Física Contemporánea

Profesor: Dr. Fernando Ramírez Martínez
Instituto de Ciencias Nucleares,
cibículo “C-315”, tercer piso.
Tel.5622 46 60 ext. 5111

email: ferama@ciencias.unam.mx

Ayudante(s):
Alejandra Estefanía Díaz Calderón

email: alessi3.pihorse@ciencias.unam.mx

Instituto de Ciencias Nucleares,
Laboratorio de Átomos Fríos.

Tel. 5622 46 60 ext. 5111

Página del curso:
http://bigbang.nucleares.unam.mx/~ferama/

Fernando Ramírez Martínez

5 de septiembre de 2022

Introducción

Este curso

- Los objetivos:

    1. Preparar a los estudiantes para dar el paso entre la física que les enseñaron en la preparatoria y la física a la que se enfrentarán a lo largo de su carrera universitaria;
    2. Motivar a los estudiantes con temas de investigación contemporáneos para incitarlos a que aprendan a buscar información por sí mismos.

- El reto:

    - ¿Cuál es el nivel académico medio de los estudiantes al entrar a la carrera?
    - ¿Qué tan homogéneo y disperso es este nivel?
    - ¿Cómo podemos no sólo aumentar el nivel académico si no que además homogeneizar y reducir la dispersión en nuestros grupos para que se tengan grupos más compactos en los cursos de mecánica vectorial en particular y en el resto de la carrera en general?
    - Despertar el interés temprano por algún área de investigación en particular e incitar a que se acerquen a los investigadores y participen en alguna tarea o proyecto de investigación lo antes posible.

LA FÍSICA: La carrera, la disciplina, la investigación...

- ¿Qué es la física?
- ¿Por qué decidieron estudiar la carrera de física? ¿En qué estaban pensando cuando decidieron entrar a esta carrera?
- ¿En qué consiste hacer física?

La palabra física tiene su origen en la palabra griega *physis*, que se traduce como “naturaleza". Por lo tanto, la meta de la investigación en física es explicar los procesos que se producen en la naturaleza por medio del establecimiento de relaciones entre las cantidades físicas (naturales).

Una cantidad física es esencialmente cualquier cosa susceptible de ser medida. Ejemplos a los que estamos habituados pueden ser cantidades como la posición, la velocidad, la fuerza, la energía, la temperatura, la presión, etc., pero también puede tratarse de parámetros “exóticos” como campos eléctricos y magnéticos, el spin de un electrón, el momento magnético de un átomo, el índice de refracción de un material, entre muchos otros.

Las relaciones establecidas por medio de un análisis físico deberían en principio ser comprobadas por medio de nuevas mediciones. En caso de que en un momento dado no existan las herramientas para realizar las mediciones que validen dichas relaciones, usualmente el análisis mismo indica en que dirección es necesario impulsar a las técnicas experimentales para poder realizar la comprobación requerida. De esta manera teoría y experimento son actividades que están siempre ligadas.

Figura 1: Réplica del patrón de masa (kilogramo patrón) y parte de la instrumentación dedicada a contribuir el establecimiento de la escala de tiempo mundial y a la diseminación de los husos horarios del país que se encuentra bajo resguardo del Centro Nacional de Metrología, el CENAM.

La medición en física: ¿qué es medir?

- Nuestra manera de conocer e interactuar con la naturaleza, es decir, con el universo que nos rodea y del cual somos parte.
- Medir consiste en comparar una cantidad física dada con un patrón o estándar previamente establecido.
- Los sistemas de unidades son los conjuntos básicos de patrones de medida: el sistema internacional de unidades, el sistema inglés, el sistema cgs ($\mathrm{cm} - \mathrm{g} - \mathrm{s}$)

La definición de cada una de las unidades de un patrón o estándar debe de cumplir dos características básicas:

1. Accesibilidad: cualquiera que requiera reproducir el patrón debe de ser capaz de hacerlo.
2. Reproducibilidad: siempre que el patrón sea construido, el resultado debe de ser el mismo.

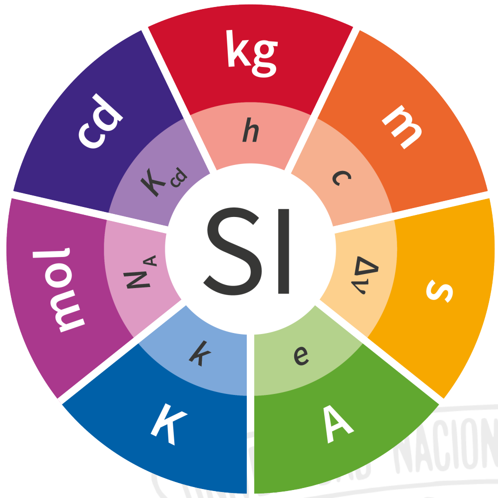


Figura 2: Las unidades base del sistema internacional. Ver más detalles en https://www.bipm.org/en/measurement-units/rev-si/

Cuadro 1: El sistema internacional (SI) de unidades.

Cantidad física	**Unidad**	**Símbolo**	**Constante funamental**
longitud	metro	m	velocidad de la luz, c
masa	kilogramo	kg	constante de Planck, h
tiempo	segundo	s	estructura atómica, $\Delta\nu$
corriente eléctrica	Ampere	$\mathrm{A} = \mathrm{C/s}$	carga eléctrica, e
iluminación	Candela	cd	eficacia luminosa, K_{cd}
temperatura	kelvin	K	Boltzmann, k_B
cantidad de materia	mol	mol	número de avogadro, N_A

La incertidumbre

- Toda medición tiene que ir acompañada por la incertidumbre asociada al método de medición.
- La incertidumbre contiene información cuantitativa de las características y limitaciones técnicas del dispositivo experimental con el que se realizó la medición.
- Una medición reportada sin su incertidumbre asociada carece de sentido.
- Propagación de incertidumbres:

→ Suma de mediciones: las incertidumbres se suman.

→ Resta de mediciones: las incertidumbres se suman.

→ Multiplicación y división de mediciones: productos cruzados de mediciones e incertidumbres.

Se sugiere que se consulten las siguientes referencias:

- *Introducción al análisis gráfico de datos experimentales*. M. en C.. Berta Oda Noda. Clasificación LibrUNAM: QA276.3 O33 2005.

- Google: Propagación de incertidumbres.

Repaso de vectores

Un vector es una cantidad que tiene tanto magnitud como dirección y sentido, a diferencia de un escalar que tiene únicamente magnitud. Cantidades físicas como un desplazamiento, una velocidad, una aceleración o una fuerza no están completas si no especificamos, además de su magnitud, la dirección y el sentido en los que se desarrollan.

- Notaciones comúnmente utilizadas para representar vectores:

$$\vec{A} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

donde los símbolos $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ representan los **vectores unitarios** a lo largo de las tres **direcciones mutuamente ortogonales** que constituyen la **base** del espacio de coordenadas cartesiano de tres dimensiones:

$$\hat{\imath} = \{1, 0, 0\}$$

$$\hat{\jmath} = \{0, 1, 0\}$$

$$\hat{k} = \{0, 0, 1\}$$

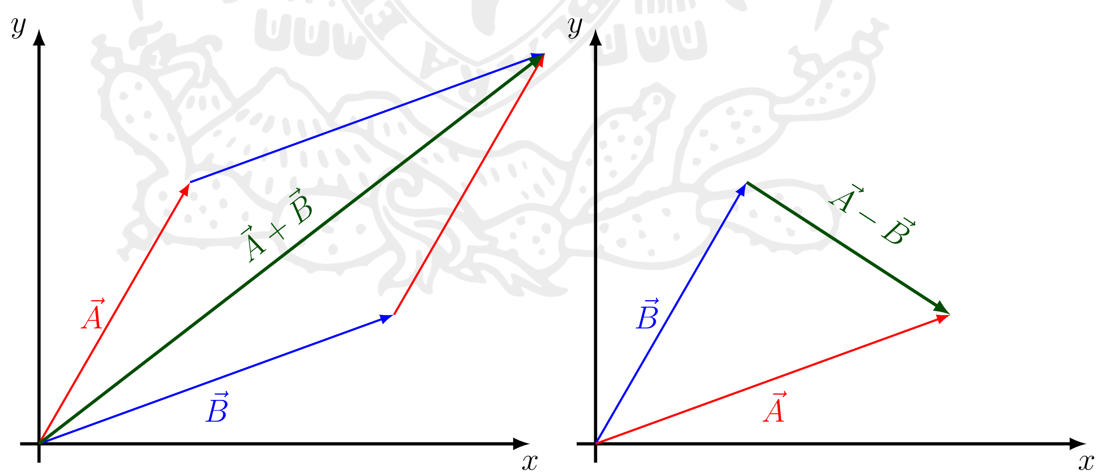
- Suma y diferencia de vectores

$$\vec{A} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = \{b_x, b_y, b_z\} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \{(a_x + b_x), (a_y + b_y), (a_z + b_z)\} = (a_x + b_x)\hat{\imath} + (a_y + b_y)\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\hat{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \{(a_x - b_x), (a_y - b_y), (a_z - b_z)\} = (a_x - b_x)\hat{\imath} + (a_y - b_y)\hat{\jmath} + (a_z - b_z)\hat{k}$$

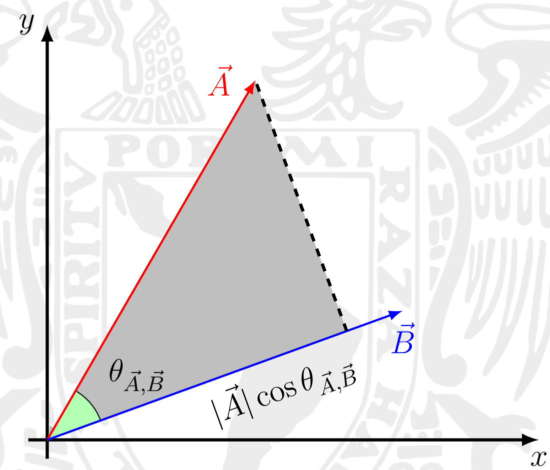


- Producto de un escalar por un vector:

$$
\begin{aligned}
c\vec{A} &= c\{a_x, a_y, a_z\} = c\left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right) \\
&= \{ca_x, ca_y, ca_z\} = \left(ca_x\hat{\imath} + ca_y\hat{\jmath} + ca_z\hat{k}\right)
\end{aligned}
$$

- Producto escalar de dos vectores: proyección de un vector sobre otro.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (a_x \times b_x) + (a_y \times b_y) + (a_z \times b_z) = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta_{\vec{A},\vec{B}}$$



Esto nos permite ver la relación entre el producto punto y la magnitud de un vector:

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = (a_x \times a_x) + (a_y \times a_y) + (a_z \times a_z) = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{A}|^2$$

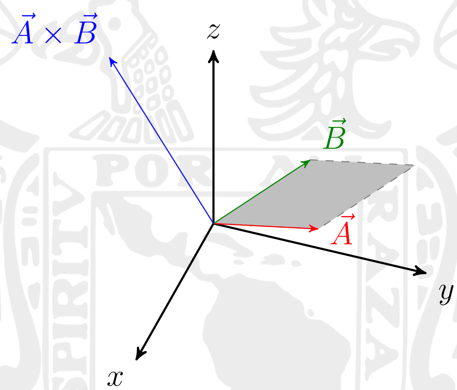
- La magnitud de un vector

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- Producto vectorial de dos vectores: el resultado de esta operación es el vector perpendicular al elemento de área generado por los dos factores.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left\{ \begin{array}{ccc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{array} \right\}$$
$$= (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\imath} - (a_x b_z - b_x a_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \operatorname{sen} \theta_{\vec{A},\vec{B}}$$



