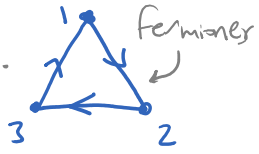
miércoles, 21 de noviembre de 2012 09:52 a.m.

En MSYM, se puede calcular a 1 loop

contracción con γ^λ

$$\langle J_a^\mu(x_1) J_b^\nu(x_2) J_c^\rho(x_3) \rangle = -\frac{N_c^2-1}{32\pi^6} i d_{abc} \frac{\mathrm{Tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \not{x}_{12} \gamma^\nu \not{x}_{23} \gamma^\rho \not{x}_{31})}{x_{12}^4 x_{23}^4 x_{31}^4}$$

$\mathrm{Tr}(\psi\bar\psi)t\ldots$



parte impar bajo paridad

(hay también una parte par)

con $d_{abc} \equiv 2\mathrm{Tr}(T_a\{T_b, T_c\})$.

generadores de $SU(4)_R$

Este correlador implica que si acoplamos estas corrientes a un campo de norma $SU(4)_R$ externo A_μ ($\neq$ campo gluónico A_μ)

fuente "J" para $O = J^\mu$

$S_{MSYM} + \int d^4x\, J^\mu A_\mu$

$SU(N_c)$

tendremos

$$\langle (D_\mu J^\mu)_a \rangle_{A_\mu} = \frac{N_c^2-1}{384\pi^2} i d_{abc} \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^b_{\mu\nu} F^c_{\rho\sigma}}_{F^b_{\mu\nu} \tilde F^{c\,\mu\nu}},$$

es decir, la corriente NO se conserva. Este efecto se conoce como la anomalía quiral (se origina del hecho de que la simetría $SU(4)_R$ en MSYM es quiral, es decir, trata distinto a los fermiones izquierdos $\psi^f \in \underline{4} = \square$ y a los derechos $\bar\psi_f \in \underline{\bar 4} = \begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix} \neq \underline{4}$).

El punto importante es que se sabe que el resultado

para la anomalía calculada a un lazo es exacto (este es el contenido del teorema de Adler-Bardeen), de modo que el cálculo en AdS está obligado a reproducirlo.

Y efectivamente, ¡lo hace! [Witten; Freedman, Mathur, Matusis, Rastelli; Chalmers, Nastase, Schalm, Siebelink; ver p.ej. MAGOO o Nastase]. El ingrediente clave es que la SUGRA normada $\mathcal{N}=8$ en AdS_5 ($\subset$ SUGRA IIB en $AdS_5 \times S^5$, ver p. 322) contiene un acoplamiento tipo Chern-Simons para el campo de norma $A^a_m(x,z)$ dual a J^μ_a:

A^a_m ← campo en el multiplete del gravitón (p. 321) cuyo valor en ∂AdS_5 es fuente para J^μ_a

$$S_{SIIB} \supset S_{YM}[A] + \underbrace{S_{CS}[A]}_{\frac{iN_c^2}{96\pi^2}\int_{AdS_5} d^5x\, \mathrm{Tr}\,(A\wedge F\wedge F) + \dots},$$

$\supset A_z F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$

que reproduce perfectamente la anomalía para $N_c \to \infty$.

Notar por cierto que $SU(4)_R$ es global en MSYM y local en CIIB.

Siempre | simetría global continua de QFT ↔ simetría local de gravedad | .
(← $J_\mu, T_{\mu\nu}$; → A_m, h_{mn})

Se puede obtener un acuerdo similar para la llamada anomalía conforme (o de Weyl), que se refiere al hecho de que una CFT ya NO tiene $\langle T_\mu{}^\mu \rangle = 0$ cuando se le acopla a una métrica externa que no es plana. En AdS, la

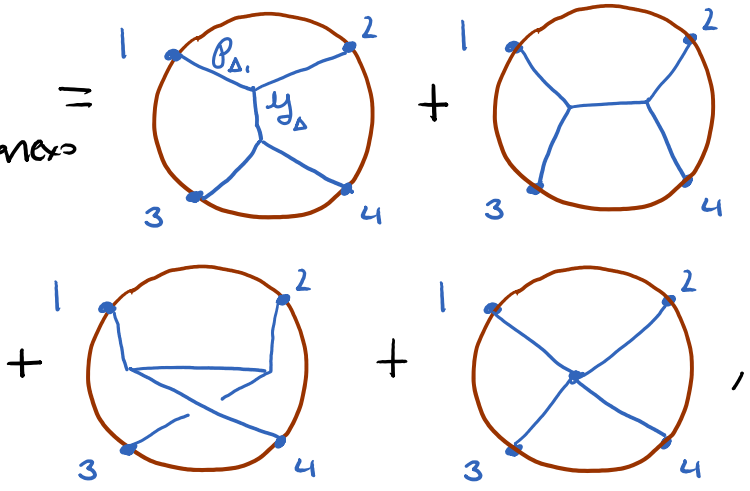
violación de $SO(4,2)$ proviene de los contratérminos S_{ct} ← grupo de isometrías

que es indispensable agregar para que los correladores de $T_{\mu\nu}$ estén bien definidos [Henningson, Skenderis].

Resulta muy impresionante que las anomalías, que son efectos netamente cuánticos en MSYM, se reproducen clásicamente en CHB. [30:05/46/24]

Para correladores de $n \geq 4$ puntos, la receta GKPW también se puede resumir gráficamente, en términos de los llamados diagramas de Witten. Pej., para $n=4$,

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_4(x_4) \rangle_{\text{conex}} =$$



donde la novedad es que empiezan a figurar el propagador bulto-bulto (para todos los campos que pueden intercambiarse) y el vértice cúbico en el bulto (si lo hay).

Los cálculos en AdS arrojan resultados compatibles con la expansión del producto de operadores (OPE) propia de la CFT,

y revelan una sorpresa: los correladores de $n \geq 4$ puntos que son "extremales" y "cuasi-extremales" no se renormalizan.

$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle$ se llama extremal si $\Delta_1 = \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$ (porque el correlador se anularía para $\Delta_1 > \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$ por teoría de reps de $SU(4)_R$, o más fácil, porque algunos campos básicos Φ^e quedarían sin contraer).

El caso cuasi-extremal (next-to-extremal) es $\Delta_1 = \Delta_2 + \ldots + \Delta_n - 2$.

El conjunto de resultados para funciones de correlación de $n \geq 2$ puntos nos da entonces varias verificaciones adicionales de la correspondencia y de la receta GKPW. En particular, nos permite comprobar que MSYM no solo contiene gravitones (y sus superpartners) como partículas que son libres en el límite $N_c \to \infty$, sino que codifica correctamente las interacciones entre estas partículas, orden por orden en la expansión perturbativa en potencias de $1/N_c$. Para $\lambda \to \infty$, las interacciones de los gravitones ($\leftrightarrow$ correladores de $T_{\mu\nu}(x)$) ¡¡en realidad son justo como dice Einstein!!

L32: 28/01/21 (Crápul desde 390, repitiendo desde 395)

Una observación útil es que, en el desarrollo asintótico

$$\phi(x,z) \underset{z\to\epsilon}{\longrightarrow} \epsilon^{d-\Delta}\left(J(x)+O(\epsilon^2)\right)+\epsilon^{\Delta}\left(V(x)+O(\epsilon^2)\right),$$

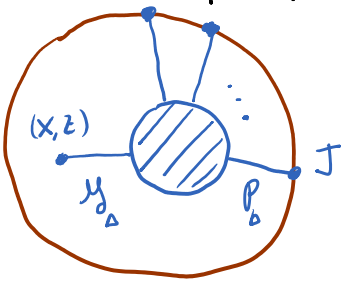
($\epsilon^{d-\Delta}$: fuente para $\mathcal{O}_\Delta$; ϵ^{Δ}: ojo: puede dominar sobre ϵ^{Δ})

el coeficiente $V(x)$ que domina en la porción normalizable tiene una interpretación física directa: los cálculos revelan que

$$\boxed{V(x)=\frac{1}{2\Delta-d}\langle \mathcal{O}(x)\rangle_J \equiv \frac{1}{2\Delta-d}\left\langle \mathcal{O}(x)\, e^{\int d^d x' \mathcal{O}(x')J(x')}\right\rangle},$$

es decir, $V(x)$ es el valor esperado del operador $\mathcal{O}$ en presencia de la fuente externa J.

Para mostrar esto, notamos que, por un lado,

$\phi(x,z) =$ 

← suma sobre diagramas con cualquier número de Js

$$= \int d^d x' dz'\, \mathcal{G}_\Delta(x',z';x,z)\, F_J(x',z'),$$

y por otro,

$$\langle \mathcal{O}(x)\rangle_J = \frac{\delta}{\delta J(x)}\left[\ Z_{AdS}[J]\ \right] = \times$$

($Z_{AdS}[J]$; suma sobre número de Js)

$$= \int d^d x' dz' \, P_\Delta(x', z'; x) \, F_J(x', z') \, .$$

Usando la relación que teníamos en las pp. 391-392,

$$y_\Delta(x', z'; x, z) \xrightarrow[z \to \epsilon]{} \frac{\epsilon^\Delta}{2\Delta - d} P_\Delta(x', z'; x) \, ,$$

encontramos entonces que

$$\lim_{z \to \epsilon} \phi(x, z) = \int d^d x' dz' \, \frac{\epsilon^\Delta}{2\Delta - d} P_\Delta(x', z'; x) F_J(x', z')$$

$$= \frac{\epsilon^\Delta}{2\Delta - d} \langle \mathcal{O}(x) \rangle_J \, ,$$

tal como prometimos.

Conocer la función de 1 punto en presencia de fuentes equivale a conocer todas las correladores:

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_J = \langle \mathcal{O}(x) \, e^{\int d^d x' \mathcal{O}(x') J(x')} \rangle$$

$$= \langle \mathcal{O}(x) \rangle + \int d^d x_1 \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(x_1) \rangle J(x_1)$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^d x_1 d^d x_2 \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle J(x_1) J(x_2) + \cdots \, ,$$

de modo que

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(x_1) \cdots \mathcal{O}(x_n) \rangle = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \left[\langle \mathcal{O}(x) \rangle_J \right]_{J=0} .$$

miércoles, 28 de noviembre de 2012 07:52 a.m.

La fórmula $\langle \tilde{O}(x) \rangle_J = (2\Delta - d)\, V(x)$ nos permite entonces deducir cualquier correlador SIN necesidad de calcular la acción en la capa de masa $S[\phi^{cl}]$. (Por esta razón, es también muy útil para el análisis de la renormalización holográfica [ver Skenderis, hep-th/0209067; skenderis, Papadimitriou, hep-th/0404176].)

[26 : 17/11/11

En la expansión asintótica

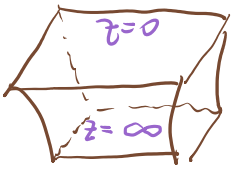
$\langle O(x) \rangle_J$ depende de J y del estado

$$\phi(x,z) \underset{z \to \epsilon}{\longrightarrow} \epsilon^{d-\Delta}\left(J(x) + O(\epsilon^2)\right) + \epsilon^{\Delta}\left(V(x) + O(\epsilon^2)\right),$$

aquí se necesita además un término $\log \epsilon$ cuando $\Delta \in \mathbb{Z}$

el hecho de que haya en un principio 2 coeficientes $J(x)$ y $V(x)$ independientes refleja la existencia de 2 soluciones independientes para la ecuación de movimiento (que es de 2do. orden). Hemos visto que, en la versión euclideana de AdS/CFT, al imponer $J(x)$ como condición de frontera en $z \to 0$ $(z \to \epsilon)$ $\underline{Y}$ el requisito de que la solución sea regular en $z \to \infty$, $\phi(x,z)$, y por tanto $V(x)$, queda determinada por completo.

Esto es justo lo que esperamos en la CFT: al trabajar en $\mathbb{R}^4$ en lugar de $\mathbb{R}^{3,1}$, el operador de evolución en el tiempo $\lim_{T\to\infty} e^{-HT}$ proyecta sobre el vacío, y la única razón por la que podríamos tener $\langle O\rangle \neq 0$ es entonces la presencia de una fuente externa J. Tiene sentido por tanto que $\langle O\rangle$ quede determinado completamente una vez que conocemos J. Si hacemos una rotación de Wick de vuelta al caso lorentziano, las condiciones de frontera en $z\to\infty$ que heredamos del cálculo euclídeo implican que estamos calculando todavía correladores en el vacío ordenados en el tiempo, así que, de nuevo, $\langle O\rangle$ está determinado por J.



Pero en la versión lorentziana es consistente también tener comportamientos distintos en el horizonte de Poincaré $z\to\infty$, lo cual equivale a decir que el comportamiento en $z\to 0$ no normalizable especificado por $J(x)$, y el sí normalizable especificado por $V(x)$, pueden considerarse como datos independientes: debemos especificar ambos por separado para estar calculando un cálculo específico.

miércoles, 28 de noviembre de 2012 08:53 a.m.

El punto es que, como dijimos en la p. 359, excitar a los modos normalizables corresponde a cambiar el estado en el que nos encontramos. Desde el punto de vista de la teoría de campos, en un estado distinto al vacío podemos tener $\langle \mathcal{O} \rangle \neq 0$ incluso en ausencia de una fuente externa. En resumen, el comportamiento no normalizable $\phi \underset{z\to\epsilon}{\to} \epsilon^{d-\Delta} J(x)$ define a la teoría (cuyas por $\int d^d x\, \mathcal{O} J$), mientras que la parte normalizable $\epsilon^{\Delta} V(x)$ especifica el estado en el que calculamos a los correladores en esa teoría (tal que $\langle \mathcal{O} \rangle_J = (2\Delta - d) V(x)$). Esto es simplemente una formulación más precisa de lo que ya habíamos afirmado en la p. 363.

Un ejemplo concreto es la expresión de la métrica en coordenadas de Fefferman-Graham ($g_{z\mu} = 0$, $g_{zz} = L^2/z^2$):

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(g_{\mu\nu}(x,z)\, dx^\mu dx^\nu + dz^2 \right),$$

$$g_{\mu\nu}(x,z) = g^{(0)}_{\mu\nu}(x) + z^2 g^{(2)}_{\mu\nu}(x) + \ldots + z^d g^{(d)}_{\mu\nu}(x) + z^d \log(z^2) h^{(d)}_{\mu\nu}(x) + \ldots,$$

$g^{(0)}$: modo no normalizable $z^{d-\Delta}$ con $\Delta = d$

$g^{(d)}$: modo normalizable z^{Δ} con $\Delta = d$

incluye $\eta_{\mu\nu}$ + deformación (fuente de $T_{\mu\nu}$)

donde $g_{\mu\nu}(x)$ es la fuente externa (total) para el operador dual $T_{\mu\nu}$, es decir, la métrica de la CFT.

Dada una elección de $g_{\mu\nu}(x)$, se puede mostrar que las ecs. de movimiento (ec. de Einstein) determinan $h^{(d)}_{\mu\nu}(x)$ (que resulta estar relacionada con la anomalía conforme) y todos los coeficientes $g^{(n)}_{\mu\nu}(x)$ EXCEPTO $g^{(d)}_{\mu\nu}(x)$. Para éste último, solo exigen que sea conservado y sin traza,

$\nabla^\mu g^{(d)}_{\mu\nu}(x) = 0$, $g^{(d)\,\mu}_{\mu} = 0$

∇ construida con $g_{\mu\nu}(x)$; índice subido con $g^{\mu\nu}(x)$; traza $= g^{(x)}_{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}$

Esto no es casual: éstas son justamente las propiedades genéricas que posee el valor esperado $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ que debe estar asociado al coeficiente $g^{(d)}_{\mu\nu}$ del modo normalizable en la métrica. La relación exacta es

$$\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{ren}}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)}\left(S_E + S_{ct}\right)$$

(Einstein; contratérminos)

$$= \frac{d\cdot L^{d-1}}{16\pi G_N^{(d+1)}}\left[g^{(d)}_{\mu\nu}(x) + X^{(d)}_{\mu\nu}(x)\right],$$

$X = 0$ si $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

← proviene de S_{ct} de renormalización holográfica

donde $X^{(d)}_{\mu\nu} = 0$ si d es impar, y para d par se define a partir de $g_{\mu\nu}$ y $g^{(n<d)}_{\mu\nu}$ [de Haro, Skenderis, Solodukhin]. P.ej.,

$$X^{(4)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{8} g_{\mu\nu}\left[(g^{(2)}_{\alpha}{}^{\alpha})^2 - g^{(2)\beta}_{\alpha} g^{(2)\alpha}_{\beta}\right] - \frac{1}{2} g^{(2)\alpha}_{\mu} g^{(2)}_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{(2)}_{\mu\nu} g^{(2)\alpha}_{\alpha}$$

(con índices subidos por $g^{\mu\nu}$).

Aprendemos entonces que basta con conocer la métrica $g_{\mu\nu}(x)$ de la CFT (especifica teoría) y el valor esperado $\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle$ (especifica estado) para poder reconstruir por completo la métrica del fondo asintóticamente AdS que es dual a la teoría en cuestión en el estado dado. (Salvo por el hecho de que puede haber obstrucciones para extender las coordenadas de Fefferman-Graham a todo el bulto.) Aplica un enunciado análogo para los otros campos $\phi(x) \leftrightarrow \mathcal{O}(x)$.

Es importante tener presente que los campos en el bulto en general están descritos por ecuaciones acopladas, así que es posible p.ej. que al encender una fuente para un operador $\mathcal{O}$ acabemos excitando también a un campo ϕ' dual a otro operador $\mathcal{O}'$.

Vale la pena enfatizar que en la receta de GKPW,

$$Z_{CFT}[J] \equiv \int \mathcal{D}A_M \cdots e^{iS_{CFT} + i\int d^dx\, \mathcal{O}(x)J(x)} = Z_{AdS}[\phi_0 = J] \overset{N_c,\lambda \gg 1}{\simeq} e^{iS_{SUGRA}[\phi_0^{cl}]},$$

$$\phi \xrightarrow[z\to 0]{} z^{d-\Delta}\phi_0$$

además de calcular correladores en nuestra CFT original (p.ej., MSYM), adquirimos la habilidad de cambiar de teoría, con el sencillo recurso de NO apagar la fuente. (Esto fue justo lo que hicimos en el caso donde cambiamos la métrica $g_{MN}(x)$.) Obtenemos entonces un nuevo ejemplo de la dualidad norma/gravedad, donde la teoría de campo está definida por la acción deformada $S_{CFT} \to S_{QFT} = S_{CFT} + \int d^dx\, J(x)\mathcal{O}(x)$. Normalmente nos interesaría tomar una fuente constante, $J(x) = \lambda$ = acoplamiento.