Problemas de vectores

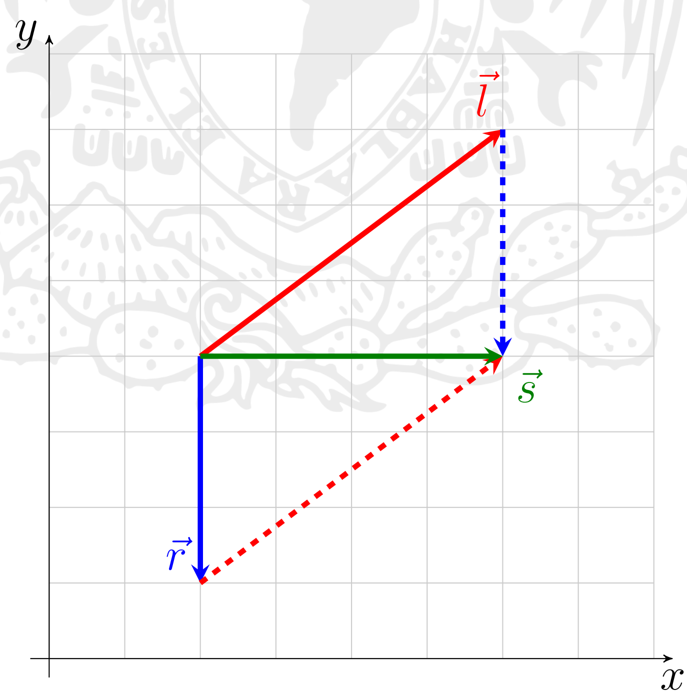
1. Una lancha puede viajar a una velocidad de $8\ \mathrm{km/h}$ en el agua tranquila de un lago. En la corriente de agua de un río, esta lancha puede moverse a una velocidad de $8\ \mathrm{km/h}$ relativa a la velocidad de la corriente. Si la velocidad de la corriente es de $3\ \mathrm{km/h}$, ¿qué tan rápido puede la lancha pasar a un árbol en la orilla cuando viaja (a) a favor de la corriente y (b) en contra de la corriente?

2. Un avión viaja hacia el este a una velocidad en el aire de $500\ \mathrm{km/h}$. Sin embargo, un viento de $90\ \mathrm{km/h}$ sopla hacia el sur. ¿Cuál es la dirección y la velocidad del avión relativos a la tierra? Si la velocidad del viento no cambia,

¿en qué dirección se debe de dirigir el avión para que su desplazamiento relativo con respecto a la tierra sea directamente hacia el este?

3. Un borracho irresponsable está jugando con una pistola en un avión que viaja directamente hacia el este a $500\ \mathrm{km/h}$. El borracho dispara el arma directamente hacia arriba en dirección del techo del avión. La bala abandona el arma a una velocidad de $1000\ \mathrm{km/h}$. De acuerdo con alguien parado en la tierra, ¿qué ángulo hace la bala con respecto a la vertical?

4. Una lancha, propulsada de manera que viajaría a una rapidez de $0.50\ \mathrm{m/s}$ en el agua quieta, se mueve directamente a través de un río que tiene $60\ \mathrm{m}$ de ancho. El río fluye con una rapidez de $0.30\ \mathrm{m/s}$. (a) ¿A qué ángulo, relativo a la dirección recta transversal del río, debe de ser dirigida esta lancha para llegar al otro lado precisamente a la misma altura que el punto del que partió? (b) ¿Cuánto tiempo le toma a la lancha cruzar el río?



Índice general

Capítulo 1

Mecánica

1.1. Semana I: Cinemática

Matemáticas: Trigonometría, derivadas, integrales.

- Cinemática: Movimiento en una dimensión.
- Movimiento rectilíneo uniforme: la velocidad constante.
- Movimiento uniformemente acelerado: la caída libre.
- Tiro parabólico (movimiento en dos y tres dimensiones).
- Resistencia del aire. Cuando la aceleración no es constante.

1.1.1. La cinemática

La cinemática es una rama de la mecánica clásica que estudia el movimiento de los cuerpos sin tomar en consideración las causas que lo producen.

Para estudiar el movimiento primero tenemos que entender dos conceptos básicos, posición y tiempo, con los que se busca describir el estado de un sistema en todo momento. Se comienza por establecer un sistema de referencia y elegir un sistema de coordenadas, a partir de los cuales la posición de un objeto en una, dos o tres dimensiones se define como el desplazamiento a lo largo de cada una de las direcciones del sistema de coordenadas elegido desde el punto de referencia establecido.

La posición es un conjunto de cantidades escalares (números reales) que nos permiten determinar el lugar que ocupa un cuerpo u objeto en un espacio de coordenadas espaciales (1D: línea; 2D: plano; 3D: espacio tridimensional; ND...). En mecánica se considera que estas cantidades tienen unidades de desplazamiento espacial y dependiendo del sistema de coordenadas que utilicemos este puede tratarse por ejemplo de desplazamientos lineales o angulares.

Discutir: Los sistemas de coordenadas y los sistemas de referencia.

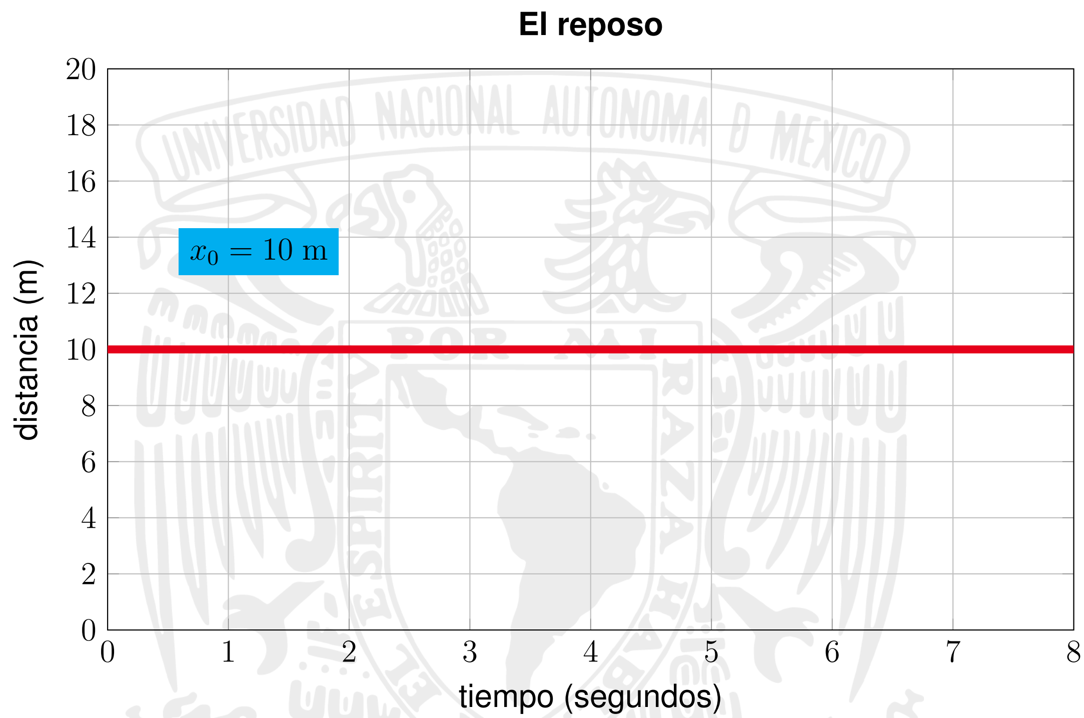
El objetivo de la cinemática consiste en describir la *trayectoria* de un cuerpo a lo largo de un período de tiempo determinado. De una manera muy simple, la trayectoria la podemos pensar como una gráfica en la que asociamos un valor de posición a cada “instante” de tiempo. Entonces se necesita construir el conjunto de posiciones por las que ha pasado o pasará un cuerpo a medida que avanza el tiempo.

1.1.2. El reposo: la posición constante

En términos de cinemática, la situación más simple en la que podemos pensar es aquella en la que la posición de un cuerpo no cambia, es decir que permanece constante al pasar el tiempo. A esta situación tan particular se le conoce como *reposo*. En este caso se dice que la posición es *independiente del tiempo*, ya que a pesar de que el tiempo avanza sin detenerse, la posición del objeto no presenta ningún cambio.

Entonces la trayectoria en una dimensión de una partícula en reposo que al tiempo de referencia $t = t_0$ se encuentra en la posición $x = x_0$ estará dada simplemente por $x(t) = x_0$ donde x_0 es una constante. (Quizás aquí un estudiante podría pasar al pizarrón a dibujar esta trayectoria).

$$x(t) = x_0 = cte.$$



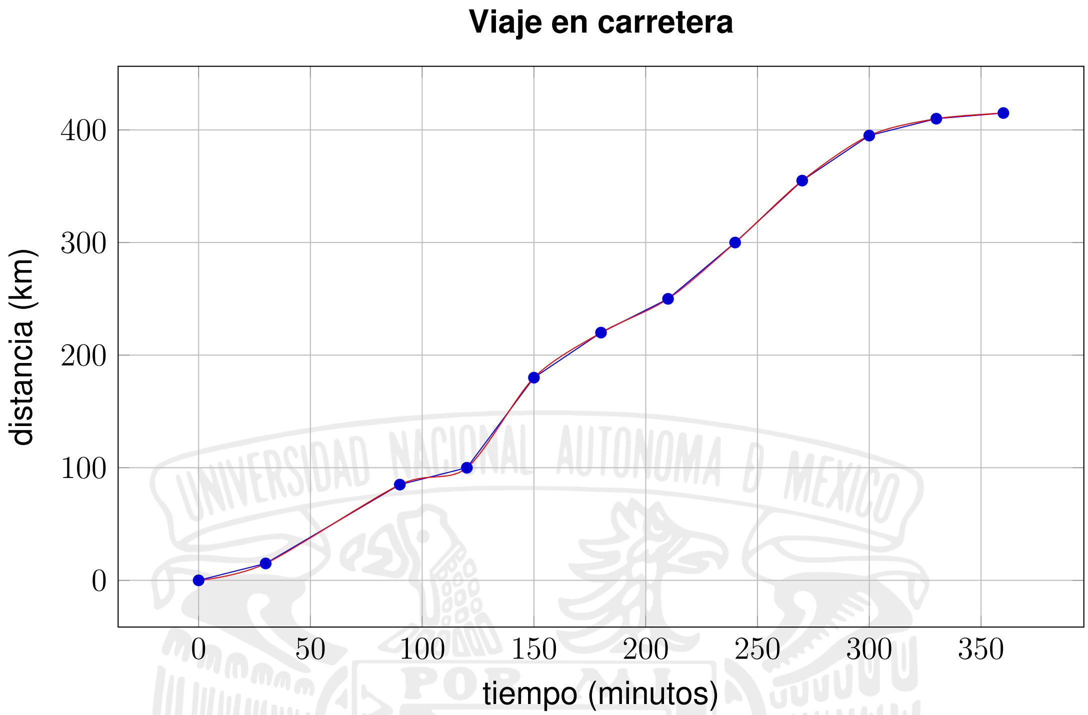
Esta situación es un caso particular ($v = 0$) del problema que analizaremos a continuación.