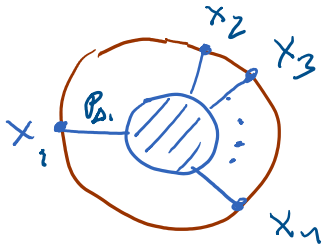
Podemos notar que $\phi(x,z) \xrightarrow[z\to 0]{} z^{d-\Delta}\phi_0(x) \to \begin{cases} 0 & \Delta < d \\ \text{finito} & \Delta = d \\ \infty & \Delta > d \end{cases}$, que tiene perfecto sentido para el UV de la QFT, donde sabemos que $\begin{cases} \Delta < d & \mathcal{O} \text{ relevante } (QFT \xrightarrow{UV} CFT) \\ \Delta = d & \mathcal{O} \text{ marginal } (QFT \overset{UV}{=} CFT) \\ \Delta > d & \mathcal{O} \text{ irrelevante } (QFT \not\to CFT) \end{cases}$.

Se conocen ejemplos explícitos con deformaciones de MSYM que (ejemplo más sencillo: $\phi(x,z) \leftrightarrow \mathcal{O}(x) = \mathcal{L}_{SYM} \Rightarrow$ cambio de g_{YM}^2)
son marginales [p.ej. Lunin, Maldacena] y relevantes, con flujo que en el IR es conforme [p.ej. Freedman, Gubser, Pilch, Warner] o confinante [p.ej. Polchinski, Strassler], en acuerdo con QFT.

[31: 10/06/14]

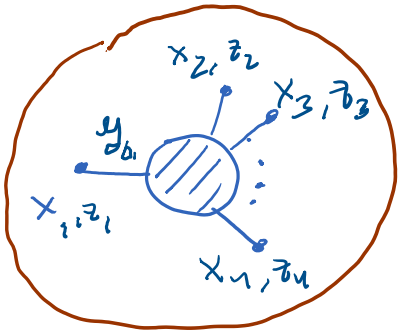
Una última observación sobre correladores. Hemos visto que

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle_{CFT} \overset{GKPW}{=}$$



y sabemos por otra parte que en la teoría gravitacional

$$\langle \phi_1(x_1,z_1)\cdots\phi_n(x_n,z_n)\rangle_{AdS} =$$



Recordando de la p. 401 que (comportamiento normalizable)

$$y_\Delta(x',z';x,z) \xrightarrow[z\to 0]{} \frac{z^\Delta}{2\Delta-d}\,\mathcal{P}_\Delta(x',z';x),$$

concluimos que

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle_{CFT} = \lim_{z_1,\dots z_n\to 0} \frac{(2\Delta_1-d)\cdots(2\Delta_n-d)}{z^{\Delta_1+\dots+\Delta_n}}\langle \phi_1(x_1,z_1)\cdots\phi_n(x_n,z_n)\rangle_{AdS}}$$

Receta BDHM: [Banks, Douglas, Horowitz, Martinec]

Esto a su vez es reflejo de la relación (extrapolate dictionary)

$$\boxed{\mathcal{O}(x) = \lim_{z\to\infty} \frac{(2\Delta-d)}{z^\Delta}\,\phi(x,z)}$$

'Diccionario extrapolado'

Para la demostración general de BDHM = GKPW, ver [Harlow, Stanford].

Ahora que ya entendemos cómo calcular del lado de gravedad los correladores de operadores locales en MSYM, recordemos que las teorías de norma tienen además un muy importante conjunto de operadores no locales.

Sabemos que el campo electromagnético se acopla a la línea de mundo $x^\mu(\tau)$ de una carga puntual a través de

$$\exp(iS_{int}) = \exp\left[i\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, \partial_\tau x^\mu(\tau)\, A_\mu(x(\tau))\right],$$

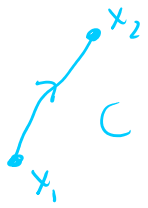
($\int dx^\mu$; $\equiv q A_\mu^{\text{canónico}}$; carga)

que bajo una transformación de norma

$$A_\mu \to A'_\mu(x) = U(x)\left(A_\mu(x) - i\partial_\mu\right)U^{-1}(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x)$$

($U \equiv e^{i\theta(x)}$; parámetro de norma)

se escribe en



$$\exp(iS'_{int}) = U(x_2)\exp(iS_{int})U^{-1}(x_1)$$
$$= e^{i\theta(x_2)}\exp\left[i\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, \dot{x}^\mu(\tau)A_\mu(x(\tau))\right]e^{-i\theta(x_1)}.$$

Similarmente, un campo de norma no abeliano se acopla a la línea de mundo de una fuente puntual a través de

$$\exp(iS_{int}) = \mathcal{P}\exp\left[i\int_C d\tau\, \dot{x}^\mu(\tau)\, A_\mu(x(\tau))\right]$$

($\mathcal{P}$: orden de camino (path ordering); generadores; $\equiv A_\mu^I t^I_{c\bar{c}}$; $\to_{SYM} A_\mu^{I\,\text{canónico}}$)

$$= 1 + i\int_C d\tau\ \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau)) + \frac{i^2}{2}\int_C d\tau \int_C d\tilde{\tau}\ \dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tilde{\tau})\, \mathcal{P}\left\{ A_\mu(x(\tau)) A_\nu(x(\tilde{\tau})) \right\} + \dots$$

$\equiv$ ordenar tal que el parámetro τ aumenta de derecha a izquierda

$$= \begin{cases} A_\mu(x(\tau))\, A_\nu(x(\tilde{\tau})) & \text{si } \tau > \tilde{\tau} \\ A_\nu(x(\tilde{\tau}))\, A_\mu(x(\tau)) & \text{si } \tilde{\tau} > \tau \end{cases}$$

donde t^I son los generadores del grupo de norma, en la representación que corresponde a la fuente (p.ej., rep fundamental si la fuente es un quark). Dado que especificamos su trayectoria clásicamente, se trata de una fuente infinitamente masiva.

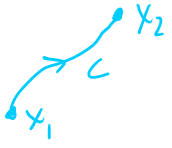
En general, el valor de esta fase depende de la curva C, y no sólo de la ubicación de los extremos x_1 y x_2.

Bajo una transformación de norma con el elemento del grupo $U(x) = \exp(i t^I \theta^I(x))$, transforma de acuerdo con

$$\exp(iS'_{int}) = U(x_2) \exp(iS_{int}) U^{-1}(x_1).$$

Esta fase se conoce como una línea de Wilson,

$$W[C] \equiv \mathcal{P} \exp\left[i\int_C d\tau\ \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau)) \right],$$



y vemos entonces que al identificar $x_1 = x_2$ y tomar la traza obtenemos un operador no local invariante de norma,

$$W[C] \equiv Tr\left\{ \mathcal{P} \exp\left[i \oint_C d\tau\, \dot{x}^\mu(\tau)\, A_\mu(x(\tau)) \right] \right\},$$

que se conoce como un lazo de Wilson.

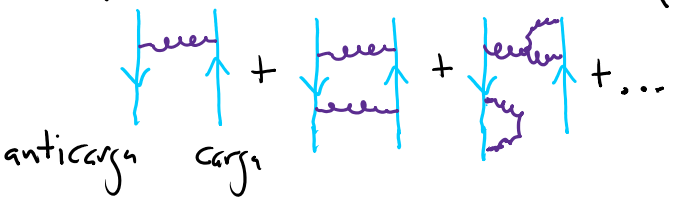
Esta es una clase muy importante de operadores. Los lazos de Wilson y sus productos forman de hecho una base completa de operadores para YM puro (es decir, el sector del campo gluónico $A_\mu(x)$ únicamente).

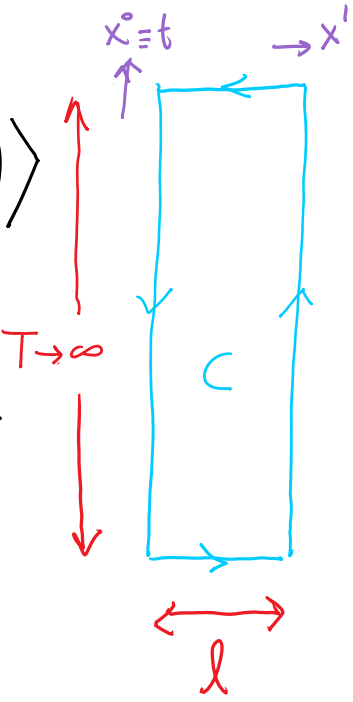
Sus valores esperados en el vacío (vevs) nos sirven para identificar la fase en la que se encuentra la teoría.

P.ej., si elegimos un contorno rectangular infinitamente largo en la dirección temporal, el vev

$$\langle W(l,T) \rangle = \left\langle Tr\left(\mathcal{P} \exp\left[i \oint_C d\tau\, \dot{x}_\mu(\tau) A_\mu(x(\tau)) \right] \right) \right\rangle$$

$$\sim \langle 1 + A^2 + A^4 + \dots \rangle$$





contiene la información sobre la energía potencial entre la carga (determinada por la representación del grupo de norma en que tomamos la traza) y la anticarga correspondiente (en la rep conjugada):

$$\langle W(\ell,T)\rangle \underset{T\to\infty}{=} \exp(-iTV(\ell)).$$

Si tomamos la representación fundamental, éste es el potencial quark-antiquark, que en la fase confinante de YM (p.54) esperamos que escale linealmente:

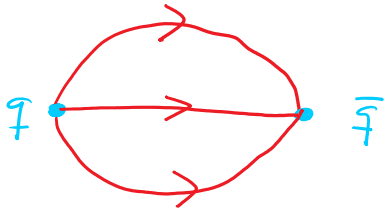
$$V_{q\bar{q}}(\ell) = \sigma\ell \quad \text{para } \ell \text{ grande (región no perturbativa)}.$$

↑ tensión del 'tubo de flujo' o 'cuerda de QCD'

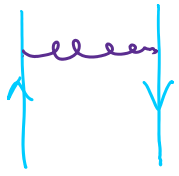
↑ muchísimos gluones autointeractuando

Por otra parte, para distancias pequeñas en YM (región perturbativa) esperamos el comportamiento Coulombiano (p.55)

$$V_{q\bar{q}}(\ell) \sim \frac{g_{YM}^2 N_c}{\ell} = \frac{\lambda}{\ell}$$



asociado al diagrama de Feynman donde el quark y antiquark intercambian 1 solo gluón.

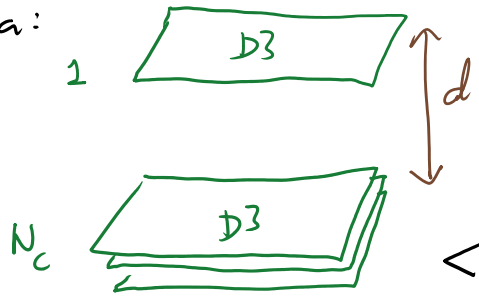


Sabemos que MSYM en $\mathbb{R}^{3,1}$ No confina, y por invariancia conforme ($\leftrightarrow$ análisis dimensional) debe tener un potencial quark-antiquark Coulombiano,

$$V_{q\bar{q}}(l) = \frac{f(\lambda, N_c)}{l} \cdot \quad \leftarrow = \lambda \text{ para } \lambda \ll 1$$

Hemos dicho que MSYM no tiene quarks dinámicos; pero este potencial se refiere a quarks externos, es decir fuentes puntuales e infinitamente masivas del campo glúonico en la representación fundamental, que agregamos a mano.

¿Cómo podríamos calcular este potencial (o lazos de Wilson más generales) en el lenguaje de CFT que nos aporta la correspondencia? Para obtener un objeto que transforme en la rep fundamental de $SU(N_c)$, podemos regresar antes del límite de Maldacena y empezar con N_c+1 D3-branas, de las cuales separamos una:

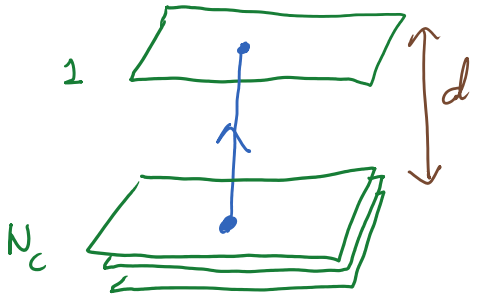


Esto se logra (p. 191) encendiendo un vev para algún de los Φ^i,

$$\langle \Phi^i \rangle = d\,\delta^i_q \,\text{diag}(\underbrace{0,0,0,\ldots}_{N_c},1),$$

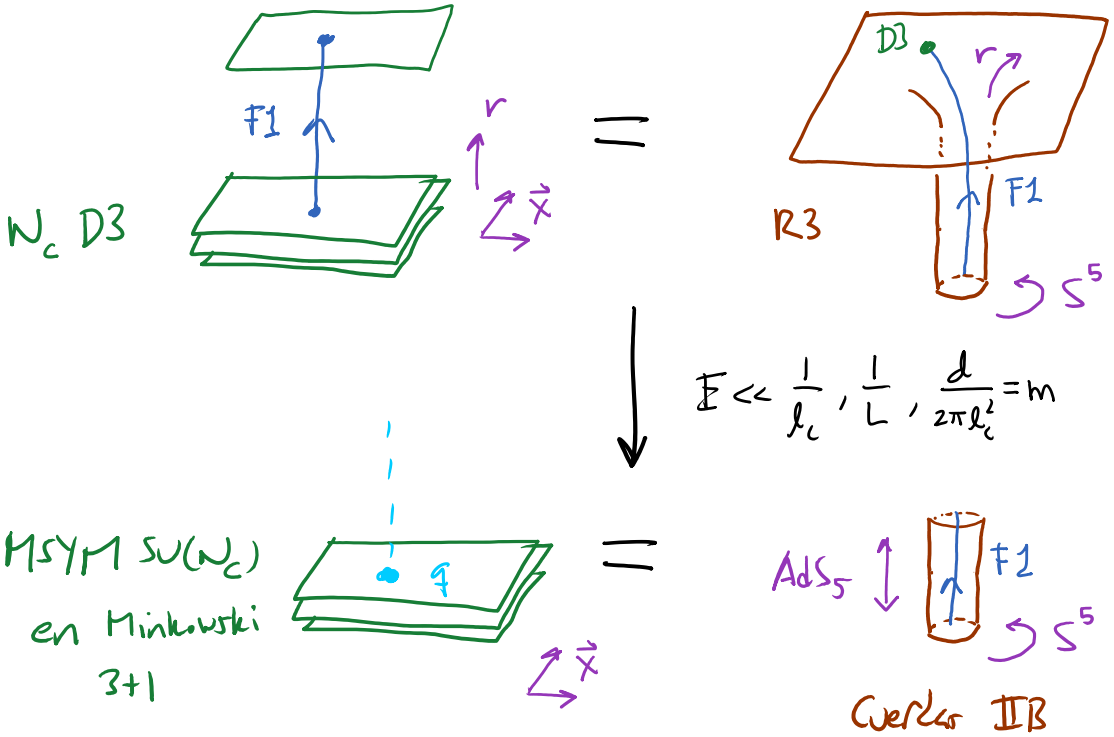
y corresponde a romper $U(N_c+1) \to U(N_c) \times U(1)$.

El estado excitado de este sistema descrito por una cuerda que se extiende de la D3 solitaria a alguna de las otras D3 tiene masa $m = \frac{d}{2\pi \ell_c^2}$ y es análogo a un bosón W.



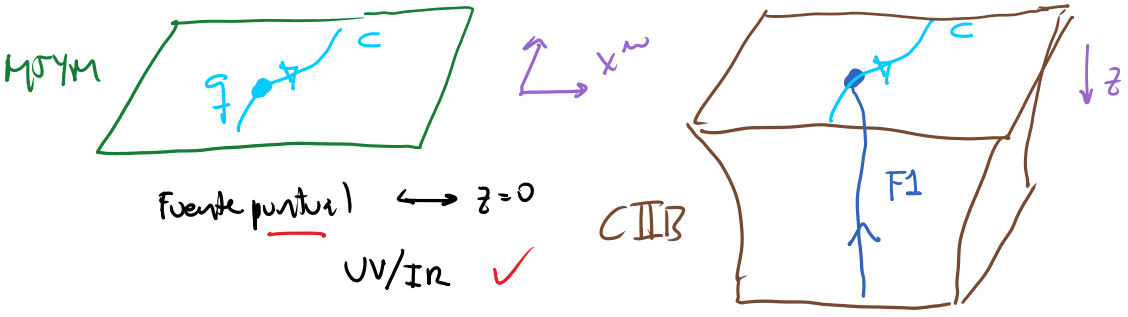
El punto de interés para nosotros es que transforma en la rep fundamental de $U(N_c)$ (o antifundamental si la cuerda tiene la orientación opuesta).

Si ahora tomamos el límite de Maldacena,



Aprendemos entonces que [Maldacena; Rey, Yee]

* Insertar un quark externo en MSYM con trayectoria C (fuente de A_μ en rep fund.) = Insertar una cuerda infinita en CIIB, cuyo extremo en ∂AdS_5 traza la curva C



Fuente puntual $\longleftrightarrow$ $z=0$

UV/IR ✓

Como consecuencia de esto, tenemos

$$\langle W[C]\rangle = \int \mathcal{D}A_\mu \cdots e^{iS_{MSYM}} W[C] = \int \mathcal{D}h_{mn} \cdots e^{iS_{CIIB}} \int_{X(z=0)=C} \mathcal{D}X^m \, e^{iS_{F1}[X]}$$

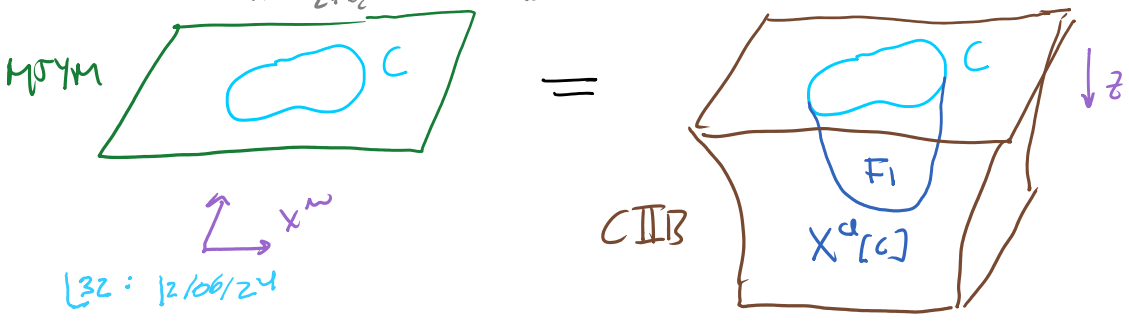
(trayectoria de la cuerda; acción de la cuerda)

que en el límite $N_c \gg 1$, $\lambda \gg 1$ se simplifica a

* $$\boxed{\langle W[C]\rangle \simeq \exp\left(i S_{F1}[X^a[C]]\right)}$$

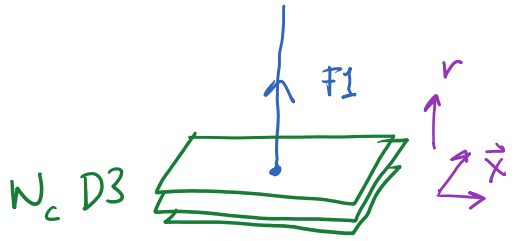
Nambu-Goto $\longrightarrow$ $S_{F1} = -\frac{1}{2\pi l_s^2}\int d^2\sigma \sqrt{-\det g_{ab}}$

$\longleftarrow$ Solución clásica (superficie de área mínima)



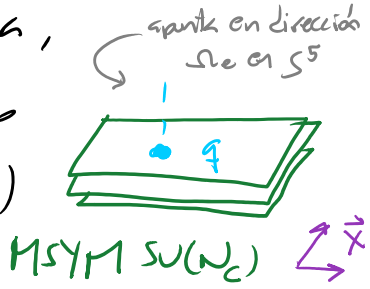
32 : 12/06/24

Un punto importante es que el extremo de una cuerda fundamental, además de acoplarse como carga puntual al campo de norma $A_\mu(x)$



sobre los D3-branas, es también una fuente puntual para el campo escalar Φ^e en la dirección específica x^{3+e} (transversal a los D3) en la que apunta la cuerda. Una manera de entender el origen de este acoplamiento es notar que bajo dualidad T (p. 171) a lo largo de $x^4, \dots, x^9$ las D3s se convierten en D5s y los Φ^e se convierten en las componentes $\mu = 3+e$ del campo de norma 10-dim $A_\mu(x)$.

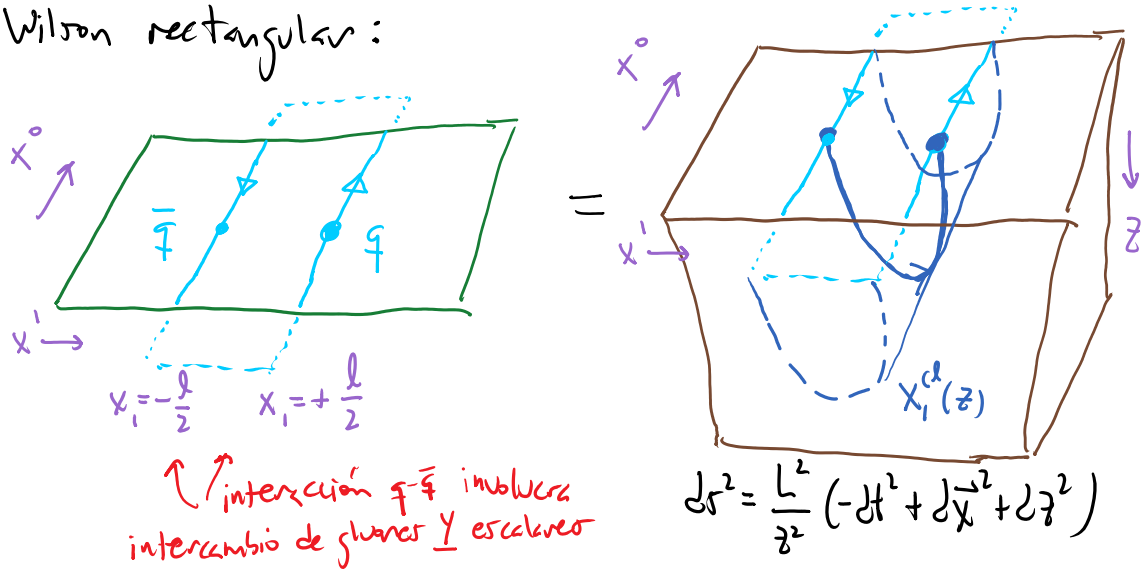
Así que, después de tomar el límite de Maldacena, concluimos que la cuerda infinita en AdS, apuntando en la dirección cartesiana Ω_e en la S^5 ($\Omega_1^2 + \dots + \Omega_6^2 = 1$) es dual a un quark que es a la vez fuente de $A_\mu(x)$ y $\Phi^e(x)$, y corresponde por tanto a la inserción del



lazo de Wilson generalizado [Maldacena; Drukker, Gross, Ooguri]

$$W[C] \equiv \mathrm{Tr}\left(\mathcal{P} \exp\left[i \int_C d\tau \left\{ \partial_\tau x^\mu A_\mu(x(\tau)) + |\partial_\tau x| \Omega_e(\tau) \Phi^e(x(\tau)) \right\} \right] \right).$$

Aplicamos esta receta al ejemplo concreto del cálculo del potencial quark-antiquark a partir de un lazo de Wilson rectangular:



↑ interacción q-$\bar{q}$ involucra intercambio de gluones Y escalares

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2\right)$$

Eligiendo la norma $\tau = t$, $\sigma = z$ sobre la hoja de mundo $X_1(t,z) = X_1(z)$, la métrica inducida es

$$g_{tt} = \underbrace{\partial_t X^m \partial_t X^n G_{mn}}_{\equiv \dot{X}^2} = -\frac{L^2}{z^2}, \quad g_{tz} = \underbrace{\dot{X}\cdot X'}_{=0}, \quad g_{zz} = \underbrace{\partial_z X^m \partial_z X^n G_{mn}}_{\equiv X'^2} = \frac{L^2}{z^2}\left(1 + X_1'^2\right),$$

y la acción de Nambu-Goto es entonces

$$S_{NG}[X] = -\frac{1}{2\pi l_c^2}\int dt\, dz \underbrace{\sqrt{-\det g_{ab}}}_{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}$$

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X}\cdot X' \\ \dot{X}\cdot X' & X'^2 \end{pmatrix}$$

este coef. valida aproximación de punto silla cuando $\lambda \gg 1$

$$= -\frac{L^2}{2\pi l_c^2}\int_{-T/2}^{T/2} dt \int \frac{dz}{z^2}\sqrt{1 + X_1'^2} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} T \int \frac{dz}{z^2}\sqrt{1 + X_1'^2}.$$

omitir el

La ecuación de movimiento para $X_1(z)$ es entonces

$$\partial_z\left(\frac{X_1'}{z^2\sqrt{1+X_1'^2}}\right)=0\ ,$$

donde vemos que, al no contener S_{NG} dependencia explícita de X_1, la densidad de momento canónico conjugado

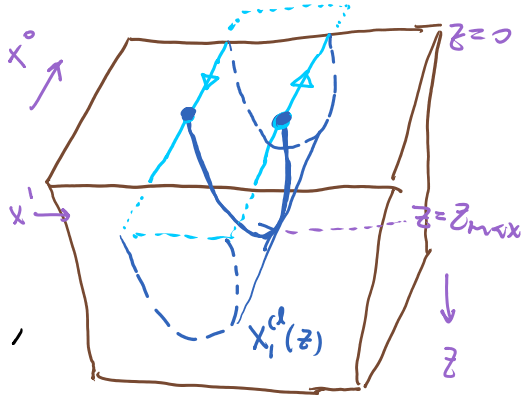
$$\Pi \equiv -\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\Pi^z_{x_1} \equiv \frac{X_1'}{z^2\sqrt{1+X_1'^2}} = \text{cte.}$$

$\frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial X_1'}$

De aquí podemos despejar $X_1' = \pm\frac{\Pi z^2}{\sqrt{1-\Pi^2 z^4}}$, (mitad izquierda/derecha de la cuerda)

que según vemos diverge en

$$z = z_{max} \equiv \frac{1}{\sqrt{\Pi}}\ .$$



Este es el punto donde la cuerda da la vuelta de regreso hacia ∂AdS_5, que por simetría ocurre en $X_1=0$.

La solución se puede reescribir entonces como

$$\frac{\partial X_1}{\partial z} = \pm\frac{z^2}{\sqrt{z_{max}^4 - z^4}}$$

y por tanto (usando $X_1(z=z_{max})=0$, $X_1(z=0)=\pm\frac{l}{2}$

$$\frac{l}{2} = \int_0^{z_{max}} dz \, \frac{\partial X_1}{\partial z} = \int_0^{z_{max}} dz \, \frac{z^2}{\sqrt{z_{max}^4 - z^4}} \, .$$

Esta ecuación determina el punto de máxima profundidad de la cuerda, z_{max}, como función de la separación l del quark y el antiquark, que es también la separación de los extremos de la cuerda. Definiendo $y \equiv z/z_{max}$, la relación es

$$\frac{l}{2} = z_{max} \underbrace{\int_0^1 dy \, \frac{y^2}{\sqrt{1-y^4}}}_{\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2}}$$

$l \propto z_{max}$ es consistente con UV/IR y con isometría $(x^\mu, z) \to (s x^\mu, s z)$. ✓

Al sustituir la solución $X_1' = \pm \frac{z^2}{\sqrt{z_{max}^4 - z^4}}$ en la acción, obtenemos

$$S_{NG} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} T \int \frac{dz}{z^2} \sqrt{1 + X_1'^2} = -T \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} 2 \int_0^{z_{max}} dz \, \frac{z_{max}^2}{z^2 \sqrt{z_{max}^4 - z^4}} \, ,$$

integral que es claramente divergente en el límite de integración inferior, $z = 0$. (por mitad derecha e izquierda)

Esto no debe sorprendernos: S_{NG} calcula el área de la hoja de mundo de la cuerda, que, además de ser proporcional

a $T \to \infty$, es infinita en la región cercana a la frontera de AdS. Esto va de la mano de que el propio lazo de Wilson $\langle W[C] \rangle$ que se supone que estamos calculando tiene divergencias UV.

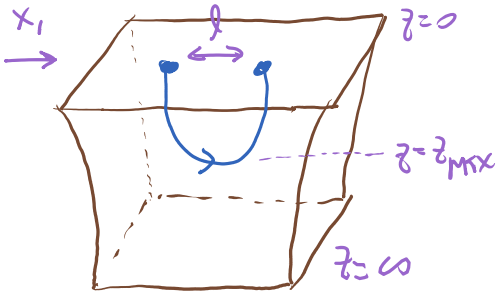
Es útil entender el origen físico de esta divergencia desde una perspectiva ligeramente distinta. Nuestro principal interés en este cálculo es que, según la correspondencia, nos permitirá obtener el potencial quark-antiquark, es decir, la energía de ligad entre estas 2 fuentes externas del campo gluónico. A partir de S_{NG}, la energía de la cuerda está dada por

$$E = \int d\tau \left(\Pi^t_{X_1} \dot{X}_1 - \mathcal{L}_{NG} \right)$$

$$\Pi^t_{X_1} = \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}_1} \qquad \mathcal{L}_{NG} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{1}{z^2} \sqrt{1 - \dot{X}_1^2 + X_1'^2}$$

que en nuestra situación estática ($\dot{X}_1 = 0$) coincide con (menos) el lagrangiano,

$$E(l) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} 2 \int_0^{z_{max}} dz \, \frac{z_{max}^2}{z^2 \sqrt{z_{max}^4 - z^4}}.$$

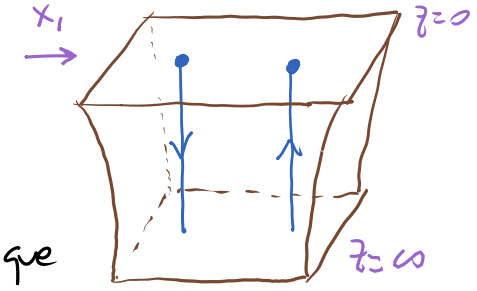


Si regularizamos omitiendo como antes la región UV $0 \le z < \epsilon$,

vemos que

$$E(\ell) = 2\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) = 2\frac{1}{2\pi\ell_c^2}\frac{L^2}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad ,$$

$$z_{max} \to \infty \qquad E(\ell \to \infty) = 2\frac{1}{2\pi\ell_c^2}\int_\epsilon^\infty dz\,\frac{L^2}{z^2}$$



Es decir, la divergencia se debe a que $E(\ell)$ incluye la energía de 2 cuerdas estáticas aisladas, que corresponde a la energía (masa) del quark y el antiquark desligados.

Lo que nos interesa, el potencial quark-antiquark, es por definición la energía de ligado entre el quark y el antiquark,

$$V_{q\bar{q}}(\ell) = E(\ell) - E_q - E_{\bar{q}} = E(\ell) - 2m_q \qquad \leftarrow \text{IMPORTANTE: independiente de } \ell$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\,2\left\{\int_0^{z_{max}} dz\,\frac{z_{max}^2}{z^2\sqrt{z_{max}^4 - z^4}} - \int_0^\infty dz\,\frac{1}{z^2}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\,2\left\{\int_0^{z_{max}} \frac{dz}{z^2}\left(\frac{z_{max}^2}{\sqrt{z_{max}^4 - z^4}} - 1\right) - \int_{z_{max}}^\infty \frac{dz}{z^2}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\,\frac{2}{z_{max}}\underbrace{\left\{\int_0^1 \frac{dy}{y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^4}} - 1\right) - 1\right\}}_{-\frac{\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2}} .$$

Juntando esto con la relación entre z_{max} y ℓ que dedujimos en la p. 418, obtenemos finalmente

$$V_{q\bar{q}}(\ell) = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(\frac{1}{4})^4}\frac{\sqrt{\lambda}}{\ell}$$

← después de renormalizar

(y $\langle W[C]\rangle = \exp(-iTV_{q\bar{q}})$).

Una sustracción similar resulta necesaria para obtener resultados finitos en el caso de otros lazos de Wilson. En [Drukker, Gross, Ooguri, hep-th/9904191] se mostró que es posible entender esta sustracción a través de la adición de términos de frontera a la acción de la cuerda, en el espíritu de la renormalización holográfica. (En conjunto, el lazo de Wilson se acaba calculando entonces no directamente con el área S_{NG} de la hoja de mundo, sino con una cierta transformada de Legendre.)

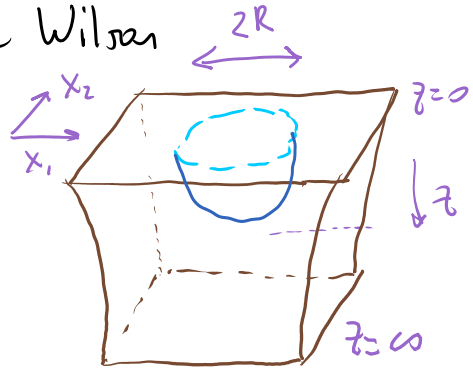
El resultado que arroja la correspondencia para el potencial quark-antiquark tiene la dependencia Coulombiana que esperábamos por la invariancia conforme ✓, y predice que cuando $\lambda \gg 1$ la dependencia perturbativa $V_{q\bar{q}} \propto \lambda$ se reemplaza por $\sqrt{\lambda}$.

Esta dependencia es genérica para cualquier lazo de Wilson en el límite $N_c, \lambda \gg 1$, porque proviene directamente de la acción de la cuerda, $\frac{1}{2\pi\ell_c^2}\int d^2\sigma \sqrt{-\det g_{ab}} \propto \frac{L^2}{\ell_c^2} = \sqrt{\lambda}$.

P.ej., en el caso de un lazo de Wilson circular de radio R, la solución

$$z(\rho,\varphi) = \sqrt{R^2-\rho^2}$$

↑ coords. polares en plano x^1-x^2



fue encontrada por [Berenstein, Corrado, Fischler, Maldacena; Drukker, Gross, Ooguri], y conduce al resultado

$$\langle W_0 \rangle = e^{\sqrt{\lambda}} .$$

(Por invariancia conforme, NO puede haber dependencia del radio R del círculo.)

Esta dependencia del acoplamiento pareció misteriosa hasta que [Erickson, Semenoff y Zarembo] mostraron que en un cálculo perturbativo, al sumar cierta clase infinita de diagramas de Feynman se obtiene

$$\langle W_0 \rangle \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/4)^n}{n!(n+1)!} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) \overset{\lambda>>1}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{\sqrt{\lambda}}}{\lambda^{3/4}} ,$$

y conjeturaron que los demás diagramas no contribuyen. Posteriormente [Drukker, Gross] fundamentaron mejor esta propuesta y la extendieron sustancialmente, llegando a argumentar/conjeturar que el cálculo del lazo de Wilson

circular se puede realizar de manera exacta a través de un cierto modelo matricial cuántico, obteniendo

$$\langle W_0 \rangle = \frac{1}{N_c} L^1_{N_c-1}\left(-\frac{\lambda}{4N}\right) e^{\lambda/8N_c} .$$

polinomio de Laguerre $L_n^m(x) \equiv \frac{1}{n!} e^x x^{-m} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(e^{-x} x^{n+m}\right)$

Años después [Pestun] demostró (usando la técnica conocida como "localización") que la propuesta de [Drukker, Gross] es correcta, ¡¡de modo que se tiene un resultado válido para cualquier valor de λ y N_c!! Cuando N_c es grande se tiene la expansión

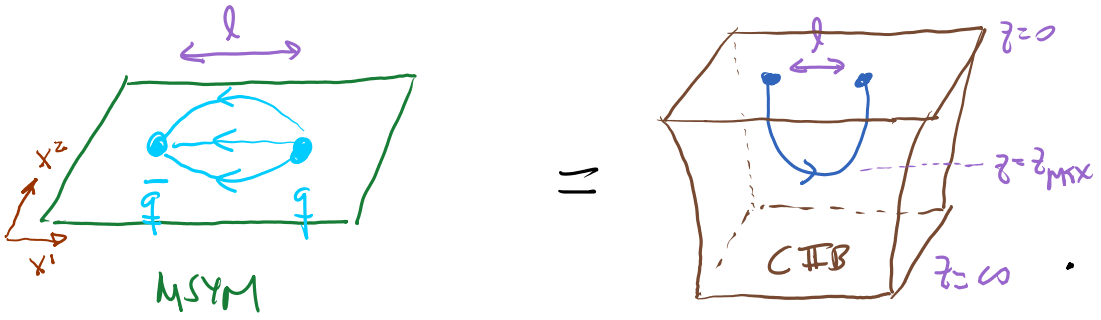
¡Información exacta sobre gravedad cuántica! ¿pero cómo interpretarla?

$$\langle W_0 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) + \frac{\lambda}{48 N_c^2} I_2(\sqrt{\lambda}) + \frac{\lambda^2}{1280 N_c^4} I_4(\sqrt{\lambda}) + \ldots$$

con lo cual se recupera en particular la propuesta de [Erickson, Semenoff, Zarembo] cuando $N_c \to \infty$. ✓

Vale la pena resaltar que para el cálculo de lazos de Wilson resulta crucial que la teoría dual a MSYM no es simplemente una teoría de gravedad, sino específicamente una teoría de cuerdas. De la receta, y en particular, de nuestro cálculo del lazo de Wilson rectangular, queda claro

que los extremos de la cuerda son directamente duales al quarks y el antiquarks, mientras que el cuerpo de la cuerda representa el perfil del campo gluónico (y escalar) generado por ellos:



Esta es una implementación muy explícita de la idea de la "cuerda de QCD" como tubo de flujo del campo gluónico (pp. 55-56), con 3 grandes sorpresas:

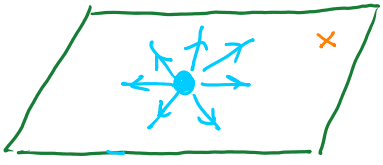
- ¡La cuerda vive en más dimensiones!
- ¡La cuerda existe incluso en teorías que no confinan! (Una cuerda en Minkowski inevitablemente da lugar a un potencial confinante. Hemos visto que, gracias a la manera en que está curvada AdS, a la cuerda le conviene energéticamente internarse más y más en el bulto conforme sus extremos se separan, y es por ello que obtuvimos un potencial Coulombiano.)
- ¡La cuerda no es gorda, sino infinitesimalmente delgada!