1.1.3. Movimiento rectilíneo uniforme: la velocidad constante

Cuando un cuerpo no se encuentra en reposo, para describir el estado de movimiento es necesario conocer también qué tanto cambia la posición conforme avanza el tiempo, es decir, se necesita conocer el ritmo de cambio de la posición en el tiempo. La cantidad física que se utiliza para esto es la que conocemos con el nombre de *velocidad* y sus unidades estarán dadas en términos de las unidades elegidas para determinar la posición del objeto y de la unidad elegida para medir el paso del tiempo. En otras palabras este parámetro nos indica el ritmo o proporción de cambio de la distancia recorrida por un cuerpo (el desplazamiento) a lo largo de un periodo de tiempo dado.

NOTA: Ver documento Cinematica01.nb

Hora	tiempo (minutos)	distancia (km)
8:00	0	0
8:30	30	15
9:30	90	85
10:00	120	100
10:30	150	180
11:00	180	220
11:30	210	250
12:00	240	300
12:30	270	355
13:00	300	395
13:30	330	410
14:00	360	415



Introducción a la utilización de las herramientas del cálculo diferencial e integral en la física: velocidad promedio y velocidad instantánea.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Discutir: unidades de la velocidad.

Supongamos ahora que tenemos un cuerpo que se mueve con velocidad constante, digamos v_0, distinta de cero. ¿Cómo podemos extraer la trayectoria de la partícula únicamente a partir de esta información? De acuerdo con lo que acabamos de ver,

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Entonces, la pregunta que hemos planteado nos dice que $v = v_0$, lo cual es equivalente a:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 = \mathrm{cte}$$

Esto es una ecuación diferencial y tal como las igualdades y desigualdades estudiadas en álgebra, esta herramienta matemática establece una relación o regla que deben cumplir una serie de parámetros y variables, pero en este caso involucra además a los cambios (derivadas) de las variables mismas. Ahora, así como la suma y la resta o la multiplicación y la división, la derivada y la integral son operaciones complementarias y opuestas. Por lo tanto, para encontrar la ecuación de la trayectoria para el cuerpo que se desplaza a velocidad constante a continuación lo que tenemos que hacer es integrar a ambos lados la ecuación anterior:

$$\int \mathrm{d}x = \int v_0 \mathrm{d}t$$

De este modo tenemos que la trayectoria del cuerpo que se desplaza con velocidad constante está dada por:

$$\boxed{x(t) = v_0 t + C_0} \tag{1.1}$$

Discusión:

- ¿Qué tipo de gráfica representa esta ecuación?
- ¿Qué significado físico tiene la constante de integración C_0? Quizás convenga reescribir las integrales incluyendo los límites de integración. Poner énfasis en que cada término que aparece en una expresión matemática **tie-**

ne que tener un significado físico.

$$\int_{x_0}^{x(t)} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} v_0 \mathrm{d}t'$$

$$x\Big|_{x_0}^{x(t)} = v_0 t'\Big|_{t_0}^{t}$$

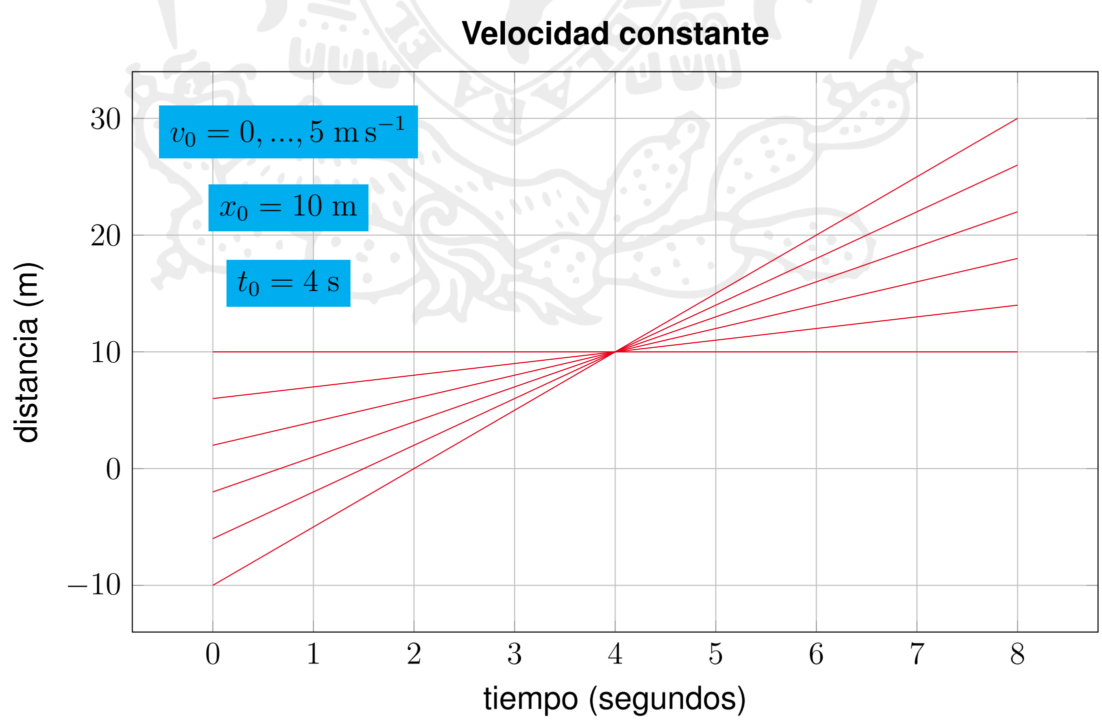
$$x(t) - x_0 = v_0(t - t_0)$$

Por lo tanto:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) \tag{1.2}$$

donde desde los límites de integración se ha establecido que x_0 corresponde a la posición del cuerpo al tiempo $t = t_0$.

- Hacer gráficas de velocidad como función del tiempo y de posición como función del tiempo en las que se observe el significado de las operaciones de derivación e integración.



Ejercicio: velocidad promedio Un corredor recorre una pista de $200\ \mathrm{m}$ en $25\ \mathrm{s}$. ¿Cuál es (a) la rapidez promedio y (b) la velocidad promedio del corredor?

(a) La rapidez promedio será la distancia neta recorrida entre el tiempo que le toma recorrerla:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200\ \mathrm{m}}{25\ \mathrm{s}} = 8.0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

(b) Dado que el recorrido comenzó y terminó en el mismo punto, el vector de desplazamiento tiene longitud zero:

$$|\bar{\vec{v}}| = \frac{0\ \mathrm{m}}{25\ \mathrm{s}} = 0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

1.1.4. Movimiento uniformemente acelerado: la caída libre.

Aceleración: ritmo de cambio de la velocidad como función del tiempo.

Discutir: las unidades de la aceleración.

Aceleración promedio e instantánea. Una vez más el cálculo.

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

Veamos ahora qué pasa cuando tenemos un cuerpo que se desplaza con aceleración constante a_0.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = a_0$$

Una vez más nos encontramos con una ecuación diferencial que tenemos que resolver.

A continuación se realiza prácticamente el mismo proceso que se siguió en la sección anterior y quizás convenga involucrar a uno o más estudiantes para que realicen los pasos del cálculo, deduzcan la ecuación de movimiento, interpreten las constantes de integración, den un significado físico claro a cada uno de los términos de las ecuaciones de posición y velocidad, dibujen las gráficas en pizarrón, etc...

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0$$

$$\int \mathrm{d}v = \int a_0 \mathrm{d}t$$

$$v(t) = a_0 t + C_0$$

$$v(t=0) = C_0 = v_0$$

$$\boxed{v(t) = a_0 t + v_0} \tag{1.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_0 t + v_0$$

$$\int \mathrm{d}x = \int a_0 t \mathrm{d}t + \int v_0 \mathrm{d}t$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + C_1$$

$$x(t=0) = C_1 = x_0$$

Por lo tanto,

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2} \tag{1.4}$$

Ahora con los límites en la integral:

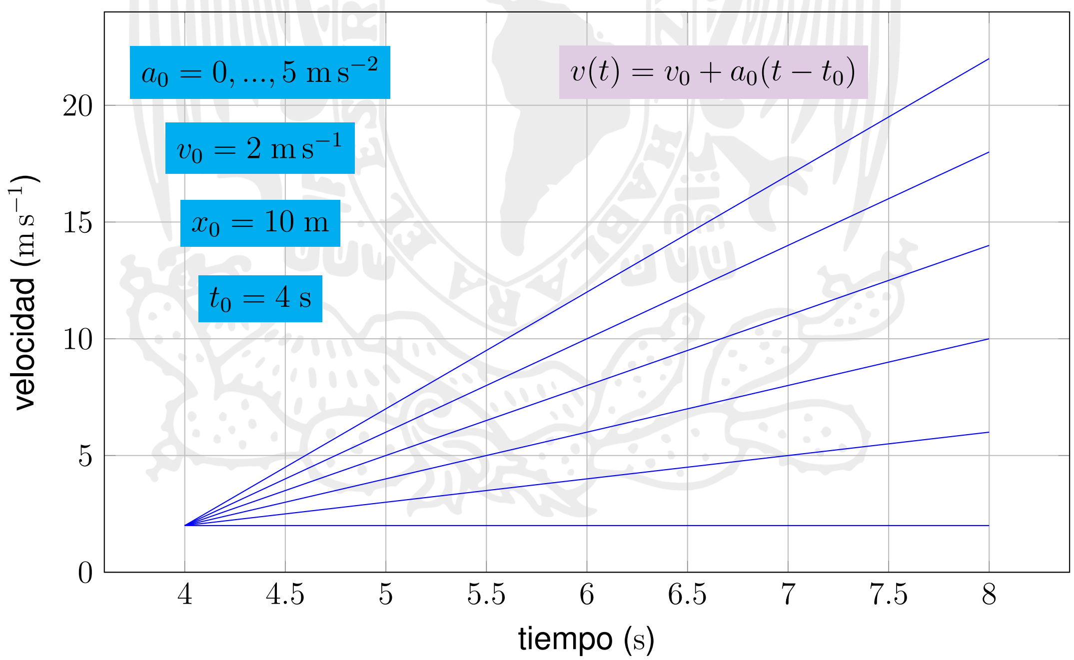
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \mathrm{d}v' = \int_{t_0}^{t} a_0 \mathrm{d}t'$$

$$(v(t) - v_0) = a_0(t - t_0)$$

Así se llega a la ecuación para velocidad en todo tiempo $v(t)$ de un objeto en el movimiento uniformemente acelerado y que al tiempo t_0 tiene velocidad v_0:

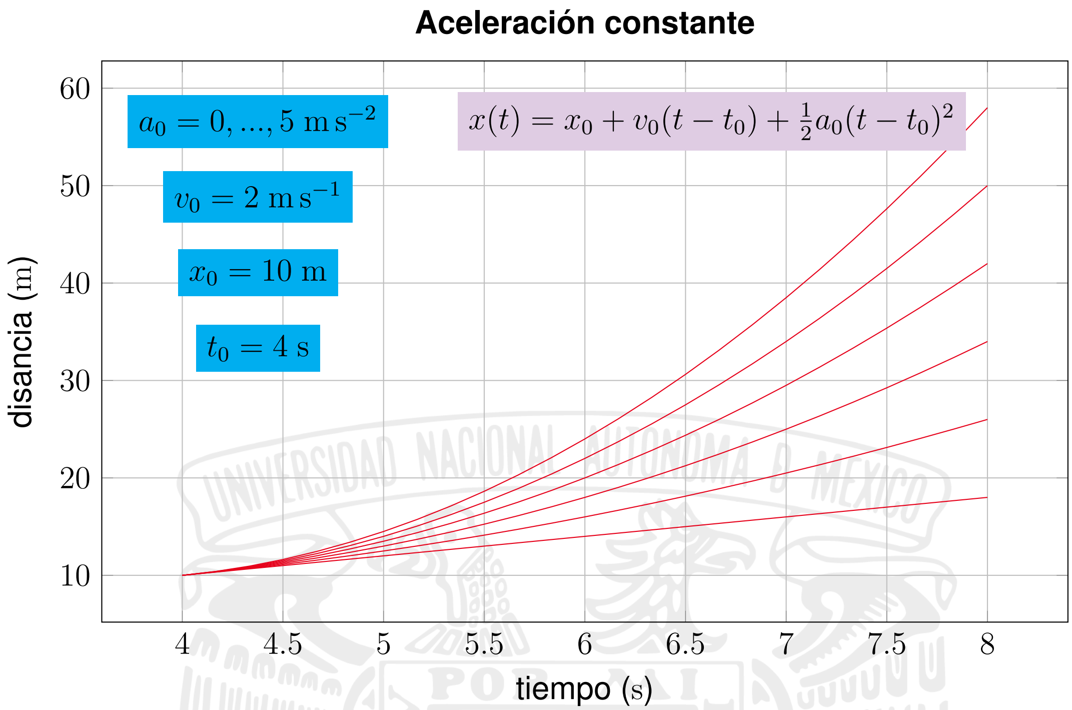
$$\boxed{v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)} \tag{1.5}$$



$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v_0 + a_0(t - t_0) \\
\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' &= \int_{t_0}^{t} v_0 \mathrm{d}t' + \int_{t_0}^{t} a_0(t - t_0)\mathrm{d}t' \\
(x(t) - x_0) &= v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} a_0 t \mathrm{d}t' - \int_{t_0}^{t} a_0 t_0 \mathrm{d}t' \\
&= v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 t^2 \Big|_{t_0}^{t} - a_0 t_0 (t - t_0) \\
&= v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 t^2 - \frac{1}{2} a_0 t_0^2 - a_0 t_0 t + a_0 t_0^2 \\
&= v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \frac{1}{2} a_0 t_0^2 - a_0 t_0 t \\
&= v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 \left(t^2 - 2 t_0 t + t_0^2\right) \\
&= v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2
\end{aligned}
$$

Finalmente, se llega a la ecuación para el movimiento uniformemente acelerado de un objeto cuya posición a todo tiempo es $x\,(t)$ y que al tiempo t_0 está en la posición x_0 con velocidad v_0:

$$
\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2} \tag{1.6}
$$



La serie de Taylor: expansión en series de potencias

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}
$$

Combinando las dos ecuaciones de movimiento 1.6 y 1.5 que acabamos de encontrar, podemos deducir una tercera que resulta útil en la solución de algunos problemas. Para esto tomamos la ecuación de la velocidad 1.5 y la elevamos al cuadrado:

$$v^2 = v_0^2 + a_0^2(t - t_0)^2 + 2v_0a_0(t - t_0)$$

$$2v_0a_0(t - t_0) = v^2 - v_0^2 - a_0^2(t - t_0)^2$$

A continuación, multiplicamos por $2a_0$ a la segunda ecuación 1.6

$$2a_0(x - x_0) = 2a_0v_0(t - t_0) + a_0^2(t - t_0)^2$$

Ahora despejamos $2v_0a_0(t - t_0)$ de ambas ecuaciones e igualamos los resultados

$$2a_0(x - x_0) - a_0^2(t - t_0)^2 = v^2 - v_0^2 - a_0^2(t - t_0)^2$$

para llegar a que

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0)} \tag{1.7}$$

De este modo podemos expresar el desplazamiento realizado a un tiempo dado t como función únicamente de la velocidad inicial, de la velocidad al tiempo en cuestión t y de la aceleración a_0:

$$\boxed{\Delta x(t) = (x(t) - x_0) = \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2a_0}} \tag{1.8}$$

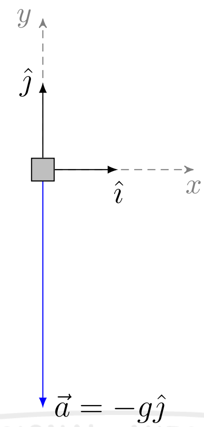


Figura 1.1: Caída libre

La caída libre: sin fricción

Como primer ejemplo del movimiento uniformemete acelerado (aceleración constante) estudiemos el movimiento de un cuerpo bajo la influencia de la fuerza de gravedad, pero ignorando la fricción del aire. Si se ignora esta fricción o resistencia fluido dinámica, el objeto en caída libre cerca de la superficie de la tierra es un sistema con aceleración constante, la aceleración debida a la atracción gravitacional que ejerce la tierra sobre el objeto. El movimiento de este cuerpo está entonces dado por las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -g \qquad \left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g\right) \tag{1.9a}$$

$$v_y(t = t_0) = v_{y0} \tag{1.9b}$$

$$y(t = t_0) = y_0 \tag{1.9c}$$

donde y_0 y v_{y0} son respectivamente la altura y la velocidad a la que se encuentra el objeto al tiempo t_0.

Así, el movimiento del objeto como función del tiempo estaría determinado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2, \tag{1.10a}$$

$$v_y(t) = v_{y0} - g(t - t_0) \tag{1.10b}$$

$$(y(t) - y_0) = -\frac{v(t)^2 - v_0^2}{2g} \tag{1.10c}$$

Nuestra experiencia nos dice que los cuerpos caen hacia el suelo. Pero, ¿qué características tiene este movimiento? Nos han enseñado que se trata de un movimiento uniformemente acelerado $a = g \sim 9.81\ \mathrm{ms}^{-1}$, pero ¿cómo sabemos esto?, ¿qué experimentos podríamos hacer para llegar a esta conclusión o en todo caso para corroborar esta suposición?

- Plantear los casos en los que el objeto es dejado caer desde el reposo, cuando es lanzado hacia arriba, cuando es lanzado hacia abajo, etc, etc...
- Dibujar las gráficas de posición y velocidad como función del tiempo. Identificar puntos importantes en estas gráficas: posiciones y velocidades iniciales y finales.

y_0	v_{y0}	Situación al tiempo $t = t_0$
0	0	Soltado del reposo desde la posición del sistema de referencia
0	> 0	Lanzado hacia arriba desde la posición del sistema de referencia
0	< 0	Lanzado hacia abajo desde la posición del sistema de referencia
> 0	0	Soltado del reposo por encima de la posición del sistema de referencia
> 0	> 0	Lanzado hacia arriba por encima de la posición del sistema de referencia
> 0	< 0	Lanzado hacia abajo por encima de la posición del sistema de referencia
< 0	0	Soltado del reposo por debajo de la posición del sistema de referencia
< 0	> 0	Lanzado hacia arriba por debajo de la posición del sistema de referencia
< 0	< 0	Lanzado hacia abajo por debajo de la posición del sistema de referencia

Nota: ver documento CaidaLibre01.nb, primera sección.

La caída no tan libre: con fricción

Observaciones:

- El análisis anterior nos lleva a concluir que sin importar sus masas, todos los cuerpos caen de la misma manera, es decir, tardan el mismo tiempo en recorrer distancias iguales.
- Sin embargo, nuestra experiencia nos dice que una pluma y una bola de plomo no tardan el mismo tiempo en llegar al piso cuando son soltados simultáneamente desde la misma altura.
- Las diferencias en las trayectorias perecen tener que ver no sólo con la masa de los objetos sino también con la forma de los mismos y sobre todo con la superficie que presentan en la dirección del desplazamiento.
- El aire presenta una resistencia o fierza que tiende a oponerse al movimiento y cuanto más rápido es el desplazamiento, mayor es la fuerza de fricción ejercida por el aire.

Para dar cuenta de estas observaciones, estudiemos este mismo problema pero ahora considerando la fricción del aire como una fuerza directamente proporcional a la velocidad del cuerpo.

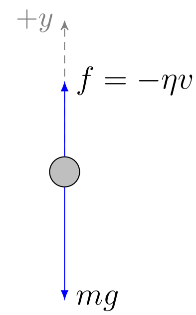


Figura 1.2: Caída libre con fricción del aire f directamente proporcional a la velocidad.

Hipótesis: La fuerza fricción que ejerce el aire sobre un cuerpo en movimiento es directamente proporcional a la velocidad del cuerpo y siempre se opone al movimiento. En general esto lo escribiríamos de la siguiente manera:

$$\vec{f} = -\eta \vec{v} \tag{1.11}$$

El parámetro de proporcionalidad η es conocido como el coeficiente de fricción fluido dinámica y contiene información concerniente a la forma y composición, tanto del cuerpo en movimiento como del medio en el que se produce el movimiento, en este caso el aire. Nota: el coeficiente η es en principio distinto a nivel del mar y en la ciudad de México.

¿Cuáles son las unidades del coeficiente de fricción fluido-dinámica η? Al analizar las unidades en la ecuación 1.11, para que se cumpla la igualdad tenemos que:

$$\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} = -[\eta]\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$[\eta] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

Ahora el problema de caída en presencia del aire lo planteamos desde un principio escribiendo una suma de fuerzas y utilizando la primera ley de Newton,

$\vec{F} = m\vec{a}$ (fuerzas y leyes de Newton se verán con más detalle en el siguiente tema).

Como se muestra en la figura, en nuestro problema hay dos fuerzas actuando sobre el cuerpo mientras cae. La fuerza de gravedad apunta siempre hacia abajo y es siempre constante e igual a $-mg$, donde hemos definido que la dirección positiva de nuestro eje de coordenadas apunta hacia arriba. Para simplificar el análisis, en este punto vamos a asumir que todo el movimiento se desarrolla únicamente en la dirección vertical, de modo que la fuerza de fricción y el peso están alineados a lo largo de esa dirección y basta con que estudiemos el movimiento en sólo una dimensión.

Entonces, la suma de fuerzas es igual a la fuerza total o efectiva $\vec{F}$ que es ejercida sobre el cuerpo en todo momento y al aplicar la ley de Newton obtenemos:

$$-mg - \eta v = ma \tag{1.12}$$

A continuación recordamos que $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ para obtener

$$-mg - \eta v = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}t = m\frac{\mathrm{d}v}{-mg - \eta v}$$

$$\int_0^t \mathrm{d}t = m\int_0^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v'}{-mg - \eta v'}$$

La integral del lado izquierdo, evaluada de 0 a t nos da simplemente t.