(Por la conexión UV/IR, la caída del perfil del campo glueónico que la cuerda representa se refleja en la profundidad radial $z \sim d$ que la cuerda alcanza en sus varios puntos. El hecho de que la cuerda tenga la tendencia a descender / caer hacia el interior de AdS expresa entonces el hecho de que, en una CFT, el 'tubo' de flujo no se mantiene colimado, sino que tiende a esparcirse [García, Guijosa, Rubio].)

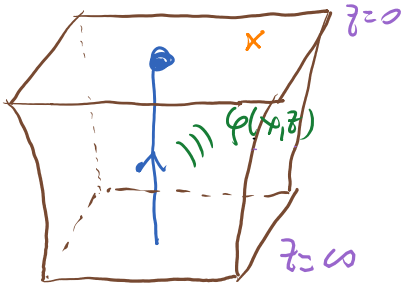
Es posible extraer el perfil detallado del campo glueónico (+ escalar) que la cuerda edifica, a través del cálculo de funciones de 1 o más puntos de operadores locales $\mathcal{O}(x)$ en presencia del quark y/o antiquark (es decir, con la inserción de la línea o el lazo de Wilson correspondiente).

P.ej., para el caso de un quark aislado y estático,

$\langle \mathrm{Tr}\{F^2(x) + \ldots\} \rangle_q$



$=$



.

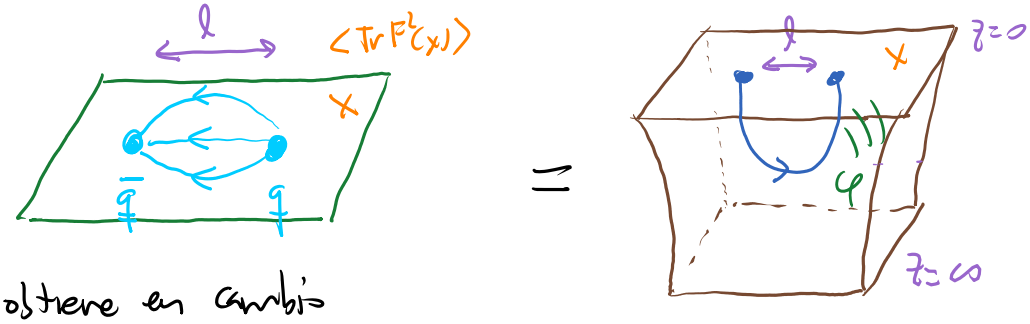
la receta GKPW conduce a

$$\langle \mathrm{Tr}\, F^2(x) \rangle_q \equiv \left\langle \mathrm{Tr}\, F^2(x)\, \mathrm{Tr}\left[P e^{i\int_C d\tau \dot{x}\cdot A + \ldots} \right] \right\rangle \propto \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^3}\, \partial_z \varphi(x,z)$$

a partir de lo cual se obtiene el resultado

$$\langle \mathrm{Tr}\{F^2(t,\vec{x})+\dots\}\rangle_{q\bar{q}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{32\pi^2|\vec{x}|^4}\,, \qquad \text{[Danielsson, Kruczenski, Keski-Vakkuri]}$$

que tal como esperamos, es Coulombiano. En el caso de un par quark-antiquark estático,



se obtiene en cambio

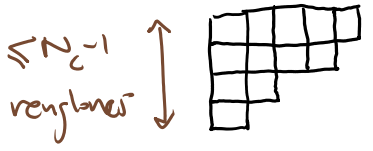
$$\langle \mathrm{Tr}\{F^2(t,\vec{x})+\dots\}\rangle_{q\bar{q}} \underset{|\vec{x}|\gg\ell}{=} \frac{15\,\Gamma(\frac{1}{4})^4}{8(2\pi)^5}\,\frac{\sqrt{\lambda}\,\ell^3}{|\vec{x}|^7} \qquad \text{[Gallan, Güijosa]}$$

que difiere de la dependencia dipolar usual $\ell^2/|\vec{x}|^6$ en electro (por efecto del límite planar, según lograron entender más adelante [Klebanov, Maldacena, Thorne] ✓).

Se ha podido también estudiar el caso de un quark acelerado [Gallan, Güijosa; Athanasiou, Liu, Rajagopal, Wiedemann], e incluso con trayectoria arbitraria [Mikhailov; Chernicoff, García, Güijosa; Hatta, Iancu, Mueller, Triantafyllopoulos; Chernicoff, Güijosa, Pedraza], que resulta interesante porque incluye efectos

de radiación glueónica (y escalar) en nuestra teoría de campo fuertemente acoplada, y se encuentran varias características interesantes [ver 1101.0872].

También es interesante preguntarse cuál es la descripción gravitacional de lazos de Wilson en representaciones de $SU(N_c)$ distintas a la fundamental, $\square = N_c$ caracterizadas por algún diagrama de Young genérico (p.3-1)



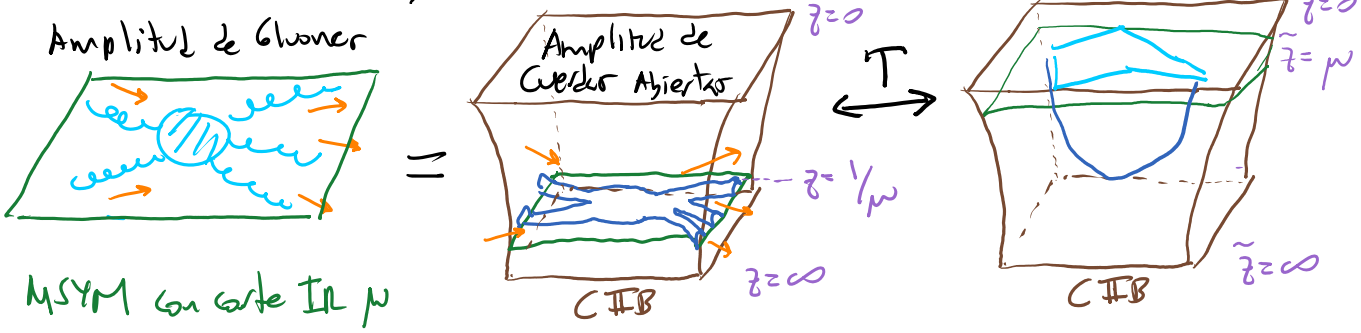
con $k = n_1 + n_2 + \ldots$ cajas en total.

La fuente es entonces lo que llamaríamos un k-quark en la representación dada. Una comprobación notable de la correspondencia es que CIIB justamente contiene objetos con las propiedades adecuadas para ser duales a estos k-quarks: ¡se trata de D3-branes y/o D5-branes con k unidades de flujo eléctrico! [Drukker, Fiol; Hartnoll, Premkumar; Yamaguchi; Gomis, Passerini]

(estado ligado de k cuerdas)

Otro tema relacionado, en el que lamentablemente no tendremos tiempo de detenernos, es el cálculo de amplitudes de dispersión de gluones en MSYM. Hemos dicho que en una

CFT, en sentido estricto, no existen partículas ni amplitudes de dispersión, porque no hay ninguna escala de masa, y los modos no masivos dan lugar a divergencias IR. Pero es posible introducir un corte IR μ y pensar en amplitudes de gluones como paso intermedio para calcular observables que sí sean finitos cuando $\mu \to 0$. La manera de hacer esto en el lenguaje de gravedad fue descrita por [Alday, Maldacena]: un gluón D3 corresponde a una cuerda en AdS con gravitón extremo en $z \to \infty$, y regularizando con una D3 de corte en $z = 1/\mu$, tenemos entonces



MSYM con corte IR μ

A través de una versión generalizada de dualidad T (válida solo para $N_c \to \infty$ [Berkovits, Maldacena]), esto se convierte en el cálculo de un lazo de Wilson poligonal y nulo [Alday, Maldacena], relación que se puede verificar en MSYM y ha resultado muy útil: revela simetrías escondidas y un nuevo entendimiento de las amplitudes.

[Ver Roiban 1012.4001, Alday 1012.4003, Dixon 1105.0771, Arkani-Hamed 1312.2007]

L33: 17/06/24 (Con 20 min extra)

3. AdS/CFT a Temperatura Finita

Para MSYM en Minkowski, $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, al encender una temperatura finita T (es decir, considerar ya no el vacío, sino un ensamble canónico, descrito por la matriz de densidad térmica $\rho \propto e^{-\beta H}$, con $\beta \equiv T^{-1}$), obtenemos un plasma de gluones, escalares y gluinos (AGP), que como mencionamos al principio del curso, sirve como modelo de juguete para el plasma de quarks y gluones (QGP) del mundo real. (materia adjunta)

Este plasma es homogéneo e isotrópico, pero no invariante bajo empujones, y da lugar a un valor esperado para el tensor de energía-momento que, en un marco de referencia donde el plasma está en reposo, toma la forma

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_T = \mathrm{diag}(\varepsilon, p, p, p) .$$

(ε: densidad de energía; p: presión)

La invariancia conforme implica que $\varepsilon = cT^4$ (por (alguna constante)

análisis dimensional), y además $p = \mathcal{E}/3$, para garantizar que $\langle T_\mu{}^\mu \rangle = 0$. (Bajo una transformación de Weyl $\delta g_{\mu\nu} = \delta\omega\, g_{\mu\nu}$, el cambio en la función de partición es $\delta Z = \delta g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} Z \propto \delta\omega\, g_{\mu\nu} \langle T^{\mu\nu} \rangle \propto \langle T_\mu{}^\mu \rangle$, que debe anularse si la teoría es invariante de Weyl. Este es el caso si $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, aunque más en general hay una anomalía.)

Según lo que vimos en el capítulo anterior, con esta información nos basta para determinar el fondo de gravedad dual al plasma de esta CFT: usando (p. 405)

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{4L^3}{16\pi G_N^{(5)}} g^{(4)}_{\mu\nu}(x) = \frac{N_c^2}{8\pi^2 L^3} 4L^3 g^{(4)}_{\mu\nu}(x) = \frac{N_c^2}{2\pi^2} g^{(4)}_{\mu\nu}(x),$$

(p. 365)

escribimos (p. 404) $ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(g_{\mu\nu}(x,z)\, dx^\mu dx^\nu + dz^2 \right)$,

con $g_{\mu\nu}(x,z) = \eta_{\mu\nu} + z^2 g^{(2)}_{\mu\nu}(x) + z^4 \frac{2\pi^2}{N_c^2} cT^4 \,\mathrm{diag}(1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})$

$$+ z^4 \log(z^2) h^{(4)}_{\mu\nu}(x) + z^6 g^{(6)}_{\mu\nu}(x) + \cdots,$$

y determinamos los coeficientes $g^{(n\neq 4)}_{\mu\nu}$ y $h^{(4)}_{\mu\nu}$ resolviendo

la ecuación de Einstein (con constante cosmológica $\Lambda = -6/L^2$).

El resultado es ($\frac{d(d-1)}{2}$)

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left[-\frac{\left(1-\frac{z^4}{4z_h^4}\right)^2}{\left(1+\frac{z^4}{4z_h^4}\right)} dt^2 + \left(1+\frac{z^4}{4z_h^4}\right) d\vec{x}^2 + dz^2 \right],$$

← Notar que no hay término logarítmico ($h_{\mu\nu}^{(4)} = 0$ porque con $J_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ no hay anomalía de Weyl)

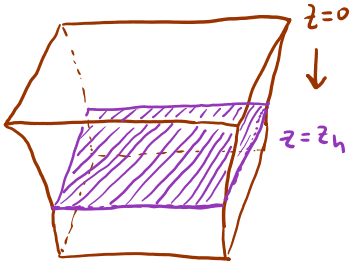
con

$$\frac{1}{4z_h^4} \equiv \frac{2\pi^2}{3N_c^2} c T^4 .$$

Esta métrica tiene un horizonte de eventos en $z = \sqrt{2}\, z_h$ (donde $g_{tt} = 0$). Podemos ponerla en una forma más reconocible si redefinimos la coordenada radial

$$z \to z' \equiv \frac{z}{\sqrt{1+\frac{z^4}{z_h^4}}} .$$

← no coordenadas de Fefferman-Graham



Omitiendo la prima en z', esto conduce a

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(-\left(1-\frac{z^4}{z_h^4}\right) dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{\left(1-\frac{z^4}{z_h^4}\right)} \right),$$

que es el agujero negro de Schwarzschild anti-de Sitter (Schw-AdS). Para ser más precisos, el horizonte tiene

topología $\mathbb{R}^3 \times S^5$, así que en realidad se trata de una 3-brana negra Schw-AdS, también conocida como el agujero negro plano Schw-AdS (que puede pensarse como el límite donde el agujero negro de Schw-AdS usual, con horizonte esférico S^3, se vuelve grande, de modo que no depende de las coordenadas $\vec{x}$ en la cuña de Poincaré).

Si hacemos una rotación de Wick en esta métrica, $-dt^2 \to dt_E^2$ y examinamos la región cercana a $z = z_h$,

$$z \equiv z_h - \frac{y^2}{4} \quad \text{con} \quad y^2 \ll z_h ,$$

(donde estamos definiendo y de tal modo que $\frac{dz^2}{1 - z^4/z_h^4} \propto dy^2$,) obtenemos

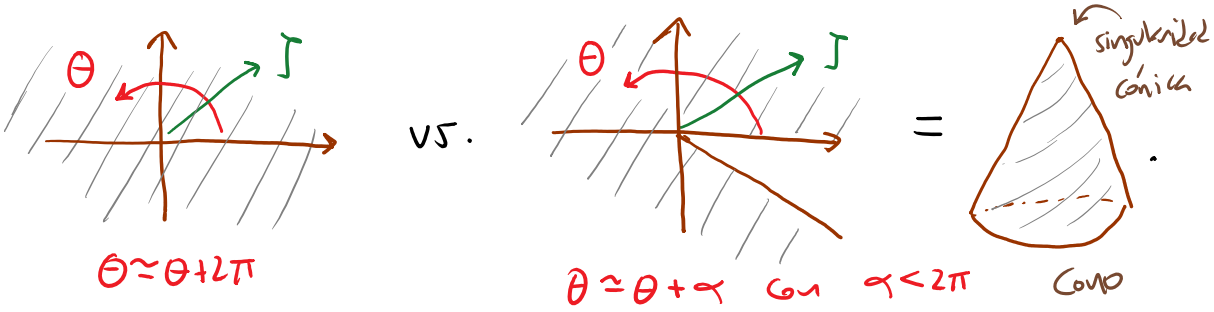
$$ds^2 = \frac{L^2}{z_h^2}\left[\frac{y^2}{z_h} dt_E^2 + \frac{z_h}{4} dy^2 + d\vec{x}^2 \right]$$

$$= \frac{L^2}{z_h^2}\left[\frac{z_h}{4}\left(\frac{4y^2}{z_h^2} dt_E^2 + dy^2 \right) + d\vec{x}^2 \right].$$

geometría plana $\longrightarrow$ $y^2 d\theta^2 + dy^2$ con $\theta \equiv \frac{2t_E}{z_h}$.

Vemos aquí que el lugar $y = 0$ ($z = z_h$) donde está el

horizonte de la versión lorentziana de la geometría es ahora simplemente el origen de un sistema de coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$ ($\times \mathbb{R}^3 \times S^5$). Pero para que esta métrica euclídea no sea singular en $J=0$, necesitamos entonces tener la identificación periódica $\theta \simeq \theta + 2\pi$, pues de otro modo habría un ángulo de déficit (o superávit):



Estamos obligados entonces a identificar

$$t_E \simeq t_E + \pi \beta_h ,$$

tanto en el lado de AdS como en la CFT. Esto último no nos sorprende: sabemos que en una teoría de campo (3+1)-dimensional, la función de partición térmica

$$Z \equiv Tr\left(e^{-\beta H}\right) = \sum_i \langle E_i | e^{-\beta H} | E_i \rangle = \sum_i e^{-\beta E_i}$$

($\beta = 1/T$)

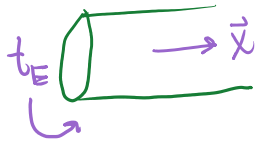
$$= \int \mathcal{D}\Phi(\vec{x}) \underbrace{\langle \Phi(\vec{x}) | e^{-\beta H} | \Phi(\vec{x}) \rangle}$$

← base donde el campo tiene un perfil definido (análoga a $|\vec{x}\rangle$)

= evolución durante intervalo temporal $-i\beta$, de estado inicial $|\Phi(\vec{x})\rangle$ al mismo estado final

$$= \int \mathcal{D}\Phi(t_E, \vec{x})\, e^{-S_E[\Phi]}$$

$t_E \simeq t_E + \beta$



con $\Phi(t_E+\beta, \vec{x}) = \pm \Phi(t_E, \vec{x})$ si Φ es bosónico / fermiónico .

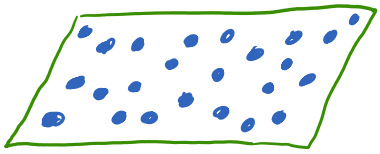
↖ [ver p.ej. Polchinski vol. 1, Apéndice A]

Así que el hecho de que t_E esté obligado a ser periódico es justo lo que esperemos como resultado de la temperatura finita. A partir de la periodicidad específica que arrojó el cálculo de arriba podemos deducir que $\beta = \pi z_h$.

En otras palabras, el anterior es un método (un atajo) para determinar la temperatura de Hawking (↔ gravedad superficial K_s, p. 139) del agujero negro,

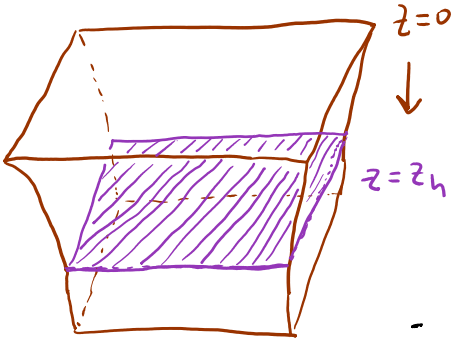
$$\boxed{T = \frac{1}{\pi z_h}},$$

que identificamos con la temperatura del plasma:



AGP en MSYM
a temperatura T

=



Schw-AdS (plano)
con $z_h = 1/\pi T$

Pero antes (p. 431) habíamos dicho que

$$\frac{1}{4z_h^4} \equiv \frac{2\pi^2}{3N_c^2} c T^4 ,$$

así que podemos concluir que $c = \frac{3}{8}\pi^2 N_c^2$, es decir, en presencia del plasma tenemos

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \text{diag}(\mathcal{E}, p, p, p)$$
$$\text{con} \quad \mathcal{E} = \frac{3\pi^2}{8} N_c^2 T^4 , \quad p = \frac{\pi^2}{8} N_c^2 T^4 .$$

Esta es entonces una predicción de la correspondencia para la densidad de energía del plasma térmico de MSYM en el régimen de acoplamiento fuerte ($\lambda \to \infty$) y muchos colores ($N_c \to \infty$).

Vale la pena resaltar que llegamos exactamente a este mismo fondo dual (y predicción para $\mathcal{E}, p$) si regresamos antes del límite de Maldacena y excitamos ligeramente a los N_c D3-branas (de manera homogénea e isotrópica), sabiendo que ello equivale a considerar la 3-brana negra cuasi-extremal (p. 162)

$$ds^2 = H(r)^{-1/2}\left(-f(r)dt^2 + d\vec{x}^2\right) + H(r)^{1/2}\left(\frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_5^2\right),$$

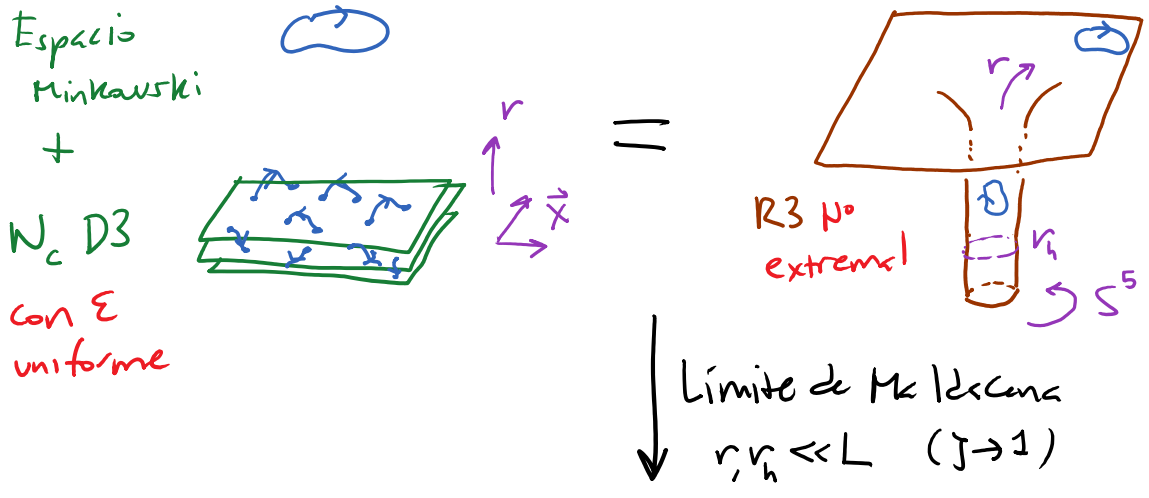
(factor de ennegrecimiento (blackening factor))

con $H(r) \equiv 1 + \mathcal{J}\left(\frac{L}{r}\right)^4$, $f(r) \equiv 1 - \left(\frac{r_h}{r}\right)^4$,

($\mathcal{J}$: parámetro de no extremalidad, no confundir con $\mathcal{J}$ de pp. 409-10)

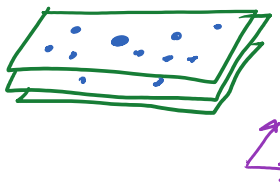
$$L^4 \equiv r_h^4 \frac{\mathcal{J}}{1-\mathcal{J}^2}$$ (relación para 3-brana negra no extremal general)

y $L^4 \gg r_h^4$ ($\leftrightarrow 1-\mathcal{J}^2 \ll \mathcal{J}$, condición de cuasi-extremalidad):



Límite de Maldacena
$r, r_h \ll L$ ($\mathcal{J} \to 1$)

Plasma de MSYM $SU(N_c)$ en Minkowski 3+1



$=$

Schw-AdS_5

Cuerdas IIB

Además de la densidad de energía y la presión del AGP, la correspondencia predice también la entropía, a partir de la entropía de Bekenstein-Hawking del agujero negro (p. 120),

$$S = S_{BH} \equiv \frac{A_h}{4G_N^{(5)}}$$

← área del horizonte (contiene S^5)

← S^5 ya está tenida en cuenta aquí: $\frac{1}{G_N^{(5)}} = \frac{L^5 \Omega_5}{G_N^{(10)}}$

A partir de la métrica $ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(-f(z)dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{f(z)}\right)$, $f(z) = 1 - z^4/z_h^4$

sabemos que

$$A_h = \int_{z=z_h} d^3x \sqrt{\gamma} = \int d^3x \sqrt{\left(\frac{L^2}{z_h^2}\right)^3} = \frac{L^3}{z_h^3} V_3 ,$$

$\sqrt{\gamma}$: métrica inducida a t fijo, $z = z_h$; $V_3 \equiv \int d^3x$

y de la p. 365 tenemos $\frac{1}{4G_N^{(5)}} = \frac{N_c^2}{2\pi L^3}$, así que

$$S = \left(\frac{L^3}{z_h^3} V_3\right)\left(\frac{N_c^2}{2\pi L^3}\right) = \frac{\pi^2}{2} N_c^2 T^3 V_3 .$$

$z_h^{-3} = \pi^{-3} T^{-3}$ (p. 434)

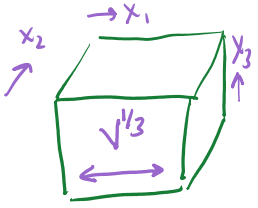
En otras palabras, la densidad de entropía del plasma es

$$s = \frac{\pi^2}{2} N_c^2 T^3 .$$

Notamos que ε, p, s, además de tener la dependencia correcta de la temperatura (determinada por análisis dimensional en la CFT), escalan como N_c^2, es decir, como el número de grados de libertad (deconfinados) asociados a los campos matriciales A_μ, Φ^e, ψ^f de MSYM en el límite $N_c \to \infty$.

Es interesante comparar el coeficiente numérico con el resultado para MSYM libre ($\lambda = 0$, $N_c \to \infty$) [Ver Gubser, Klebanov, Peet]. Para poder contar limpiamente los modos con distinto momento, conviene considerar al plasma en una caja cúbica de lado $(V_3)^{1/3}$, de modo que los momentos están discretizados,

$$\vec{p} = \frac{2\pi \vec{n}}{(V_3)^{1/3}} \qquad \text{con } \vec{n} \in \mathbb{Z}^3 .$$



Para partículas sin masa, la energía correspondiente es $p^0 = |\vec{p}|$,

así que la función de partición en el caso de N_{bos} grados de libertad bosónicos y N_{fer} fermiónicos es

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} = \prod_{\vec{n}} \left(\frac{1}{1-q^{|\vec{n}|}} \right)^{N_{bos}} \left(1+q^{|\vec{n}|} \right)^{N_{fer}},$$

($1/T$; p° si $|\vec{n}|=1$; $1+q^{|\vec{n}|}+q^{2|\vec{n}|}+q^{3|\vec{n}|}+\dots$)

con $q \equiv \exp(-\beta 2\pi / V_3^{1/3})$.

En el caso de MSYM,

$$N_{fer} = N_{bos} = (2+6)(N_c^2-1) \xrightarrow[N_c \to \infty]{} 8N_c^2 .$$

($SU(N_c)$; A_μ; Φ^a)

Las fórmulas usuales de mecánica estadística

$$F = -T \ln Z, \quad E = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z, \quad S = (E-F)/T,$$

conducen entonces a

$$E = \frac{\pi^2}{30}\left(N_{bos} + \frac{7}{8} N_{fer}\right) T^4 V_3 = \frac{\pi^2}{16} N_{bos} T^4 V_3$$

$$= \frac{\pi^2}{2} N_c^2 T^4 V_3$$

y

$$S = \frac{2\pi^2}{45}\left(N_{bos} + \frac{7}{8} N_{fer}\right) T^3 V_3 = \frac{\pi^2}{12} N_{bos} T^3 V_3$$

$$= \frac{2\pi^2}{3} N_c^2 T^3 V_3 .$$

Las densidades correspondientes son

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2}{2} N_c^2 T^4 \quad , \quad s = \frac{2\pi^2}{3} N_c^2 T^3 \quad ,$$

así que comparando con los resultados de gravedad que obtuvimos en las pp. 435 y 437 vemos que la predicción de la correspondencia es que

$$\boxed{\mathcal{E}(\lambda=\infty) = \frac{3}{4}\mathcal{E}(\lambda=0) \quad , \quad s(\lambda=\infty) = \frac{3}{4} s(\lambda=0)} \quad .$$

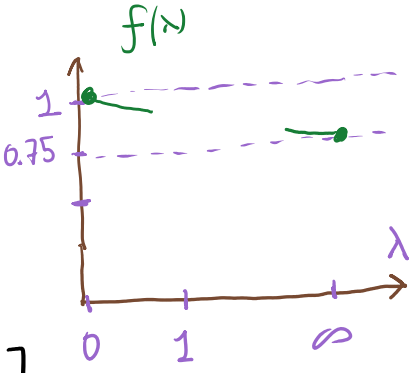
(Aquí hemos hecho la comparación entre AdS y la CFT en el ensamble canónico, igualando las temperaturas $T_{AdS} = T_{CFT}$. Alternativamente, podríamos hacerla en el ensamble microcanónico, igualando las energías $\mathcal{E}_{AdS} = \mathcal{E}_{CFT}$, lo cual equivale a $T_{AdS}^4 = \frac{4}{3} T_{CFT}^4$, y conduce a

$$s(\lambda=\infty) = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} s(\lambda=0) \quad ,$$

que fue el resultado reportado en [Gubser, Klebanov, Peet].)

Una manera de poner a prueba esta predicción de que

al ir de $\lambda=0$ a $\lambda=\infty$ la energía, la entropía y la energía libre (que se puede obtener con $F=E-TS$, o en el lado de AdS, directamente de la acción gravitacional renormalizada $S_{EH}+S_{GH}+S_{ct}$ ← Gibbons-Hawking) se modifican solo por un factor $f(\lambda)$ que interpola entre $f(0)=1$ y $f(\infty)=3/4$ (es decir, $E(\lambda)=f(\lambda)\,E(\lambda=0)$, etc.) es calcular las primeras correcciones de cada lado. Se encuentra [Fotopoulos, Taylor]



- $\lambda \ll 1$: $f(\lambda) = 1 - \frac{3}{2\pi^2}\lambda + \dots$ ↑
- $\lambda \gg 1$: $f(\lambda) = \frac{3}{4} + \frac{45}{32}\frac{\zeta(3)}{\lambda^{3/2}} + \dots$ ↑

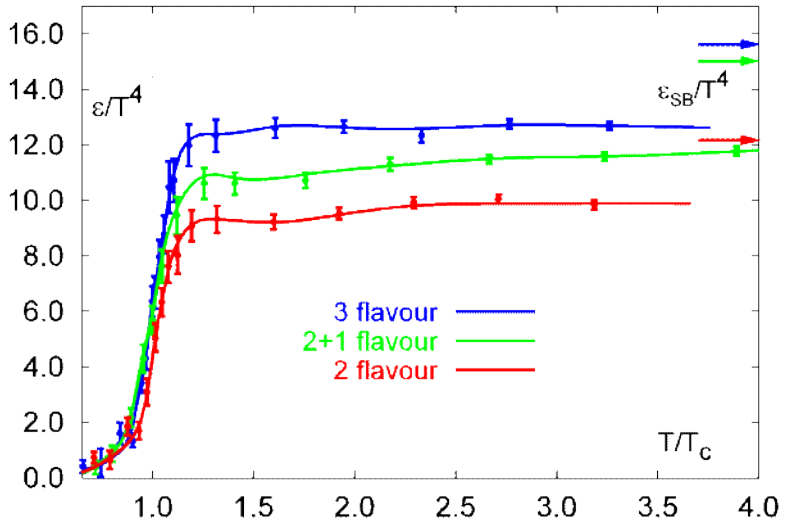
[Gubser, Klebanov, Tseytlin]

lo cual es consistente con la predicción, y sugiere que $f(\lambda)$ es una función monotónicamente decreciente.

Si bien esto no es una comprobación firme de la correspondencia, los resultados que hemos obtenido pintan un retrato plausible de lo que sucede con esta teoría de norma no abeliana en el régimen de

acoplamiento fuerte.

Podemos recordar ahora (de la p. 59) que QCD en la red nos informa que para $T_c < T \lesssim 4T_c$ el QGP del mundo real se comporta aprox.



de: F. Karsch, hep-lat/0106019

como si fuera libre, salvo por un factor de ~0.8. Vimos que, al producir las interacciones una corrección de "solo" ~20%, se creía que el QGP en RHIC (y el LHC) estaría cerca de ser un gas ideal; pero los resultados experimentales contradijeron esta perspectiva.

Con lo que acabamos aprender gracias a AdS/CFT, podemos aliviar esta tensión; sabemos que, al menos en MSYM, el efecto de $\lambda \to \infty$ es corregir a la densidad de energía y de entropía por solo un factor

de $^3/_4$, i y claramente el ~0.8 del QGP está mucho más cerca de 0.75 que de 1! No hay ninguna contradicción entonces entre la gráfica de QCD en la red y los datos experimentales. ¡Esta es por tanto una primera evidencia cualitativa de la correspondencia sobre el QGP del mundo real!

127: 24/11/16 11 h y settled down.

La dependencia $\varepsilon, s \propto N_c^2$ refleja que la teoría está deconfinada, lo cual, para MSYM en $\mathbb{R}^{3,1}$, es el caso incluso a $T=0$ (vimos p.ej. que $V_{q\bar{q}}$ es Coulombiano). Pero si consideramos a MSYM en $S^3 \times \mathbb{R}$, entonces a temperaturas bajas comparadas con el radio R de la S^3 (es decir, $TR \ll 1$, que se vuelve imposible para $T>0$ en el límite $R \to \infty$ donde $S^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3,1}$) sí existe una fase confinada ($\varepsilon, s \propto N_c^0$), y puede mostrarse [Witten] que la transición de deconfinamiento corresponde del lado de AdS a la llamada transición de Hawking-Page, en la cual aparece un agujero negro [ver MAGOO].

Para visualizar este punto, recordemos que cuando $\lambda, N_c \to \infty$, del lado de CFT la función de partición Z se reduce a evaluar $\exp(-S_{SUGRA})$ en la solución a las ecuaciones de movimiento clásicas. Para describir MSYM en S^3 a temperatura finita usando el formalismo euclideano, es decir, MSYM en $S^3 \times S^1$ (radio $\beta \equiv 1/T$), debemos exigir que la geometría en el bulto, que esperamos sea asintótica a AdS global, se reduzca a $S^3 \times S^1$ en la frontera. Y el punto es que, según descubrieron Hawking y Page (en el caso de AdS_4), existen de hecho 2 soluciones distintas a las ecuaciones de movimiento con estas condiciones de frontera: AdS térmico (global),

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right) d\tau_E^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2/L^2} + r^2 d\Omega_3^2,$$

$\tau_E \simeq \tau_E + \beta$ a mano

(ésta es la misma métrica AdS global de la p. 204, con un cambio de coordenada radial $\rho \to r \equiv L \operatorname{senh} \rho$), que tiene topología $B^4 \times S^1$ (bola 4-dim), y cuya interpretación es un gas de gravitones + etc. en AdS, y el agujero negro (esférico) Schw-AdS,

$f(r)$ ← se reduce a AdS térmico cuando $\omega = 0$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{\omega}{r^2}\right) d\tau_E^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{\omega}{r^2}} + r^2 d\Omega_3^2 ,$$

que cubre $r_+ \leq r < \infty$, con r_+ la raíz más grande de $1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{\omega}{r^2} = 0$ (de modo que r_+ sería la ubicación del horizonte en la versión lorentziana de la geometría), y tiene topología $S^3 \times B^2$. Aquí la periodicidad de t_E debe estar necesariamente dada por la temperatura de Hawking (para evitar tener una singularidad cónica),

$$\tau_E \simeq \tau_E + \beta \quad \text{con} \quad \beta = \frac{2\pi L^2 r_+}{2r_+^2 + L^2} .$$

Debemos entonces sumar sobre ambas soluciones, que son 2 distintos puntos de silla en la integral funcional,

$$Z = \int \mathcal{D}h_{mn} \cdots e^{-S_{SUGRA}} = e^{-S_{SUGRA}^{gas}} + e^{-S_{SUGRA}^{hoyo}} ,$$

y el término que domina es el de menor acción ($\leftrightarrow$ menor energía libre $F = -\beta^{-1} \ln Z$).

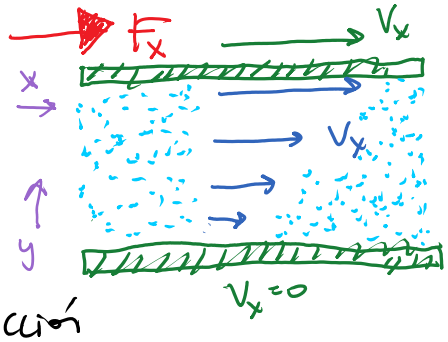
Se encuentra que para temperaturas bajas, domina el gas, pero cuando $T = 3(2\pi L)^{-1}$ ($\leftrightarrow r_+ = L$), empieza a dominar el hoyo negro: hay una transición de fase.

miércoles, 12 de noviembre de 2014 11:21 p. m.

Como ya dijimos, ¡en MSYM esto corresponde al paso de una fase confinada ($\sim N_c^0$) a otra deconfinada ($\sim N_c^2$)!

L34: 19/06/24

Regresando al caso de MSYM en $\mathbb{R}^{3,1}$, otra propiedad muy interesante del plasma (AGP) que es posible estudiar con la correspondencia es su viscosidad de corte o viscosidad cortante (shear viscosity), es decir, la medida de qué tan "cajetoso" es. Para definirla, podemos imaginar al fluido inicialmente en reposo entre 2 placas. Si movemos la placa superior a cierta velocidad V_x, la fricción entre las capas sucesivas del fluido hará que esta velocidad se transmita en la dirección transversal y, dando lugar además a una fuerza de arrastre sobre las placas, de magnitud



$F_x \propto A\, \partial_y V_x$. La viscosidad de corte η es el coeficiente

(fuerza cortante ←, área de la placa ←)

de proporcionalidad, de modo que podemos escribir

$$T_{xy} = \frac{F_x}{A} = \eta\, \partial_y V_x \quad .$$

(El tensor de esfuerzo T_{xy} mide la fuerza en la dirección x sobre un elemento de área perpendicular a y.)

En una teoría cuántica de campos se puede mostrar

jueves, 13 de noviembre de 2014 05:11 a. m.