El lado derecho es un poco más complicado, ya que tenemos que resolver la integral

$$m\int_0^v \frac{\mathrm{d}v'}{-mg-\eta v'}$$

Para resolver esta integral recurrimos a un cambio de variable,

$$u = -mg - \eta v'$$

$$\mathrm{d}u = -\eta \mathrm{d}v'$$

$$\begin{aligned} m\int_0^v \frac{\mathrm{d}v'}{-mg-\eta v'} &= -\frac{m}{\eta}\int_{-mg}^{-mg-\eta v}\frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= -\frac{m}{\eta}\ln u\Big|_{-mg}^{-mg-\eta v} \\ &= -\frac{m}{\eta}\ln\left(\frac{-mg-\eta v}{-mg}\right) \\ &= -\frac{m}{\eta}\ln\left(1+\frac{\eta v}{mg}\right) = t \end{aligned}$$

$$\ln\left(1+\frac{\eta v}{mg}\right) = -\frac{\eta}{m}t$$

Aplicando ahora la función exponencial a ambos lados de la ecuación,

$$\left(1+\frac{\eta v}{mg}\right) = e^{-\frac{\eta}{m}t}$$

Ahora despejamos v y obtenemos la primera mitad de nuestra ecuación de la trayectoria:

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{\eta}\left(e^{-\frac{\eta}{m}t}-1\right)} \tag{1.14}$$

Para obtener la posición como función del tiempo simplemente tenemos que recordar que en este caso $v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, por lo que solamente tenemos que integrar la última ecuación:

$$\int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y = \int_{0}^{t} \frac{mg}{\eta} \left(e^{-\frac{\eta}{m}t'} - 1\right) \mathrm{d}t'$$

$$\begin{aligned}
(y - y_0) &= \frac{mg}{\eta} \left(\int_0^t e^{-\frac{\eta}{m}t'} \mathrm{d}t' - \int_0^t \mathrm{d}t' \right) \\
&= \frac{mg}{\eta} \left[-\frac{m}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{\eta}{m}t'} (-\frac{\eta}{m}\mathrm{d}t') - t'\Big|_0^t \right] \\
&= -\frac{mg}{\eta} \left[\frac{m}{\eta} \left(e^{-\frac{\eta}{m}t'}\Big|_0^t \right) + t \right] \\
&= -\frac{mg}{\eta} \left[\frac{m}{\eta} \left(e^{-\frac{\eta}{m}t} - 1 \right) + t \right]
\end{aligned}$$

Nota: integral de la función exponencial

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Nota: ver documento CaidaLibre01.nb, segunda sección.

Ejercicio: caída libre

- ¿Cuál es la ecuación de movimiento de un objeto que es dejado caer a partir de una altura $y = y_0$ desde el reposo ($v_{y0} = 0 \text{ ms}^{-1}$) a un tiempo $t_0 = 0$ s?

$$\vec{a} = -g\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_y(t) = (v_{y0} - g(t - t_0))\hat{\jmath}$$
$$\vec{y}(t) = \left(y_0 + v_{y0}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2\right)\hat{\jmath}$$

Dado que el objeto parte del reposo $v_{y0} = 0 \text{ ms}^{-1}$ a una altura $y = y_0$,

$$\begin{aligned}\vec{y}(t) =& (y_0 - \frac{1}{2}gt^2)\hat{\jmath}\\ \vec{v}_y(t) =& -gt\hat{\jmath}\end{aligned} \tag{1.15}$$

- ¿Cuánto tiempo le toma llegar al suelo $y = 0$?

$$\vec{y}(t_s) = (y_0 - \frac{1}{2}gt_s^2)\hat{\jmath} = 0$$

Despejando,

$$t_s = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \tag{1.16}$$

- ¿Qué velocidad $\vec{v}_y(t_s)$ tenía el objeto al golpear el suelo?

$$\vec{v}_y(t_s) = -gt_s\hat{\jmath} = -g\sqrt{\frac{2y_0}{g}}\hat{\jmath} = -\sqrt{2y_0g}\hat{\jmath}$$

- ¿Cuál fue la velocidad promedio de la caída?

$$\bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{-y_0}{\sqrt{2y_0/g}}\hat{\jmath} = -\sqrt{\frac{1}{2}y_0g}\hat{\jmath}$$

Ejercicio: Un objeto es lanzado directamente hacia arriba con una velocidad $v = v_{y0}$ desde una altura $y = y_0$. Después de alcanzar su altura máxima, el objeto cae hasta el suelo en $y = 0\ \mathrm{m}$.

El conjunto de ecuaciones que determina el movimiento del objeto es:

$$\vec{a} = -g\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_y(t) = (v_{y0} - g(t - t_0))\hat{\jmath}$$
$$\vec{y}(t) = \left(y_0 + v_{y0}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2\right)\hat{\jmath}$$

Con la información del problema y suponiendo que el momento en el que el objeto es lanzado es el tiempo $t = 0\ \mathrm{s}$

$$\vec{v}_y(t) = (v_{y0} - gt)\hat{\jmath}$$

$$\vec{y}(t) = \left(y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{\jmath}$$

- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto? La altura máxima se alcanza cuando la velocidad del objeto es igual a cero (la primera derivada se anula, la segunda derivada es negativa, -g)

  $$\vec{v}_y(t_{max}) = (v_{y0} - gt_{max})\hat{\jmath} = 0$$

  De modo que:

  $$t_{max} = \frac{v_{y0}}{g}$$

  $$\vec{y}(t_{max}) = \left(y_0 + v_{y0}t_{max} - \frac{1}{2}gt_{max}^2\right)\hat{\jmath} = \left(y_0 + \frac{v_{y0}^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_{y0}^2}{g}\right)\hat{\jmath} = \left(y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{y0}^2}{g}\right)\hat{\jmath}$$

- ¿Cuál es su rapidez al llegar al suelo?

Para responder a esta pregunta, necesitamos para empezar determinar el tiempo t_s transcurrido hasta que el objeto llega al suelo:

$$\vec{y}(t_s) = \left(y_0 + v_{y0}t_s - \frac{1}{2}gt_s^2\right)\hat{\jmath} = 0$$

Para encontrar t_s se debe resolver la ecuación cuadrática. También se puede aprovechar un resultado del problema anterior y considerar que el objeto caerá del reposo desde una altura y_{max}, de modo que el tiempo de caida desde la altura máxima será:

$$t_{caida} = \sqrt{\frac{2y_{max}}{g}} = \sqrt{\frac{2\left(y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{y0}^2}{g}\right)}{g}} = \sqrt{\frac{2y_0}{g} + \frac{v_{y0}^2}{g^2}}$$

y a este agregar el tiempo que le toma llegar al máximo t_{max} que se encontró antes

$$t_s = \frac{v_{y0}}{g} + \sqrt{\frac{2y_0}{g} + \frac{v_{y0}^2}{g^2}}$$

Por último, para encontrar la rapidez final, necesitamos sustituir el tiempo t_s en la ecuación de la velocidad

$$\vec{v}_y(t_s) = (v_{y0} - gt_s)\hat{\jmath}$$

$$v_y(t_s) = v_{y0} - g\left(\frac{v_{y0}}{g} + \sqrt{\frac{2y_0}{g} + \frac{v_{y0}^2}{g^2}}\right) = \sqrt{2y_0g + v_{y0}^2}$$

Ejercicio: ¿Es posible que un coche haya acelerado hasta $55\ \mathrm{mph}$ en $268\ \mathrm{m}$ si el coche puede sólo acelerar desde $0\ \mathrm{mph}$ hasta $60\ \mathrm{mph}$ en $15\ \mathrm{s}$?

Lo primero que tenemos que encontrar es la aceleración máxima que puede alcanzar el coche y lo haremos en $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

$$\begin{aligned}
1\ \mathrm{milla} &= 1609.344\ \mathrm{m} \\
&\approx 1.6 \times 10^3\ \mathrm{m} \\
1\ \mathrm{h} &= 3600\ \mathrm{s} \\
&= 3.6 \times 10^3\ \mathrm{s} \\
a_{max} &= \frac{v_f - v_i}{\Delta t} \\
&= \frac{60\ \mathrm{mph} - 0\ \mathrm{mph}}{1.5 \times 10^1\ \mathrm{s}} = \frac{60\ \mathrm{mph}(1.6 \times 10^3\ \mathrm{m/milla})/(3.6 \times 10^3\ \mathrm{s/h})}{1.5 \times 10^1\ \mathrm{s}} \\
&= \frac{6 \times 1.6}{3.6 \times 1.5}\ \mathrm{m\,s^{-2}} \simeq 1.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}
\end{aligned}$$

Ahora necesitamos saber cuánto tiempo le tomaría alcanzar la velocidad de $55\ \mathrm{mph}$ asumiendo que se utilice su velocidad máxima a_{max}.

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{\Delta v}{a_{max}} = \frac{55\ \mathrm{mph} - 0\ \mathrm{mph}}{1.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}} \\
&= \frac{5.5 \times 10^1\ \mathrm{mph}(1.6 \times 10^3\ \mathrm{m/milla})/(3.6 \times 10^3\ \mathrm{s/h})}{1.8\ \mathrm{m\,s^2}} = \frac{5.5 \times 1.6}{1.8 \times 3.6} 10^1\ \mathrm{s} \\
&= 13.5\ \mathrm{s}
\end{aligned}$$

Finalmente nos restaría determinar la distancia recorrida por el coche en movimiento uniformemente acelerado durante este período de tiempo

$$\begin{aligned}\Delta x &= v_i t + \frac{1}{2}a_{max}t^2, \quad \text{con } v_i = 0\\ &= \frac{1}{2}a_{max}t^2 = \frac{1}{2}(1.8\ \mathrm{m\,s^{-2}})(13.5\ \mathrm{s})^2\\ &= 164.025\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

Solución alternativa: recordemos que habíamos encontrado que

$$v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0)$$

$$\begin{aligned}v_f^2 &= v_i^2 + 2a(x - x_i), \quad \text{con } v_i = 0 \text{ y } (x - x_i) = \Delta x\\ &\Rightarrow \quad v_f^2 = 2a_{max}\Delta x\\ i.e. \quad \Delta x &= \frac{v_f^2}{2a_{max}}\\ &= \frac{v_f^2}{2a_{max}} = \frac{\left[5.5\times 10^1\ \mathrm{mph}(1.6\times 10^3\ \mathrm{m/milla})/(3.6\times 10^3\ \mathrm{s/h})\right]^2}{2(1.8\ \mathrm{m\,s^2})}\\ &\simeq 166\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

1.1.5. El tiro parabólico

- Movimiento en más de una dimensión. La posición, la velocidad, la aceleración en más de una dimensión. Los vectores en la física.
- Aplicación de las ecuaciones de movimiento deducidas en las secciones anteriores al movimiento en dos y tres dimensiones.
- La trigonometría: magnitudes y direcciones de cantidades vectoriales y sus significados físicos.

El tiro parabólico consiste en un movimiento en dos o más dimensiones en las que al menos una de ellas presenta una aceleración constante. Se le llama de esta manera debido a que la trayectoria de un objeto en esta situación describe una parábola.

El caso más simple que podemos pensar consiste en el movimiento de un objeto que es lanzado cerca de la superficie de la tierra (se asume aceleración constante $-g$) y en cuyo análisis despreciamos la resistencia fluido-dinámica (fricción del aire).