Usando "teoría de la respuesta lineal" [ver Le Bellac, Thermal Field Theory, cap. 6]) que la viscosidad está relacionada con el correlador de 2 puntos retardado del tensor de energía momento a través de la fórmula de Kubo

$$\eta = -\lim_{\omega\to 0} \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \tilde{G}^R_{xy,xy}(\omega,\vec{0}) \,,$$

donde

$$\tilde{G}^R_{xy,xy}(\omega,\vec{0}) \equiv \int dt\, d\vec{x}\; e^{i\omega t}\, \theta(t) \langle [T_{xy}(t,\vec{x}), T_{xy}(0,\vec{0})] \rangle_\beta \,.$$

($\tilde{G}^R$: retardada; θ: función escalón $=0$ si $t<0$; $[\,,\,]$: conmutador; $\vec{k}=0$; función de Green $\equiv G^R_{xy,xy}(t,\vec{x})$)

$$= -i\eta\omega + O(\omega^2)$$

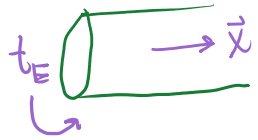
(η: Kubo)

$$=$$

Los paréntesis angulares se refieren al valor esperado en el ensamble térmico, ($1/T$)

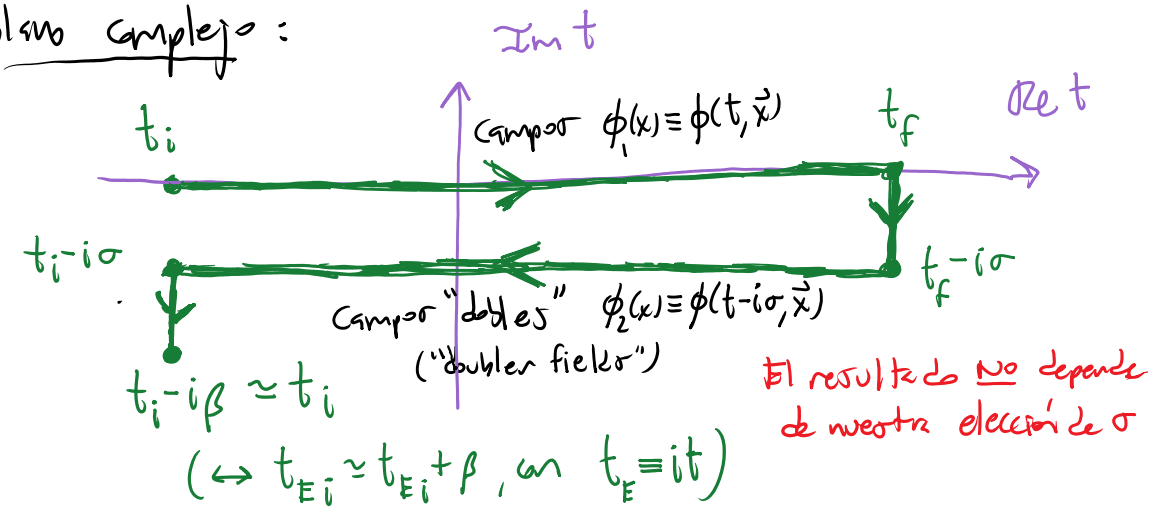
$$\langle \cdots \rangle_\beta \equiv \operatorname{Tr}(e^{-\beta H} \cdots) = \sum_i \langle i | e^{-\beta H} \cdots | i \rangle$$

Sabemos bien (p. 411) que $e^{-\beta H}$ puede interpretarse como el operador de evolución en tiempo euclideano t_E, por un intervalo β, y tomando en cuenta la traza, equivale entonces a calcular la integral funcional en un cilindro $(\mathbb{R}^3 \times S^1)$ con circunferencia β, con condiciones de frontera periódicas/antiperiódicas para los



campos $\phi(x)$ bosónicos / fermiónicos, respectivamente.

Pero si para implementar el factor de Boltzmann $e^{-\beta H}$ necesitamos que el tiempo sea euclideano, ¿cómo podemos entonces calcular correladores de operadores insertados en distintos valores del tiempo real? La respuesta la da el formalismo de Schwinger-Keldysh (o de tiempo real, o del "doble de termocampos" (thermofield double)): lo que se requiere es llevar a cabo la integral funcional con el tiempo t corriendo a lo largo de un contorno en el plano complejo:



Podemos calcular entonces los correladores a temperatura finita ordenados en el "tiempo"

$$\langle T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}\rangle_\beta = \frac{\delta}{i\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{i\delta J(x_n)}\left[\int \mathcal{D}\phi\, e^{iS + i\int dt \int d^3x\, J\phi}\right]_{J=0}.$$

jueves, 13 de noviembre de 2014 08:49 a. m.

Más en detalle, podemos insertar fuentes en ambos segmentos horizontales,

$$\exp\left[i\int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x\, \phi_1(x) J_1(x) - i\int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x\, \phi_2(x) J_2(x)\right],$$

(ϕ_1: campos originales; ϕ_2: campos dobles)

y calcular entonces correladores de tipo $\phi_1\phi_1$ ó $\phi_2\phi_2$ ó $\phi_1\phi_2$ (el ordenamiento por "tiempo" que la integral funcional incorpora en automático es en realidad por camino aquí, $T = \overleftarrow{P}$: para ϕ_1's es por tiempo t, para ϕ_2's es al revés, por $-t$, y todos los ϕ_2's se consideran más "tardíos" que todos los ϕ_1's). En particular, las funciones de 2 puntos forman una matriz 2×2 conocida como el

propagador de Schwinger-Keldysh

$$iG_{ss'}(x-x') \equiv \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{i\delta J_s(x)} \frac{\delta}{i\delta J_{s'}(x')} \Big[Z[J_1, J_2] \Big]_{J_1, J_2 = 0},$$

($s, s' = 1, 2$)

es decir, (orden temporal usual)

$$iG_{11}(t,\vec{x}) = \langle T\{\phi_1(t,\vec{x})\phi_1(0)\}\rangle_\beta, \quad iG_{12}(t,\vec{x}) = \langle \phi_2(0)\phi_1(t,\vec{x})\rangle_\beta,$$

$$iG_{21}(t,\vec{x}) = \langle \phi_2(t,\vec{x})\phi_1(0)\rangle_\beta, \quad iG_{22}(t,\vec{x}) = \langle \bar{T}\{\phi_2(t,\vec{x})\phi_2(0)\}\rangle_\beta.$$

($\bar{T}$: orden antitemporal)

Insertando un conjunto completo de estados y comparando los

definiciones, se puede ver que la versión en espacio de momentos de estos 4 correladores,

$$\tilde{G}_{ss'}(\omega,\vec{k}) \equiv \int d^4x\, e^{-ik\cdot x}\, G_{ss'}(t,\vec{x}) \quad \text{con } \omega \equiv k^0,$$

está relacionada con el correlador retardado $\tilde{G}_R(\omega,\vec{k})$ (y por tanto, con el avanzado $\tilde{G}_A(\omega,\vec{k}) = \tilde{G}_R^*(\omega,\vec{k})$) a través de

$$\tilde{G}_{11}(k) = \mathrm{Re}\,\tilde{G}_R(k) + i\coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)\mathrm{Im}\,\tilde{G}_R(k),$$

$$\tilde{G}_{12}(k) = \frac{2ie^{-(\beta-\sigma)\omega}}{1-e^{-\beta\omega}}\,\mathrm{Im}\,\tilde{G}_R(k),$$

$$\tilde{G}_{21}(k) = \frac{2ie^{-\sigma\omega}}{1-e^{-\beta\omega}}\,\mathrm{Im}\,\tilde{G}_R(k),$$

$$\tilde{G}_{22}(k) = -\mathrm{Re}\,\tilde{G}_R(k) + i\coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)\mathrm{Im}\,\tilde{G}_R(k),$$

← simétrico si elegimos $\sigma = \beta/2$

o lo que es lo mismo,

$$i\tilde{G}_R(k) = \frac{i}{2}\left[\tilde{G}_{11}(k) - \tilde{G}_{22}(k) + e^{\sigma\omega}\tilde{G}_{21}(k) - e^{-\sigma\omega}\tilde{G}_{12}(k)\right].$$

En el contexto de la correspondencia, como de costumbre nos interesan correladores no de los campos básicos de la teoría de norma, sino de operadores compuestos, invariantes de norma, así que usamos las fórmulas anteriores en el

← De nuevo, tenemos 2 copias de los operadores

reemplazo $\phi_s(x) \to \mathcal{O}_s(x)$.

Específicamente, según vimos en la p. 424, para obtener la viscosidad η del plasma térmico de gluones (AGP) en MSYM, nos interesa calcular la parte imaginaria de la función de 2 puntos retardada de la componente xy del tensor de energía-momento,

$$\tilde{G}^R_{xy,xy}(\omega,\vec{0}) \equiv \int dt\, d\vec{x}\; e^{i\omega t}\,\theta(t)\,\langle [T_{xy}(t,\vec{x}), T_{xy}(0,\vec{0})]\rangle_\beta \,.$$
($\vec{k}=0$)

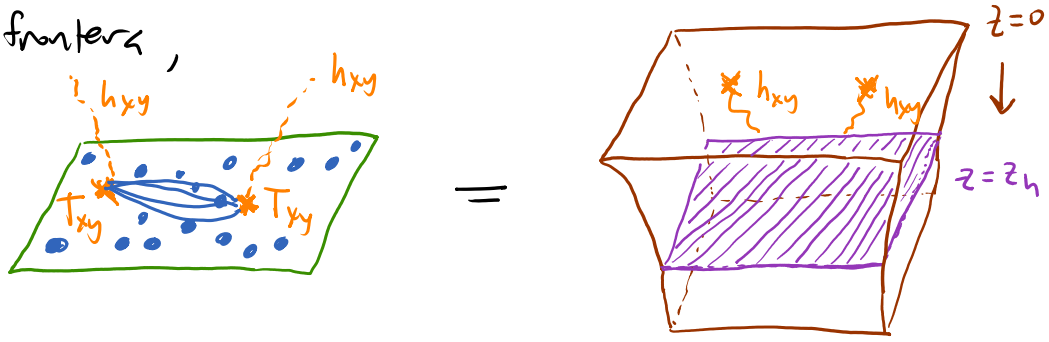
Según lo que acabamos de ver en la página anterior, $\mathrm{Im}\,\tilde{G}^R_{xy,xy}$ está contenida en el correspondiente propagador de Schwinger-Keldysh $\tilde{G}^{ss'}_{xy,xy}$, p.ej., en $\tilde{G}^{11}_{xy,xy}$.

Sabemos (p. 412) que el AGP es dual al hoyo negro planar

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(-f(z)\,dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{f(z)}\right) \quad \text{con } f(z) = 1 - z^4/z_h^4 \,,$$

$z_h = 1/\pi T$, y también (p. 268), que el operador $T_{xy}(x)$ es dual a (la onda s de) el gravitón $h_{xy}(x,z)$, de modo que en la receta GKPW (p. 340), es el valor del gravitón en la frontera $z=0$ quien actúa como fuente de T_{xy} en MSYM, $J_{xy}(x) = h_{xy}(x, z=0)$ (omitimos $z^{4-\Delta}=1$ dado que $\Delta = 4$).

Juntándolo todo, vemos entonces que la viscosidad del AdP se extrae de la parte imaginaria de la acción de SUGRA para $g_{\mu\nu} = g^{hoyo}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, con h_{xy} encendido en 2 puntos en la frontera,

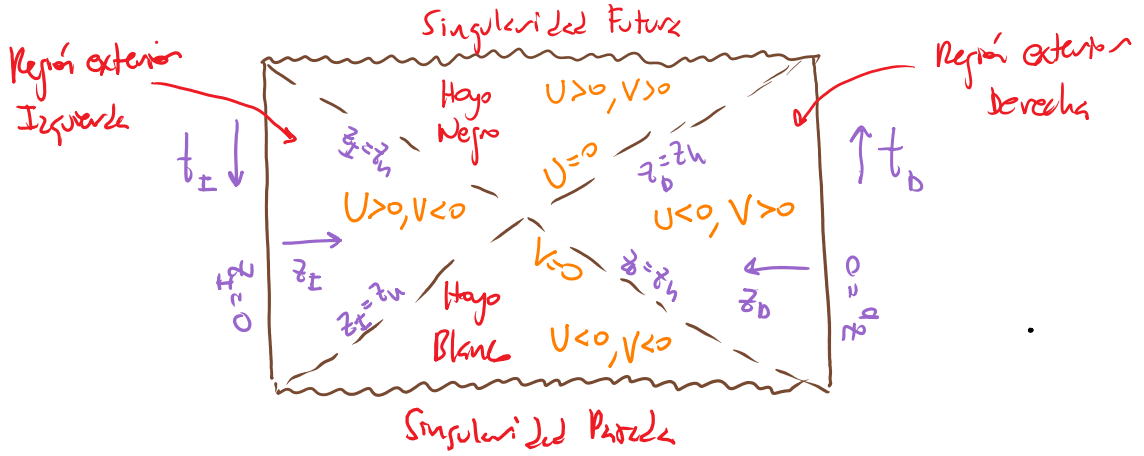


Del lado de MSYM, el teorema óptico relaciona la parte imaginaria de $\langle T_{xy} T_{xy} \rangle_\beta$ con la sección eficaz de absorción σ_{abs} de "un gravitón" (es decir, de una inserción de T_{xy}) por parte del medio térmico, así que también podemos afirmar que la viscosidad de corte η del AdP está relacionada con la probabilidad de que el hoyo negro en AdS absorba a un gravitón h_{xy}.

Lo único que nos hace falta para proceder a la cuenta es especificar las condiciones de borde que $h_{xy}(x,z)$ debe satisfacer en el horizonte, $z = z_h$. En [Son, Starinets, hep-th/0205051] se propuso que lo apropiado es pedir que h_{xy} sea puramente entrante cuando $z \to z_h$, lo cual resulta hasta cierto punto

intuitivo, porque esperamos que clásicamente el hoyo negro se trague todo lo que llega hasta su horizonte. Esta propuesta se justificó cabalmente (además de enunciarse de forma más precisa, y generalizarse al cálculo de funciones de n puntos) en [Herzog, Son; Skenderis, Van Raam], donde se explicó además (basado en [Maldacena, hep-th/0106112]) cómo se implementa en el lado de gravedad el formalismo de Schwinger-Keldysh.

El punto clave es que las coordenadas tipo Poincaré (x^μ, z) cubren apenas una porción del hoyo negro plano Schw-AdS: tal como en el caso de Schwarzschild asintóticamente plano, es posible cambiar a coordenadas de Kruskal U, V, para descubrir que el espaciotiempo completo tiene no una sino dos regiones asintóticamente AdS, en diagrama de Penrose



lunes, 17 de noviembre de 2014 08:59 p. m.

¡¡¡Y la segunda región gAdS corresponde precisamente a la segunda copia de MSYM, donde viven los campos ϕ_2 del formalismo de Schwinger-Keldysh!! Así que para calcular correladores térmicos de un puntos en tiempo real, lo que hay que hacer es encender fuentes J_1 en la región exterior derecha y J_2 en la región exterior izquierda, y aplicar la receta GKPW. [Herzog, Son] mostraron que en ello se obtienen resultados en la estructura esperada, con el parámetro $\sigma = \beta/2$.

Cuando tomamos $g_{mn} = g^{hoyo}_{mn} + h_{mn}$ y examinamos la acción de Einstein-Hilbert a orden cuadrático en h_{xy} (que es todo lo que necesitamos para nuestra función de 2 puntos), se obtiene

$$S = \frac{1}{16\pi G_N^{(5)}} \int d^5x \sqrt{-g} \left[g^{zz} (\partial_z h)^2 + g^{\mu\nu} \partial_\mu h \partial_\nu h \right],$$

$$\leftarrow \frac{N_c^2}{16\pi^2 L^3} \quad (p. 343)$$

donde hemos abreviado $g^{hoyo}_{mn} \to g_{mn}$, $h_{xy} \to h$. La ecuación de movimiento para h es por tanto la misma de un campo escalar libre sin masa,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_z\left(\sqrt{-g}\,g^{zz}\partial_z h\right) + g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h = 0 .$$

Descomponiendo en modos de Fourier,

$$h(x,z) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ik\cdot x}\, \tilde{h}(k,z) ,$$

y separando $\tilde{h}(k,z) = h_k(z)\,\tilde{h}_0(k)$,

($k^\mu = (\omega, \vec{k})$; $\tilde{h}_0(k)$ ← fuente de $\tilde{T}_{xy}(k)$; $= 1$ en $z = 0$ $(z = \epsilon)$)

se requiere que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_z\left(\sqrt{-g}\,g^{zz}\partial_z h_k(z)\right) - g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu h_k(z) = 0 .$$

En términos de la coordenada radial $u \equiv z^2/z_h^2$ y las abreviaciones $\underline{\omega} \equiv \frac{\omega}{2\pi T}$, $\underline{\vec{k}} \equiv \frac{\vec{k}}{2\pi T}$, la ecuación es

$$\partial_u^2 h_k - \left(\frac{1+u^2}{uf}\right)\partial_u h_k + \left(\frac{\underline{\omega}^2 - \underline{\vec{k}}^2 f}{uf^2}\right) h_k = 0 , \quad \text{con } f = 1-u^2 .$$

No podemos resolver esta ecuación de forma exacta para todo ω y $\vec{k}$; pero afortunadamente, para la fórmula de Kubo (p. 424), necesitamos el propagador de T_{xy} solo para $\omega, |\vec{k}| \ll T$, es decir, $\underline{\omega}^2, \underline{\vec{k}}^2 \ll 1$, en cuyo caso podemos desarrollar la solución en potencias de $\underline{\omega}$ y $|\underline{\vec{k}}|$

(ver [Policastro, Starinets, hep-th/0104065]).

La solución que está normalizada a 1 en la frontera $u=0$ y es una onda entrante en el horizonte $u=1$ es

$$h_k(u) = (1-u^2)^{-\frac{i}{2}\underline{\omega}} + O(\underline{\omega}^2, \underline{\vec{k}}^2),$$

o lo que es lo mismo, $h_k(z) \simeq \left(1 - z^4/z_h^4\right)^{-\frac{i}{2}\frac{\omega}{2\pi T}}$.

Al sustituir esta solución en la acción S de la p. 431, se obtiene un término de superficie en $z=0$ ($z=\epsilon$), que a través de la fórmula GKPW $\tilde{G}^{11}_{xy,xy}(k) = \delta^2 S / \delta \tilde{h}_0(k) \delta \tilde{h}_0(-k)$ y usando la relación conocida con $\tilde{G}^R_{xy,xy}(k)$ (p. 427) conduce a [ver Herzog, Son, hep-th/0212072]

$$\tilde{G}^R_{xy,xy}(k) = -2 \frac{N_c^2}{16\pi^2 L^3} \lim_{z\to 0} \sqrt{-g} g^{zz} h_{-k}(z) \partial_z h_k(z)$$

$$= -i \frac{\pi N_c^2 T^3}{8} \omega + O(\omega^2, \vec{k}^2).$$

Comparando esto con la expectativa que teníamos en la p. 424, basada en la fórmula de Kubo,

$$\tilde{G}^R_{xy,xy}(k) = -i\eta\omega + O(\omega^2),$$

podemos deducir finalmente que la viscosidad del AdS es

$$\eta = \frac{\pi}{8} N_c^2 T^3 \quad .$$

Es útil reportar este resultado normalizado por la densidad de entropía que obtuvimos en la p. 415, $s = \frac{\pi^2}{2} N_c^2 T^3$, que nos da una medida del número de grados de libertad en el plasma. Llegamos así al célebre cociente

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}$$ cuando $N_c, \lambda \to \infty$ [Policastro, Son, Starinets] .