En este caso nos conviene elegir un sistema de referencia tal que una de las direcciones coincida con la dirección vertical. De este modo nos aseguramos de que la aceleración de la gravedad actúe únicamente a lo largo de esta dirección y que en las direcciones perpendiculares el movimiento se reduzca a un movimiento rectilíneo uniforme. A continuación y sin pérdida de la generalidad, podemos rotar nuestro sistema de referencia alrededor de la dirección vertical de manera que la dirección del desplazamiento horizontal de nuestro objeto coincida con uno de los ejes de nuestro sistema de coordenadas. De esta manera reducimos el movimiento de nuestro objeto a un análisis en tan sólo dos coordenadas en lugar de tres.

Así, la descripción de nuestro movimiento ha sido separada en dos direcciones desacopladas de tal modo que:

- el desplazamiento en la dirección vertical ($\hat{\jmath}$) es un movimiento uniformemente acelerado, esto es con aceleración constante.

- el desplazamiento en la dirección horizontal ($\hat{\imath}$) es un movimiento rectilíneo uniformemente, es decir, con velocidad constante.

Figura 1.3: El tiro parabólico visto desde la perspectiva de la suma de vectores. Imagen tomadas de http://www.texample.net/tikz/examples/projectile/

Ejercicio: Escriba las ecuaciones de la trayectoria de un objeto que se mueve en un tiro parabólico bajo la influencia de la gravedad cerca de la superficie de la tierra despreciando la fricción fluido-dinámica debida al aire.

Ejercicio: En el tiro parabólico el *alcance* se define como la distancia hoizontal recorrida por un objeto desde su punto de lanzamiento hasta el lugar donde choca con el suelo, estando estos dos puntos a la misma altura o a alturas diferentes. Asumiendo que estos dos puntos están a la misma altura y despreciando la fricción del aire, encuentre el alcance máximo en un tiro parabólico como función de la dirección en la que es lanzado un proyectil.

Partamos de que el proyectil es lanzado inicialmente desde el origen de coordenadas con un vector de velocidad dado por $\vec{v}_i = \{v_{ix}, v_{iy}\} = v_i\{\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\}$. Entonces, el desplazamiento horizontal del proyectil es:

$$x(t) = v_{ix}t = (v_i \cos\theta)\, t$$

Por otro lado, el tiempo en el que este objeto regresa a la misma altura desde la que fue lanzado es tal que

$$y(t) = v_{iy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$v_{iy} - \frac{1}{2}gt = 0$$

$$t = \frac{2v_{iy}}{g} = \frac{2v_i}{g}\operatorname{sen}\theta$$

A continuación, encontramos el alcance del proyectil al sustituir este tiempo en la expresión encontrada para el desplazamiento horizontal:

$$x(t) = v_{ix}t = (v_i\cos\theta)\left(\frac{2v_i}{g}\operatorname{sen}\theta\right) = \frac{2v_i^2}{g}\cos\theta\operatorname{sen}\theta = \frac{v_i^2}{g}\operatorname{sen}2\theta$$

donde se utilizó la identidad trigonométrica $\cos\theta \operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}$. Ahora, es necesario encontrar el valor del ángulo θ para el que el alcance es máximo, de modo que

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{2v_i^2}{g}\cos 2\theta = 0$$

Esto implica que $\cos 2\theta = 0 \rightarrow 2\theta = \pi/2 \rightarrow \theta = \pi/4$

Ejercicio: Un arquero dispara una flecha con una velocidad de $30\,\mathrm{m/s}$ a un ángulo de $20°$ con respecto a la horizontal. Un asistente, parado al nivel del piso (mismo que el arquero) a una distancia de $30\,\mathrm{m}$ desde el punto del lanzamiento en la dirección del disparo, avienta una manzana directamente hacia arriba con la mínima velocidad necesaria para interceptar el trayecto de la fecha.

- ¿Cuál es la velocidad inicial de la manzana?
- ¿Cuánto tiempo antes o después de que la flecha es disparada tiene que ser lanzada la manzana para que la flecha le pegue a la manzana?

Para resolver este problema comencemos por considerar un sistema de coordenadas cartesiano con su origen en el punto de lanzamiento colocado en la posición del arquero y con su dirección unitaria vertical coincidente con la dirección de la aceleración de la gravedad. Así mismo, consideremos un tiempo de referencia $t = 0$ en el instante en el que la flecha abandona es disparada.

Con esta elección del sistema de referencia, tenemos que:

- La velocidad inicial de la flecha: $\vec{v}_{i,f} = \{v_{i,f}\cos\theta, v_{i,f}\operatorname{sen}\theta\}$ con $v_{i,f} = 30\,\mathrm{m/s}$ y $\theta = 20°$.
- La posición desde la que es lanzada la manzana: $\vec{X}_{i,m} = \{x_m, 0\}$ con $x_m = 30\,\mathrm{m}$.

Ecuaciones de movimiento:

- La flecha:

$$x_f(t) = (v_{i,f}\cos\theta)\,t$$

$$y_f(t) = (v_{i,f}\operatorname{sen}\theta)\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

- La manzana:

$$x_m(t) = x_m$$

$$y_m(t) = v_{i,m}(t - t_m) - \frac{1}{2}g(t - t_m)^2$$

$$\vec{v}_m(t) = \{0, v_{i,m} - g(t - t_m)\}$$

El momento del impacto $t = t_i$ es tal que:

$$\{x_f(t_i), y_f(t_i)\} = \{x_m(t_i), y_m(t_i)\}$$

De considerar únicamente el desplazamiento horizontal de la flecha e igualarlo a la posición de la manzana con respecto a la posición del lanzamiento de la fecha podemos obtener fácilmente el tiempo de impacto t_i con respecto al momento de lanzamiento de la flecha:

$$x_m = (v_{i,f}\cos\theta)\,t_i$$

$$t_i = \frac{x_m}{(v_{i,f}\cos\theta)}$$

La velocidad mínima necesaria de lanzamiento de la manzana para interceptar la trayectoria de la flecha es aquella para la cual la velocidad de la manzana al momento de alcanzar la trayectoria de la flecha es igual a cero

$$v_{f,m}^2 = v_{i,m}^2 - 2g(y_{f,m} - y_{i,m}) = 0$$

$$v_{i,m}^2 = 2gy_{imp} \qquad \Rightarrow \qquad y_{imp} = \frac{v_{i,m}^2}{2g}$$

A continuación podemos relacionar este último resultado con la altura de la flecha al momento del impacto con la manzana,

$$y_f(t_i) = (v_{i,f}\operatorname{sen}\theta)\, t_i - \frac{1}{2}gt_i^2 = y_{imp} = \frac{v_{i,m}^2}{2g}$$

$$(v_{i,f}\operatorname{sen}\theta)\, t_i - \frac{1}{2}gt_i^2 = \frac{v_{i,m}^2}{2g}$$

$$\begin{aligned} v_{i,m}^2 &= 2g\,(v_{i,f}\operatorname{sen}\theta)\, t_i - g^2 t_i^2 && (1.17)\\ &= 2g\,(v_{i,f}\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{x_m}{v_{i,f}\cos\theta}\right) - g^2\left(\frac{x_m}{v_{i,f}\cos\theta}\right)^2 && (1.18)\end{aligned}$$

Por lo que

$$v_{i,m} = \sqrt{2gx_m\tan\theta - \left(\frac{gx_m}{v_{i,f}\cos\theta}\right)^2}$$

$$v_{i,m} = \sqrt{2\; 9.8\ \mathrm{m/s^2}\ 30\ \mathrm{m}\ \tan 20^\circ - \left(\frac{9.8\ \mathrm{m/s^2}\ 30\ \mathrm{m}}{30\ \mathrm{m/s}\cos 20^\circ}\right)^2} = 10.26\ \mathrm{m/s}$$

Para responder a la segunda pregunta, teníamos que el tiempo de impacto con respecto al momento de lanzamiendo de la flecha es

$$t_i = \frac{x_m}{(v_{i,f}\cos\theta)} = \frac{30\ \mathrm{m}}{(30\ \mathrm{m/s}\ \cos 20^\circ)} = 1.06\ \mathrm{s}$$

Para encontrar el tiempo que le toma a la manzana llegar a la altura del impacto, recordemos que este sucede cuando la manzana alcanza su altura máxima. Entonces,

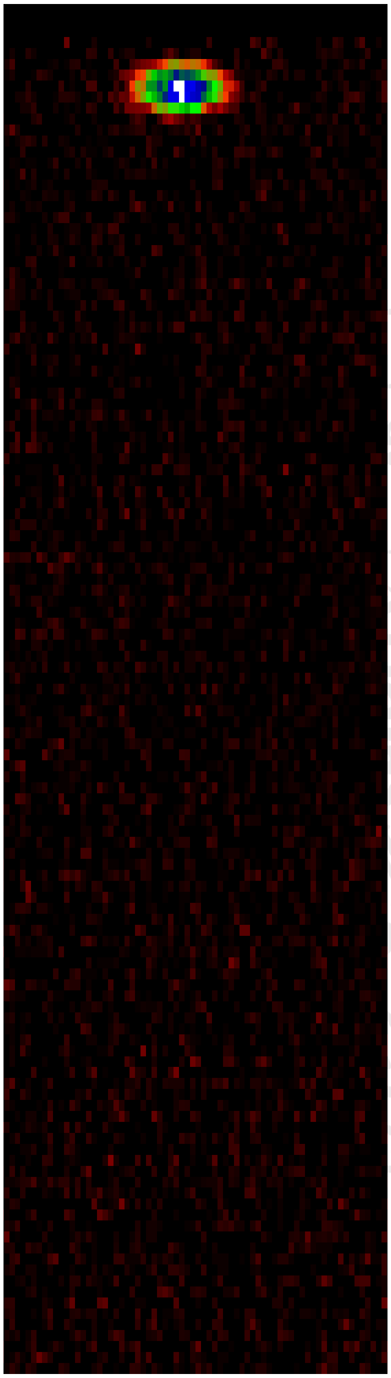
$$v_{i,m} - g(t - t_m) = 0$$

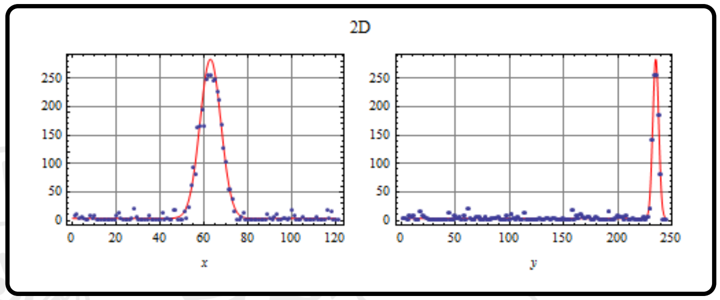
donde el periodo $(t - t_m)$ es el tiempo que le tomará a la manzana alcanzar dicha altura:

$$(t - t_m) = \frac{v_{i,m}}{g} = \frac{10.26 \text{ m/s}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 1.05 \text{ s}$$

Por lo tanto, la manzana tiene que ser lanzada alrededor de 10 ms después que la flecha.

Ejercicio: Análisis de la evolución temporal de una nube de átomos fríos al ser liberada de una trampa y medición de su temperatura.





1.2. Semana II: Dinámica

Matemáticas: Álgebra vectorial, producto punto, producto cruz, funciones trigonométricas.

- Dinámica en una o más dimensiones
- Fuerzas: fuerzas de fricción, la ley de Hooke (estático y dinámico), el movimiento circular uniforme, el péndulo simple.
- Trabajo y energía.
- La ley de gravitación universal de Newton.
- Las leyes de Kepler del movimiento planetario.

1.2.1. Dinámica en una dimensión.

Dinámica: estudio de las causas del movimiento y de los cambios del mismo.

1.2.2. La fuerza

- ¿Qué causa el movimiento?
- ¿Qué hacemos si queremos mover un objeto?
- ¿Una fuerza? ¿Qué es una fuerza?

La primera ley de Newton: “La ley de la inercia"

Todo cuerpo se mantendrá en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que se ejerza una fuerza **no nula** sobre él.

Si $\vec{F} = 0$:

$$\Rightarrow \qquad \vec{v} = \text{constante}$$

Si además la masa es constante (velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz c),

$$\Rightarrow \qquad m\vec{v} = \vec{p} = \text{constante}$$

donde $\bar{p}$ es el momento o cantidad de movimiento. Por lo tanto, la primera ley de Newton nos dice que a menos de que exista una fuerza neta distinta de cero, la cantidad de movimiento de un cuerpo permanece constante.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0$$

La segunda ley de Newton: “La ley de la fuerza"

Cuando se ejerce una fuerza no nula sobre un objeto, el cambio en la cantidad de movimiento de dicho objeto será proporcional a la fuerza aplicada. Esto es, si $\vec{F}_{\text{neta}} \neq 0$

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})$$

Si la masa es constante,

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Esto es:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \qquad (1.19)$$

La tercera ley de Newton: “La ley de la acción y de la reacción"

A toda acción corresponde una reacción igual en magnitud y dirección, pero en el sentido opuesto a la acción original.

Supongamos que un cuerpo de masa M ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre un cuerpo de masa m. Entonces la segunda ley de Newton nos dice que la masa m experimentará una aceleración $\vec{a}_m$ tal que

$$\vec{F} = m\vec{a}_m$$

La tercera ley de Newton nos dice entonces que la masa M experimentará una fuerza idéntica a $\vec{F}$ pero en sentido contrario, es decir $-\vec{F}$, por lo que la segunda ley nos indica que el cuerpo de masa M experimentará una aceleración $\vec{a}_M$ tal que

$$-\vec{F} = M\vec{a}_M$$

Esto implica que

$$-m\vec{a}_m = M\vec{a}_M$$

$$\boxed{\Rightarrow \qquad \frac{m}{M} = -\frac{\vec{a}_M}{\vec{a}_m}} \tag{1.20}$$

Nota: validez de las leyes de Newton

- Estas leyes son válidas en sistemas de referencia inerciales, es decir, sistemas de referencia en reposo o que se mueven a velocidad constante. Un sistema de referencia no-inercial es aquel que está siendo acelerado.

- Límite relativista: las velocidades involucradas deben de ser muy pequeñas en comparación con la velocidad de la luz.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ejercicios

- Un objeto de 5 kg experimenta una aceleración de 0.3 m/s^2 por una cuerda que tira directamente hacia arriba sobre el. ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda?

  Solución: Dada la masa m del objeto, la fuerza debida a su peso será $\vec{\omega} = -mg\hat{\jmath}$. Digamos que la tensión de la cuerda es $\vec{T} = T\hat{\jmath}$. Así, la suma de fuerzas deberá ser tal que:

  $$\sum F_y = -mg\hat{\jmath} + T\hat{\jmath} = (-mg + T)\,\hat{\jmath} = ma\hat{\jmath}$$

  Entonces,

  $$T = m\,(a+g) = 5 \text{ kg}\left(0.3 \text{ m/s}^2 + 9.81 \text{ m/s}^2\right) = 50.55 \text{ N}$$

- La única fuerza que actúa sobre un objeto de 5 kg tiene componentes de $\mathrm{F_x} = 20 \text{ N}$ y $\mathrm{F_y} = 30 \text{ N}$. Encuentre la aceleración del objeto.

  Solución: $\vec{F} = m\vec{a}$, de modo que:

  $$\vec{a} = \vec{F}/m = \{F_x, F_y\}/m = \{F_x/m, F_y/m\}$$

  $$\vec{a} = \{\mathrm{F_x} = 20 \text{ N}/5 \text{ kg}, \mathrm{F_y} = 30 \text{ N}/5 \text{ kg}\} = \{4 \text{ m/s}^2, 6 \text{ m/s}^2\} = (4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath})\ \text{m/s}^2$$

- Una fuerza constante actúa sobre un objeto de 5 kg y reduce su velocidad de 7 m/s a 3 m/s en un tiempo de tres segundos. Encuentra la fuerza.

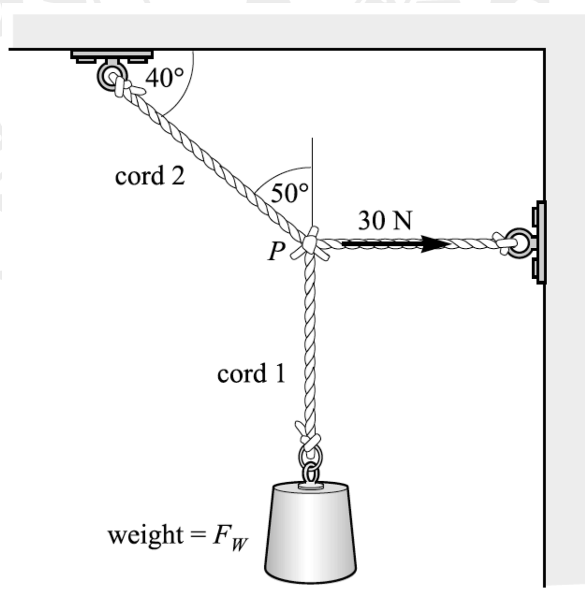
Solución: La fuerza es constante, así que la aceleración también será constante, $\vec{F} = m\vec{a}$.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{3\ \mathrm{m/s} - 7\ \mathrm{m/s}}{3\ \mathrm{s}} = -\frac{4}{3}\ \mathrm{m/s^2}$$

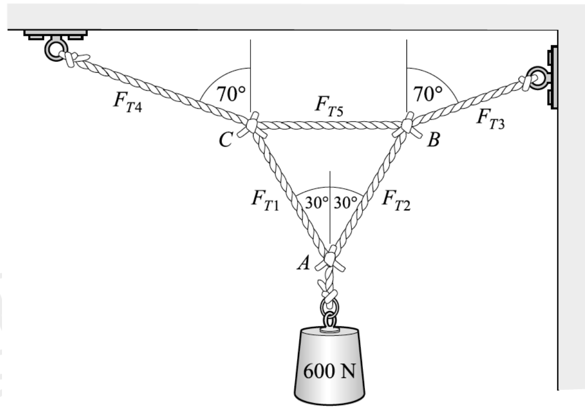
Finalmente, la fuerza será $F = ma = (5\ \mathrm{kg})(-\frac{4}{3}\ \mathrm{m/s^2}) = -\frac{20}{3}\ \mathrm{N}$

Diagrama de cuerpo libre: representación gráfica mediante flechas de cada una de las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo para ayudarnos a escribir en lenguaje matemático la formulación del problema. El primer paso para dibujar el diagrama de cuerpo libre consiste en elegir el sistema de coordenadas adecuado y elegir las direcciones de cada una de las componentes de dicho sistema de coordenadas.

- En la figura se muestra que la tensión en la cuerda horizontal es de $30\ \mathrm{N}$. Encuentre el peso del objeto.



- Encuentre la tensión en las cuerdas mostradas en la figura si el objeto soportado pesa $600\ \mathrm{N}$.



1.2.3. Las fuerzas de fricción

Para ejemplificar la aplicación de las leyes de Newton, estudiaremos las fuerzas de rozamiento que se producen cuando se aplica una fuerza sobre un cuerpo que está en contacto con una superficie. Usualmente nos encontramos con que los objetos no parecen obedecer la primera ley de Newton, ¿a qué se debe esto? El enunciado de la ley establece que debe de haber una fuerza **no nula**, por lo que al analizar a un sistema mecánico es imprescindible comenzar por la búsqueda de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto que estemos estudiando. Es común que, además de las fuerzas que son claramente ejercidas sobre este objeto, existen en el entorno del mismo interacciones que tienen como consecuencia fuerzas "ocultas" que deben considerarse. La *fricción* es un ejemplo de estas fuerzas y tiene la peculiaridad de que siempre actúa en la dirección contraria al movimiento que se produciría a causa de la suma del resto de las fuerzas existentes.

¿Qué causa la fricción? Desde un punto de vista microscópico, la fricción es causada por la interacción entre los átomos ó moléculas que conforman a las superficies que están en contacto. Las nubes de electrones y los núcleos atómicos en la superficie de un material generan campos electromagnéticos a su alrededor que interactúan con los producidos por los constituyentes del otro material. Estas interacciones dan lugar a la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento. Por otro lado, desde un punto de vista macroscópico, las fuerzas de fricción dependen de la rugosidad y composición de las superficies. En general, es más fácil generar desplazamiento sobre una superficie lisa que sobre una superficie rugosa. En una primera aproximación, las fuerzas de fricción debidas al rozamiento son proporcionales a la fuerza con la que las superficies son empujadas entre sí.

Fricción estática

La fuerza de fricción estática se produce cuando no hay movimiento relativo entre las superficies que se encuentran en contacto. Esta fuerza es variable y cancela por completo a la componente de la fuerza efectiva que apunta en la dirección paralela a la superficie de contacto hasta un límite que es proporcional a la componente de la fuerza perpendicular a dicha superficie, la fuerza normal F_N. Esto evita la posibilidad de un desplazamiento hasta un límite máximo dado por:

$$f_e \leq \mu_e F_N \tag{1.21}$$

donde F_N es la fuerza normal a la superficie de contacto.

Siempre que la componente paralela a la superficie de la fuerza aplicada sea menor o igual que $\mu_e F_N$, la fuerza de fricción será exactamente igual a dicha componente de la fuerza aplicada y la suma de fuerzas en la dirección paralela a la superficie de contacto será igual a cero; no habrá movimiento. Una vez que la componente paralela a la superficie de la fuerza aplicada es mayor que $\mu_e F_N$, la fricción estática no es capaz de evitar el movimiento.