↳ adimensional (tendría unidades de $\hbar/k_B$)

En contraste con este resultado para acoplamiento fuerte, $\frac{\eta}{s} \sim 0.08$, cuando el acoplamiento es débil se tiene

$$\frac{\eta}{s} \sim \frac{1}{\lambda^2 \ln \lambda} \gg 1 \qquad [\text{Arnold, Moore, Yaffe}] .$$

La primera corrección para λ grande pero finito resulta en

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} + \frac{165\,\zeta(3)}{64\sqrt{2}\,\pi\,\lambda^{3/2}} + \dots \quad , \qquad [\text{Buchel, Liu, Starinets}]$$

lo cual sugiere que, al menos en MSYM, el cociente η/s decrece monotónicamente conforme λ aumenta.

Otra característica muy importante de este cociente es

que el valor $1/4\pi$ para $\lambda \to \infty$ de hecho resulte ser universal: se obtiene este mismo resultado en todas las teorías de norma cuyo dual de gravedad involucra a la acción de Einstein-Hilbert (ocurre que la densidad de entropía es el área del horizonte, y la sección eficaz de absorción de gravitones en el límite $\omega \to 0$ también es proporcional al área del horizonte) [Buchel, Liu, Starinets].

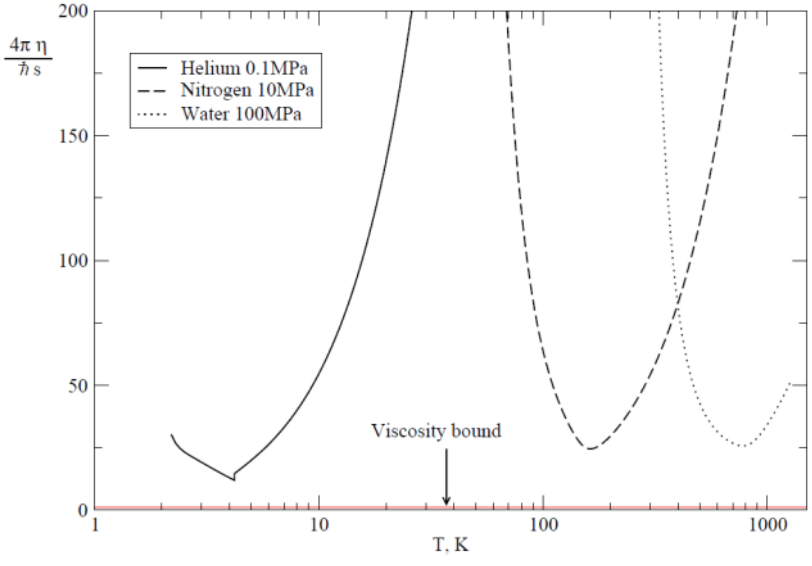
Esto nos anima a pensar que tal vez la propia QCD pudiera tener también $\eta/s \sim 1/4\pi$ en el régimen de acoplamiento fuerte. Recordando que la viscosidad lamentablemente NO se puede calcular con QCD en la red, podemos armarnos de valor y comparar con datos experimentales. Las estimaciones de RHIC y LHC apuntan a

¡ $\left(\frac{\eta}{s}\right)_{exp} \sim 0.1\text{-}0.2$ vs. $\left(\frac{\eta}{s}\right)_{AdS/CFT} \simeq 0.08$!

El hecho de que logremos aquí un acuerdo semicuantitativo con el QGP del mundo real es un gran éxito de la correspondencia (aún teniendo en cuenta que no podemos calcular directamente en QCD, y que el resultado de

gravedad aplica para $\lambda \to \infty$, $N_c \to \infty$, mientras que el QGP producido en RHIC/LHC tiene $\lambda \sim 20$, $N_c = 3$).

Un dato curioso: según se ha podido estimar en un experimento que opera en Australia ¡desde 1927!, la brea (tar pitch) es unas 10^{11} veces más viscosa que el agua (en el experimento han caído solo 9 gotas en casi 90 años). ¡Y la viscosidad del QGP es todavía $\sim 10^3$ veces mayor que la de la brea! Pero el cociente $\eta/s \sim 1/4\pi \sim 0.1$ es el menor de todas las sustancias conocidas (incluyendo, p.ej., al helio superfluido). Ello, junto con los resultados de AdS/CFT que reseñamos más arriba, conduce a [Kovtun, Son, Starinets]



a conjeturar que siempre se obedece la cota $\frac{\eta}{s} \geq \frac{1}{4\pi}$, con lo cual el QGP estaría cerca de ser el "líquido perfecto."

Esto influenció bastante el modo en que los experimentales de RHIC presentaron sus resultados:

BROOKHAVEN NATIONAL LABORATORY

Building 400
P.O. Box 5000
Upton, NY 11973-5000
Phone 631 344-2345
Fax 631 344-3368
www.bnl.gov

managed by the U.S. Department of Energy
by Brookhaven Science Associates, a company
founded by Stony Brook University and Battelle

News Release

Number: 05-38

For release on April 18, 2005, 9:00:00 AM

Contacts: Karen McNulty Walsh, (631) 344-8350 or Peter Genzer, (631) 344-3174

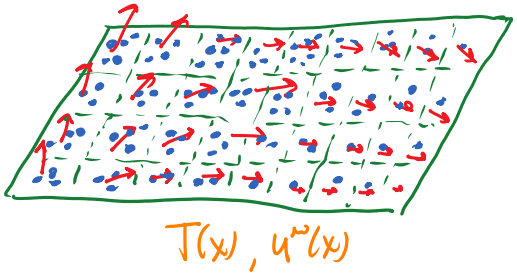
RHIC Scientists Serve Up "Perfect" Liquid

New state of matter more remarkable than predicted -- raising many new questions

Pero tiempo después se demostró que, en ciertas teorías cuyos duales de gravedad tienen correcciones por encima de Einstein-Hilbert (p.ej., tipo R^2), la cota propuesta por KSS se puede violar [ver p.ej. Buchel, Myers, Sinha, 0812.2521]. Es posible, sin embargo, que exista todavía ALGUNA cota, con valor numérico inferior a $1/4\pi$ [ver p.ej. Cremonini, 1108.0677].

Se han hecho muuuchos otros estudios tipo "AdS/QGP". [Ver p.ej. Casalderrey, Liu, Mateos, Rajagopal, Wiedemann, 1101.0618; Gubser, Karch, 0901.0935; DeWolfe, Gubser, Rosen, Teaney, 1304.7794]

Hasta ahora hemos analizado el caso donde el AGP es estático y homogéneo. Es posible también considerar el dual de un plasma no uniforme, con $\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle$ asociado a una temperatura $T(x)$ ($\leftrightarrow$ densidad de energía $\mathcal{E}(x)$) y velocidad $u^\mu(x)$ que varíe lentamente tanto en el espacio como el tiempo (comparado con cualquier escala microscópica característica, incluyendo el camino libre medio). Bajo estas circunstancias, cada porción del fluido alcanza el equilibrio local, y es posible dar una



descripción hidrodinámica del sistema, desarrollando todas las cantidades físicas en una expansión en derivadas espaciotemporales [ver p.ej. Landau, Lifshitz]. En particular, el tensor de energía momento se puede expresar en la forma

$$T^{\mu\nu}(x) = \underbrace{(\mathcal{E}(x)+p(x))u^\mu(x)u^\nu(x) + p(x)\eta^{\mu\nu}}_{\text{fluido ideal}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^{\mu\nu}_{(n)}(x)}_{\text{términos disipativos con } n \text{ derivadas}}$$

donde η = métrica de Minkowski

p.ej.

$$\sigma^{\mu\nu}_{(1)}(x) = (\eta^{\mu\lambda}+u^\mu u^\lambda)(\eta^{\nu\rho}+u^\nu u^\rho)\left[\eta\left(\partial_\lambda u_\rho + \partial_\rho u_\lambda - \tfrac{2}{3}\eta_{\lambda\rho}\partial\cdot u\right) + \mathcal{I}\eta_{\lambda\rho}\partial\cdot u\right].$$

(viscosidad de corte; viscosidad de bulto)

En nuestro caso, por tener una CFT en Minkowski sabemos que $\langle T^{\mu}{}_{\mu} \rangle = 0$, y por tanto $\boxed{p = \varepsilon/3}$ y $\boxed{J = 0}$. De manera similar se pueden escribir los términos en $\sigma^{\mu\nu}_{(2)}$ y órdenes superiores [ver Baier, Romatschke, Son, Starinets, Stephanov, 0712.2451; Bhattacharyya, Hubeny, Minwalla, Rangamani, 0712.2456].

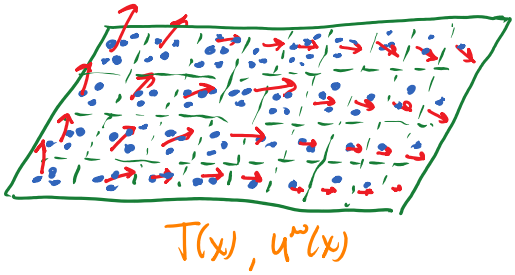
Las ecuaciones de movimiento para el fluido son simplemente el enunciado de que la energía y el momento se conservan,

$$\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0}$$

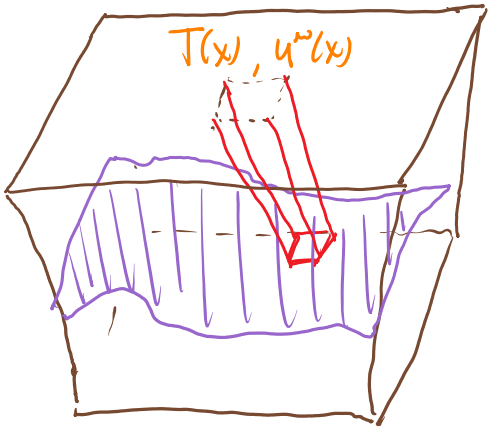
ecuación de Navier-Stokes relativista.

(Si el fluido está cargado, se tiene también la ecuación de conservación para la corriente correspondiente, $\partial_\mu j^\mu = 0$, donde j^μ usualmente se desarrolla en derivadas.)

Del lado de gravedad, el fluido corresponde a un agujero negro dinámico y no uniforme, cuya temperatura y velocidad varían de un punto a otro:



=



domingo, 23 de noviembre de 2014 12:42 p. m.

La idea básica es que el valor de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ en cada celda del fluido (junto con la elección de métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ para la CFT) equivale a condiciones de frontera para la métrica en el bulto, que a su vez, a través de la parte radial de las ecs. de Einstein, determina el comportamiento de $g_{\mu\nu}(x,z)$ dentro de un cierto 'tubo' radial, asociado a la celda en cuestión. Dentro de ese 'tubo', la solución es simplemente la del hoyo negro con la temperatura $T(x)$ y velocidad $u^\mu(x)$ dadas. Pero para tener una verdadera solución en el bulto, faltaría asegurarse de que el comportamiento de $g_{\mu\nu}(x)$ en los distintos tubos satisfacen las ecs. de Einstein en las direcciones paralelas a la frontera, x^μ. Ello impone restricciones sobre $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$, que al examinarse orden por orden en la expansión en derivadas ∂_μ, resultan ser exactamente la expansión hidrodinámica descrita arriba, junto con el requisito de que $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ se conserve (y con ε, η, ζ, etc. específicos)! Es decir, se puede mostrar explícitamente que

¡¡ Ec. de Navier-Stokes en CFT $\longleftrightarrow$ Ec. de Einstein en AdS !!

[Bhattacharyya, Hubeny, Minwalla, Rangamani, 0712.2456]

Esta es la correspondencia fluidos/gravedad [ver, p.ej. los artículos de revisión Hubeny, Minwalla, Rangamani, 1107.5780; Hubeny, Rangamani, 1006.3675; Hubeny, 1011.4948], y representa un subsector de la correspondencia normal/gravedad que ha podido verificarse en completo detalle, a nivel no lineal en la métrica, orden por orden en la expansión en derivadas.

Antes de cerrar este capítulo, conviene presentar una entrada más del diccionario AdS/CFT, que hubiera podido figurar en el capítulo anterior; pero que se entenderá mejor ahora que sabemos que un hoyo negro es el dual de la CFT a temperatura finita (en la fase deconfinada). Se trata de la entropía de entrelazamiento. Este concepto puede definirse para cualquier sistema cuántico que admita una separación de sus grados de libertad en 2 subconjuntos, que podemos llamar A y $\bar{A}$ (← complemento), de tal modo que el espacio de Hilbert se factoriza, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_{\bar{A}}$. Si el sistema completo se encuentra en un estado puro $|\psi\rangle$,

La matriz de densidad asociada es $\rho \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$. Si se encuentra en cambio en un estado mezcla, solo podemos dar una matriz de densidad ρ. Un ejemplo sería el ensamble térmico ($1/T$)

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i} |E_i\rangle\langle E_i| \,.$$

($|E_i\rangle$: eigenestados de H; Z: función de partición $Z \equiv \sum_i e^{-\beta E_i}$)

En cualquiera de los 2 casos, para enfocar nuestra atención en el subsistema A es natural tomar la traza sobre los grados de libertad de $\bar{A}$, obteniendo la matriz de densidad reducida

$$\rho_A \equiv \mathrm{Tr}_{\bar{A}} \rho = \sum_i {}_{\bar{A}}\langle i| \rho |i\rangle_{\bar{A}} \,.$$

($\{|i\rangle_{\bar{A}}\}$ es alguna base para $\mathcal{H}_{\bar{A}}$)

Esto es relevante, p.ej., si experimentalmente sólo tenemos acceso al sistema A: en ese caso tomamos la suma sobre $|i\rangle_{\bar{A}}$ porque no sabemos en qué estado se encuentra $\bar{A}$.

Llegados a este punto, la entropía de entrelazamiento de A en el estado ρ se define simplemente como la entropía de von Neumann de la matriz reducida ρ_A:

$$S_A \equiv -\mathrm{Tr}(\rho_A \log \rho_A) = -\sum_i \eta_i \log \eta_i$$

(η_i: eigenvalores de ρ_A)

S_A cuantifica qué tan no puro es ρ_A, y por tanto, qué tan entrelazados están A y $\bar{A}$, es decir, qué tanto estos 2 subsistemas tienen (en el estado ρ) información compartida.

El ejemplo más sencillo posible es un sistema con 2 espines $1/2$, donde A es el primer espín y $\bar{A}$ el segundo. Podemos trabajar entonces con las bases $|\uparrow\rangle_A, |\downarrow\rangle_A$ para $\mathcal{H}_A$ y $|\uparrow\rangle_{\bar{A}}, |\downarrow\rangle_{\bar{A}}$ para $\mathcal{H}_{\bar{A}}$. Consideremos primero el estado producto (es decir, SIN entrelazamiento)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{\bar{A}} - |\downarrow\rangle_{\bar{A}})$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right).$$

En este caso

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4}(|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| - \dots) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

(filas: $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$; columnas: $\langle\uparrow\uparrow|, \langle\uparrow\downarrow|, \langle\downarrow\uparrow|, \langle\downarrow\downarrow|$)

y

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_{\bar{A}}\,\rho = {}_{\bar{A}}\langle\uparrow|\rho|\uparrow\rangle_{\bar{A}} + {}_{\bar{A}}\langle\downarrow|\rho|\downarrow\rangle_{\bar{A}}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(filas: $|\uparrow\rangle_A, |\downarrow\rangle_A$; columnas: ${}_A\langle\uparrow|, {}_A\langle\downarrow|$)

Es decir, $\rho_A = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle_A\langle\uparrow|_A + |\uparrow\rangle_A\langle\downarrow|_A + |\downarrow\rangle_A\langle\uparrow|_A + |\downarrow\rangle_A\langle\downarrow|_A\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A\right)\left(\langle\uparrow|_A + \langle\downarrow|_A\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$

es un estado puro: al no tener A y $\bar{A}$ interacción completa, la traza sobre $\bar{A}$ no tiene ningún efecto sobre el estado de A. ρ_A tiene un único eigenvector, $|\psi\rangle_A \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A\right)$, con eigenvalor 1, así que $S_A = -\mathrm{Tr}\,\rho_A \log \rho_A = -\sum_i \eta_i \log \eta_i = 0$, expresando correctamente el hecho de que A y $\bar{A}$ NO están entrelazados.

Basta con cambiar un signo para que nuestro estado sí tenga entrelazamiento, p.ej.

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right) \neq |\psi'\rangle_A\,|\psi'\rangle_B .$$

En este caso

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4}\left(|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| - \ldots\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 \\ 1 & +1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

(columnas: $\langle\uparrow\uparrow|$ $\langle\uparrow\downarrow|$ $\langle\downarrow\uparrow|$ $\langle\downarrow\downarrow|$; filas: $|\uparrow\uparrow\rangle$ … $|\downarrow\downarrow\rangle$)

y

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_{\bar{A}}\,\rho = \sum_{\bar{A}}\langle\uparrow|\rho|\uparrow\rangle_{\bar{A}} + \sum_{\bar{A}}\langle\downarrow|\rho|\downarrow\rangle_{\bar{A}}$$

domingo, 23 de noviembre de 2014 05:25 p. m.

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$|\uparrow\rangle_A$ $_A\langle\uparrow|$ $_A\langle\downarrow|$ $|\downarrow\rangle_A$

Estado mezcla

de modo que $S_A = -\mathrm{Tr}(\rho_A \log \rho_A) = -\sum_i \eta_i \log \eta_i$

$$= -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \log 2$$

$$= 1 \text{ si usamos } \log_2,$$

indicando el entrelazamiento existente.

Otro ejemplo: si tomamos el ensamble térmico $\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$ y A es el sistema completo ($\Rightarrow \bar{A} = \emptyset$), entonces $\rho_A = \rho$ y es fácil verificar que

$$S_A = -\mathrm{Tr}(\rho \ln \rho) = \ln Z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -\beta F + \beta E,$$

que no es otra cosa sino la entropía térmica usual. Esto muestra que el nombre de entropía de entrelazamiento no es del todo correcto, porque en general S_A puede incluir contribuciones no cuánticas. Por otra parte, dado un estado mezcla como $\rho = Z^{-1} e^{-\beta H}$, siempre es posible considerar a nuestro sistema como parte de un sistema más grande que lo "purifica" (es decir, que sí se encuentra en un

estado puro). P.ej. para $\rho = Z^{-1} e^{-\beta H}$ podemos tomar una segunda copia de nuestro sistema y considerar el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |E_n\rangle_{original} \otimes |E_n\rangle_{copia}$$

que conduce a la matriz de densidad reducida

$$Tr_{copia} |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} |E_n\rangle_{original} \langle E_n|_{original} = \rho .$$

(Esto está relacionado con la copia que figura en el formalismo de Schwinger-Keldysh, p.425.)

En cualquier sistema cuántico, la entropía de entrelazamiento satisface las siguientes propiedades:

- $S_A = S_{\bar{A}}$ si el estado ρ es puro (lo cual muestra que en general S_A no es extensiva).
- Si $A = A_1 + A_2$, $S_{A_1} + S_{A_2} \geq S_A$ subaditividad.

  Esto motiva la definición de la información mutua

  $$I(A_1, A_2) \equiv S_{A_1} + S_{A_2} - S_{A_1+A_2} \geq 0 .$$

- Para 3 subsistemas A, B, C que no se intersectan,

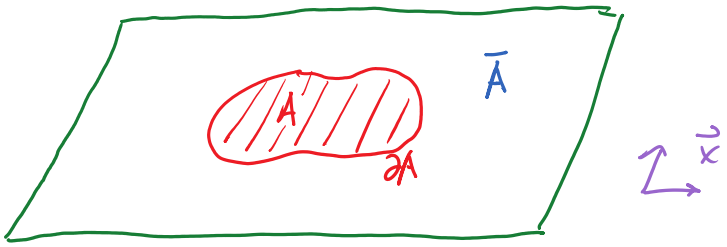
  $$S_{A+B+C} + S_B \leq S_{A+B} + S_{B+C}$$ subaditividad fuerte $\Rightarrow$ subaditividad si $B = \emptyset$

  $$S_A + S_C \leq S_{A+B} + S_{B+C} ,$$

  o lo que es lo mismo, $I(A,B) \leq I(A, B+C)$.

Las demostraciones de estas y muchas otras propiedades pueden encontrarse p.ej. en [Nielsen, Chuang, "Quantum Information and Quantum Computation"].

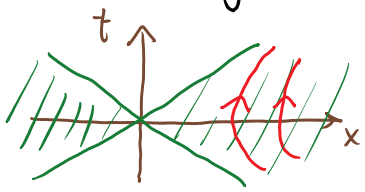
Si en lugar de un sistema discreto consideramos una teoría cuántica de campos, una manera natural de dividir al sistema en 2 partes es eligiendo una región espacial específica (a tiempo fijo):



Dado un estado de la teoría, p.ej. el vacío $|0\rangle$, podemos preguntarnos entonces qué tan entrelazados están los grados de libertad $\phi(\vec{x})|_{\vec{x}\in A}$ con $\phi(\vec{x})|_{\vec{x}\in \bar{A}}$ (existen ciertas sutilezas para obtener una factorización $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}$, particularmente en el caso de teorías de norma [ver, p.ej., Casini, Huerta, Rosabal, 1312.1183; Ohmori, Tachikawa, 1406.4167]).

Tal vez pueda sonar confuso que hablemos de entrelazamiento entre regiones del vacío (donde pudiéramos pensar que no hay nada); pero de hecho la existencia de tal entrelazamiento

es crucial para que $|0\rangle$ sea el estado de mínima energía.
(Recordar p.ej. descomposición de Minkowski en 2 cuñas de Rindler $\leftrightarrow$ efecto Unruh.)



Este entrelazamiento es responsable p.ej. del hecho que

$$\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle \neq 0 \quad \text{para} \quad (x_1-x_2)^2 > 0.$$

En cualquier teoría de campos, estamos acostumbrados a considerar a los correladores $\langle 0|\mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)|0\rangle$ como la información básica de la teoría; pero en cierto sentido, la entropía de entrelazamiento es todavía más básica: mientras que S_A requiere solo de la especificación del estado (y una región A), los correladores requieren del estado y una elección de los operadores $\mathcal{O}_i$ (~ aparatos de medición) (además de las posiciones x_i).

De hecho, se ha mostrado que S_A, o más específicamente, la información mutua, impone una cota superior sobre la magnitud de los correladores de 2 puntos:

$$\left(\langle \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B\rangle - \langle \mathcal{O}_A\rangle\langle \mathcal{O}_B\rangle\right)^2 \leq 2I(A,B) \quad .$$

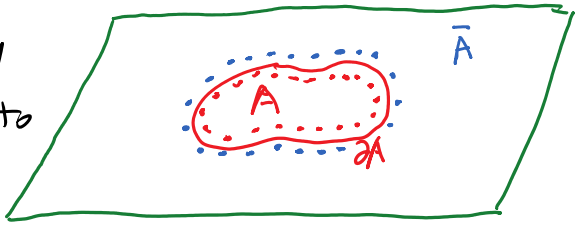
[Wolf, Verstraete, Hastings, Cirac, 0704.3906]

En teoría de campos, una primera novedad es que la entropía S_A asociada a la región geométrica A tiene divergencias UV. Esto es natural, puesto que estamos hablando ahora de un número infinito de grados de libertad. Para obtener un resultado finito, necesitamos elegir algún tipo de corte UV ϵ ($\leftrightarrow \Lambda \sim 1/\epsilon$).

Para el vacío de una CFT en d dimensiones espaciotemporales, se encuentra entonces (en el caso donde ∂A es suave) que

$$S_A = a_1 \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-2} + a_3 \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-4} + \ldots + \begin{cases} a_{d-2}\left(\frac{l}{\epsilon}\right) + \tilde{f} & d \text{ impar} \\ a_{d-3}\left(\frac{l}{\epsilon}\right)^2 + \tilde{c}\log\left(\frac{l}{\epsilon}\right) & d \text{ par} \end{cases}$$

donde l es una escala de longitud característica de A. El hecho de que el término dominante escale como $l^{d-2} \propto \text{Área}(\partial A)$ se conoce como la "ley de área", y tiene sentido físico: el entrelazamiento que más contribuye es entre puntos vecinos a lo largo de la frontera ∂A.



Se ha encontrado que los coeficientes $\tilde{c}$ y $\tilde{f}$ de la parte finita de S_A contienen información sobre el número de grados de libertad en la teoría de campos: $\tilde{c}$ depende

de las cargas centrales de la CFT (que figuran en la anomalía de Weyl $\langle T^\mu{}_\mu \rangle$, p.ej. $\tilde{c} = c/3$ en $d=2$, $\tilde{c}$ depende de c y a en $d=4$) [Holzhey, Larsen, Wilczek, hep-th/9403108; Calabrese, Cardy, hep-th/0405152; Ryu, Takayanagi, hep-th/0605073], y $\tilde{f}$ está relacionada con (la parte finita de) la energía libre F de la CFT sobre una d-esfera S^d [Jafferis, Klebanov, Pufu, Safdi, 1103.1181; Klebanov, Pufu, Safdi, 1105.4598].

En [Liu, Mezei, 1202.2070] se propuso una entropía de entrelazamiento renormalizada $\mathcal{I}_A$ que extrae la parte finita de S_A (en el caso de una región A 'esferable'):

$$\mathcal{I}_A = \begin{cases} \frac{1}{(d-2)!!}\left(\ell\frac{d}{d\ell}-1\right)\left(\ell\frac{d}{d\ell}-3\right)\cdots\left(\ell\frac{d}{d\ell}-(d-2)\right)S_A & d \text{ impar} \\ \frac{1}{(d-2)!!}\,\ell\frac{d}{d\ell}\left(\ell\frac{d}{d\ell}-2\right)\cdots\left(\ell\frac{d}{d\ell}-(d-2)\right)S_A & d \text{ par}. \end{cases}$$

Para una teoría de campos no conforme en $d \leq 3$, y en el caso donde ∂A es una $(d-2)$-esfera, $\mathcal{I}_A$ resulta ser una función monotónicamente decreciente de ℓ, desde el límite UV $\ell \to 0$ hasta el IR $\ell \to \infty$ [Casini, Huerta, hep-th/0405111, cond-mat/0610375, 1202.5650]. (Esto está relacionado con el "teorema c" de Zamolodchikov, y su generalización a más dimensiones.)

Es útil definir la (n-ésima) entropía de Renyi

$$S_A^{(n)} = \frac{1}{1-n} \ln\left[\mathrm{Tr}\,(\rho_A)^n\right] \quad ,$$

que cuando $n = 1+\delta$ con $\delta \ll 1$ se convierte en

$$S_A^{(1+\delta)} = -\frac{1}{\delta} \ln\left[\mathrm{Tr}\left(\rho_A \underbrace{e^{\delta \ln \rho_A}}_{1+\delta \ln \rho_A + O(\delta^2)}\right)\right]$$

$$1 + \delta\,\mathrm{Tr}\,(\rho_A \ln \rho_A) + O(\delta^2)$$

$$= -\mathrm{Tr}\,(\rho_A \ln \rho_A) + O(\delta) \quad ,$$

es decir,

$$S_A = \lim_{n \to 1} S_A^{(n)} \quad .$$

Más allá del interés que puedan tener las entropías de Renyi en sí mismas, esto da lugar al método de cálculo más usado para determinar la entropía de entrelazamiento en el vacío. El punto es que es mucho más fácil calcular $\mathrm{Tr}\,(\rho_A^n)$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ que $\mathrm{Tr}\,(\rho_A \ln \rho_A)$. Para lo primero se utiliza el llamado truco de réplica,

$$\mathrm{Tr}\,(\rho_A^n) = \frac{1}{Z_1^n} \int_{(t_E, \vec{x}) \in \mathbb{R}^d_{(n)}} \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi]} \equiv \frac{Z_n}{Z_1^n}$$

[Callan, Wilczek, hep-th/9401072]

$\mathbb{R}^d_{(n)}$ cubierta n-tuple de $\mathbb{R}^d$, con condiciones de frontera en A

p.ej., en $d=2$ [de Ryu, Takayanagi, hep-th/0605073]:

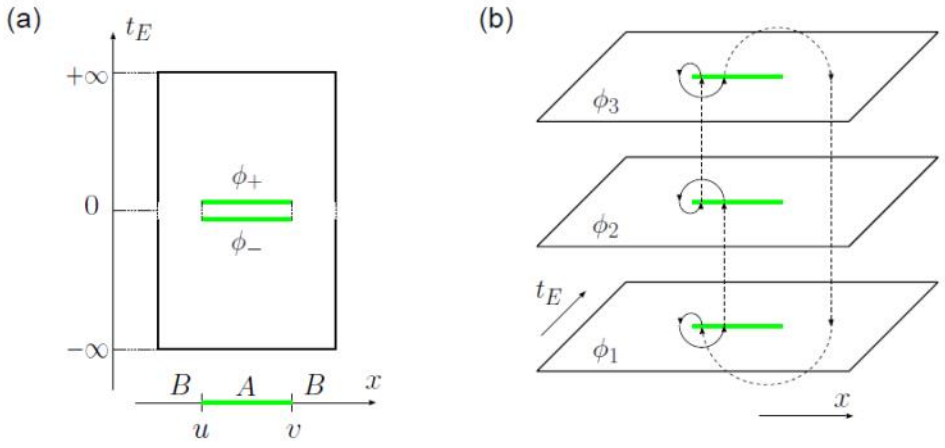
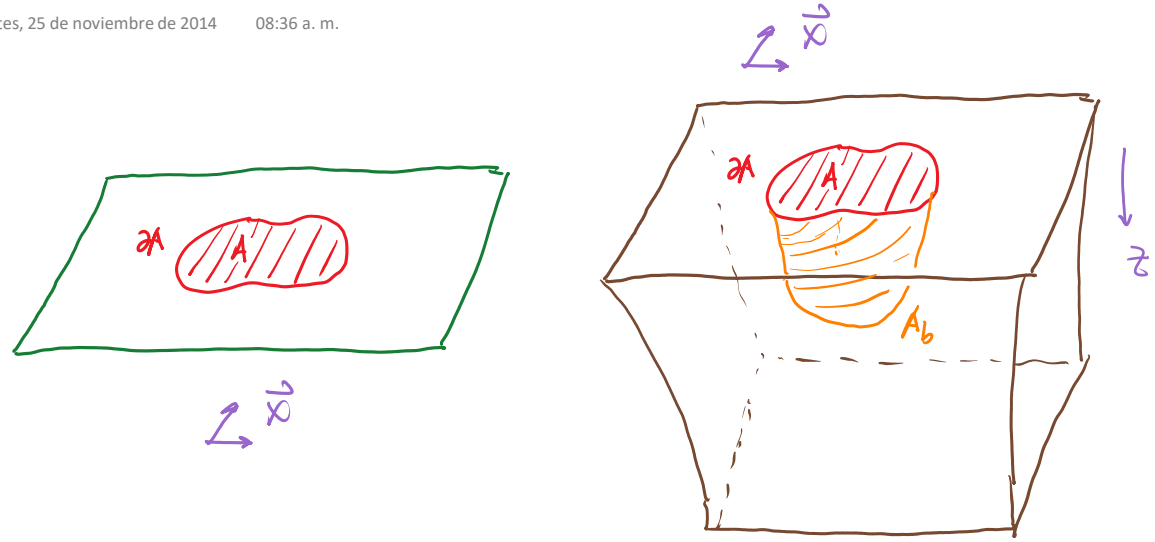


Figure 1: (a) The path integral representation of the reduced density matrix $[\rho_A]_{\phi_+\phi_-}$. (b) The n-sheeted Riemann surface $\mathcal{R}_n$. (Here we take $n = 3$ for simplicity.)

Una vez que se tiene $S_A^{(n)}$ para $n=1,2,3,\ldots$, se necesita hacer una continuación analítica en n para extraer S_A a partir del límite $n\to 1$. Más allá de los detalles, el punto a resaltar es que en general resulta bastante difícil calcular la entropía de entrelazamiento en $d>2$, ¡incluso para campos libres! [ver p.ej. Casini, Huerta, 0905.2562].

Generó por tanto mucho interés la propuesta de [Ryu, Takayanagi, hep-th/0603001, 0605073] de que, en teorías de campo fuertemente acoplado con dual holográfico, la entropía de entrelazamiento puede calcularse por medio de una receta muy sencilla:

martes, 25 de noviembre de 2014 08:36 a. m.



$$S_A = \min_{A_b \sim A} \left[\frac{\text{area}(A_b)}{4G_N^{(d+1)}} \right] .$$

$A_b \sim A$ significa que consideramos hipersuperficies A_b en el bulto tales que $\partial A_b = \partial A$ y A_b es continuamente deformable a A, o en otras palabras, existe una región V_A en el bulto tal que $\partial V_A = A \cup A_b$.

Esta receta se propone como válida siempre y cuando:

- A sea una región <u>espacial</u> (a tiempo fijo).
- La teoría de campos tenga un dual holográfico.
- La acción gravitacional en el dual sea Einstein-Hilbert clásica (es decir, tenemos $N_c \to \infty$, $\lambda \to \infty$)
- El estado en cuestión sea dual a un fondo suave, clásico y estático.

Notar que, a diferencia de los cálculos de lazos de Wilson o de correladores, donde poníamos algún objeto físico (p.ej. cuerda macroscópica o campos asociados a modos de vibración de cuerda microscópica) sobre el fondo, aquí A_b es simplemente un lugar geométrico. Esto empata con la observación que hicimos antes: S_A es una propiedad inherente al estado (y la región A), sin necesidad de especificar algún tipo particular de 'aparatos de medición' (operadores $O(x)$ o cargas de prueba).

La receta de Ryu y Takayanagi (RT) prácticamente se ha demostrado en [Casini, Huerta, Myers, 1102.0440] y sobre todo [Lewkowycz, Maldacena, 1304.4926] (donde básicamente se emplea el truco de réplica del lado de gravedad).

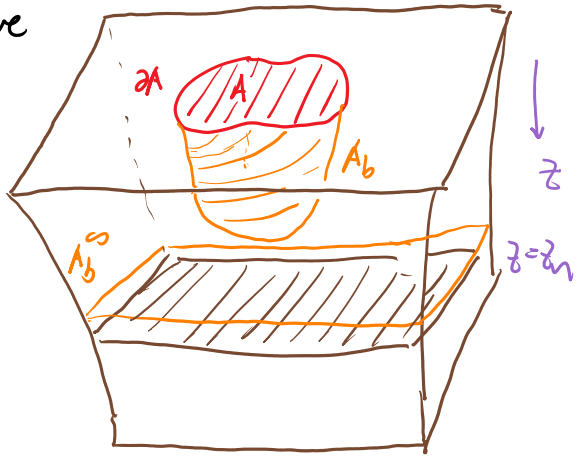
La receta afirma que es posible usar la fórmula de Bekenstein-Hawking para superficies A_b que NO son horizontes (y en [Bianchi, Myers, 1212.5183] se propuso que para cualquier superficie, la misma fórmula calcula la entropía de entrelazamiento del lado de gravedad).

Cuando la acción gravitacional tiene correcciones por encima

de Einstein-Hilbert, se requiere generalizar la noción de "área" a una fórmula tipo entropía de Wald [Campos, 1310.6659; Dong, 1310.5713].

Para cubrir situaciones no estáticas, [Hubeny, Rangamani, Takayanagi (HRT), 0705.0016] propusieron una fórmula covariante, donde se utilizan superficies extremales en lugar de mínimas. Ver también [Wall, 1211.3494].

Podemos notar que el uso de la fórmula de Bekenstein-Hawking garantiza en automático que S_A da el resultado correcto cuando A es el espacio completo y el corte es térmico:



$$S_A = \frac{\text{área(horizonte)}}{4G_N} = S_{\text{térmica}}.$$

En el caso de AdS global ($\leftrightarrow$ CFT en $S^3 \times \mathbb{R}$), la condición $A_b \sim A$ es crucial para llegar a este resultado:

Pero la fórmula de RT tiene éxito en mucho más que esto: reproduce un número infinito de propiedades especiales de la entropía de entrelazamiento en la teoría de campos, incluyendo, de manera muy sencilla, la subaditividad fuerte [Headrick, Takayanagi, 0704.3719]. Y predice que todas las teorías con dual de gravedad tienen una propiedad adicional, no genérica: la información mutua en el contexto holográfico es 'monógama' [Hayden, Headrick, Maloney, 1107.2940],

$$I(A,B) + I(A,C) \leq I(A,B+C).$$

En los años más recientes, han surgido muchos indicios que sugieren que el entrelazamiento juega un papel crucial en la descripción gravitacional: es el 'pegamento' que conecta a regiones espaciales que de otro modo serían disjuntas [Van Raamsdonk; Swingle; Maldacena, Susskind; etc.]. Se ha logrado incluso ¡reproducir la ecuación de Einstein en AdS a partir de entrelazamiento en la CFT! [Lashkari, McDermott, Van Raamsdonk; Faulkner, Guica, Myers, Van Raamsdonk; Faulkner, Hartl, Hijano, Parrikar, Rabideau, Van Raamsdonk; Lewkowycz, Parrikar; Faulkner; Haehl; etc.]

Artículos de revisión sobre entrelazamiento en holografía: [Nishioka, 1801.10352; Rangamani, Takayanagi, 1609.01287; Van Raamsdonk, 1609.00026]

L35: 24/06/24 (+1 hora)