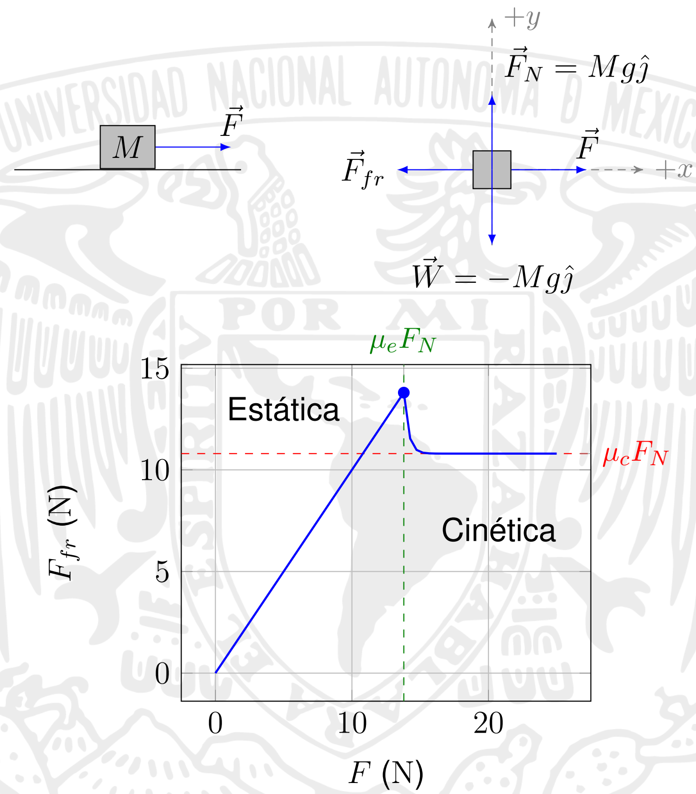


Figura 1.4: Fuerza de fricción F_{fr} para un bloque de $60\ \mathrm{N}$ colocado sobre un plano horizontal con coeficientes de fricción estática $\mu_e = 0.23$ y cinética $\mu_c = 0.18$ como función de una fuerza F aplicada paralela a la superficie.

Fricción cinética

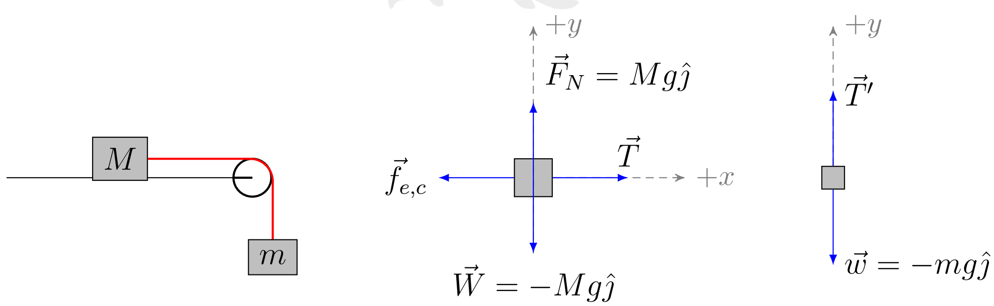
A diferencia del caso estático, asumiendo que la componente perpendicular a la superficie de la fuerza neta actuando sobre un cuerpo (la fuerza normal, F_N) no cambia, la fricción cinética es siempre la misma:

$$f_c = \mu_c F_N \tag{1.22}$$

De esta manera, conforme aumentamos la magnitud de la componente de la fuerza que actúa a lo largo de la dirección paralela a la superficie, es posible producir un cambio en la cantidad de movimiento y por consiguiente generar una aceleración cada vez mayor en el movimiento relativo entre el objeto y la superficie sobre la que descansa.

Análisis de fuerzas

Considérese el sistema mostrado en la figura: dos bloques cuyas masas son M y m respectivamente están conectados por una cuerda cuya masa es despreciable a través de una polea que no genera fricción. La masa M descansa sobre una superficie plana con coeficientes de fricción estática y cinética dados respectivamente por μ_e y μ_c, mientras que la masa m se encuentra suspendida y podemos despreciar la fricción del aire.



Nos podemos entonces preguntar si existe o no movimiento relativo entre las masas y la superficie sobre la que descansa M e incluso de manera más general podríamos determinar de qué depende que haya o no movimiento. Para hacer esto debemos realizar un análisis de las fuerzas involucradas en el problema, para lo cual hacemos uso de los *diagramas de cuerpo libre* correspondientes a cada una de las dos masas.

Por la geometría del problema particular que se está estudiando, claramente conviene utilizar un sistema de coordenadas cartesiano en el que una de las direcciones que lo definen sea paralela a la superficie del plano; esto nos permitirá expresar el movimiento de cada masa por separado únicamente en una dimensión, la dirección horizontal x para la masa M y la dirección vertical y para la masa m.

$\rightarrow$ **Fuerzas actuando sobre la masa** M

- Fuerzas en la dirección x:

$$\sum_M \vec{F}_x = (T - f_{e,c})\,\hat{\imath} = Ma_M\hat{\imath}$$

- Fuerzas en la dirección y:

$$\sum_M \vec{F}_y = (F_N + W)\,\hat{\jmath} = (F_N - Mg)\,\hat{\jmath}$$

Debido a que no hay movimiento de esta masa en esta dirección, $\sum_M \vec{F}_y = 0$, por lo que podemos escribir:

$$(F_N - Mg)\,\hat{\jmath} = 0$$

$$\Rightarrow F_N = Mg$$

→ **Fuerzas actuando sobre la masa** m

- Fuerzas en la dirección x:

$$\sum_m \vec{F}_x = 0$$

- Fuerzas en la dirección y:

$$\sum_m \vec{F}_y = (T' + w)\,\hat{\jmath} = (T' - mg)\,\hat{\jmath} = ma_m\hat{\jmath}$$

Sistema en reposo: $a_m = a_M = 0, f_{e,c} = f_e \leq \mu_e F_N$

$$(T - f_e) = 0 \qquad F_N = Mg \qquad (T' - mg) = 0$$

$$T = T' = f_e = mg \leq \mu_e F_N = \mu_e Mg$$

$$m \leq \mu_e M$$

Sistema en movimiento con velocidad constante: $a_m = a_M = 0, f_{e,c} = f_c = \mu_c F_N$

$$(T - f_c) = 0 \qquad F_N = Mg \qquad (T' - mg) = 0$$

$$T = T' = f_c = mg = \mu_c F_N = \mu_c Mg$$

$$m = \mu_c M$$

Sistema en movimiento con velocidad constante: $a = a_m = a_M \neq 0, f_{e,c} = f_c = \mu_c F_N$

$$(T - f_c) = Ma \qquad F_N = Mg \qquad (T' - mg) = ma$$

$$T = T' = f_c + Ma = \mu_c Mg + Ma = mg + ma$$

$$a = \frac{(\mu_c M - m)\, g}{(m - M)}$$

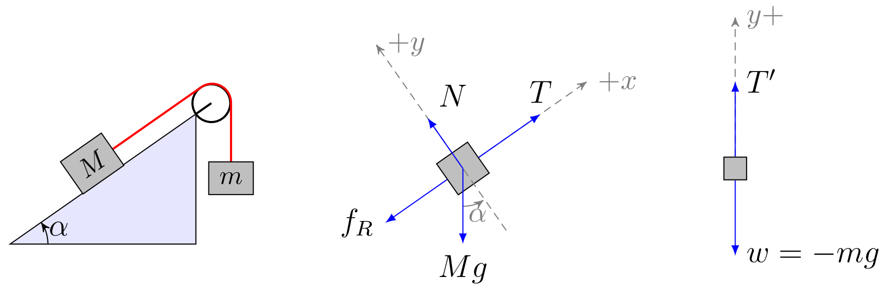


Figura 1.5: Las fuerzas de fricción con proyección de fuerzas.

Ejercicio: Repita el procedimiento efectuado en el último problema para el sistema de la figura 1.5

Ejercicios

- Una fuerza horizontal de $140\ \mathrm{N}$ se necesita para jalar una caja de $60\ \mathrm{kg}$ a lo largo de un piso horizontal a velocidad constante. ¿Cuál es el coeficiente de fricción entre el piso y la caja?

  Solución: En este caso la suma de fuerzas deberá ser igual a cero debido a que se mueve a velocidad constante (1a ley de Newton)

  $$\sum F_x = F\hat{\imath} + f_{fr}\hat{\imath} = 0$$

  En la dirección vertical no hay movimiento, por lo que

  $$\sum F_y = -mg\hat{\jmath} + N\hat{\jmath} = 0$$

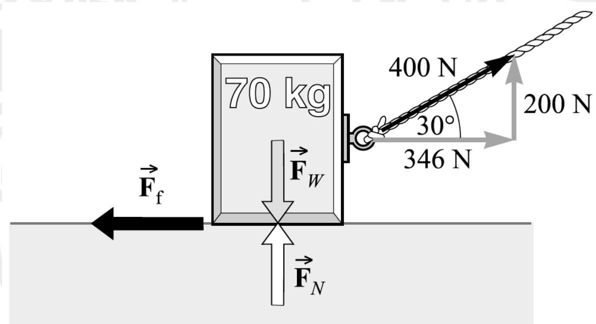
  de modo que $N = mg$ y la fuerza de fricción $\vec{f_{fr}} = -\mu_k N\hat{\imath}$. Entonces,

  $$F\hat{\imath} - \mu_k mg\hat{\imath} = 0$$

y $\mu_k = F/mg = 140\ \mathrm{N}/\left(60\ \mathrm{kg} \times 9.81\ \mathrm{m/s}\right) = 0.238$.

- Un bloque de $400\ \mathrm{g}$ que se mueve con una velocidad inicial de $80\ \mathrm{cm/s}$ se desliza a lo largo de una superficie horizontal en contra de una fuerza de fricción de $0.7\ \mathrm{N}$. (a) ¿Qué tan lejos resbalará antes de detenerse? (b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie?

- Suponga, como se muestra en la figura, que una caja de $70\ \mathrm{kg}$ es jalada por una fuerza de $400\ \mathrm{N}$ dirigida a un ángulo de $30°$ con respecto a la horizontal. El coeficiente de ficción cinética es de 0.50. Encuentre la aceleración de la caja.



- Un coche se mueve a $20\ \mathrm{m/s}$ a lo largo de un camino horizontal y sus frenos son súbitamente aplicados, eventualmente llevándolo al reposo. (a) ¿Cuál es la distancia más corta en la que el coche se detendrá si el coeficiente de fricción entre las llantas y el camino es de 0.9?. Asuma que las cuatro llantas frenan de manera idéntica y los frenos no se bloquean, de modo que el coche se detiene a causa de la fricción estática. (b) ¿Cuál es la dependencia de la distancia más corta de frenado con la velocidad inicial del vehículo?

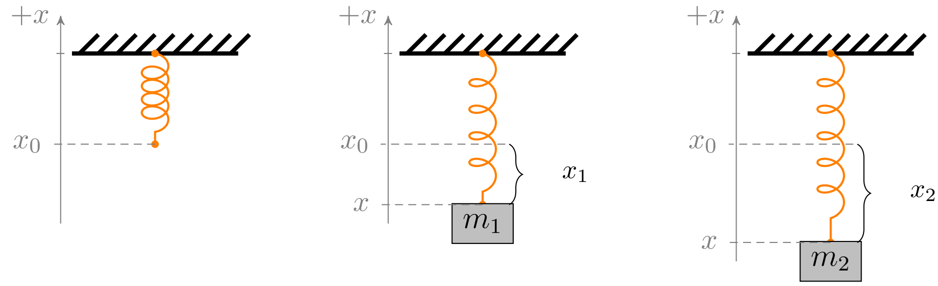


Figura 1.6: El resorte y la ley de Hooke, caso estático

1.3. Semana III: Fuerzas restitutivas y movimiento periódico

1.3.1. La física de un resorte

Estudiemos ahora la física involucrada en el funcionamiento de un resorte. Para esto vamos a estudiar dos casos distintos. Primero comenzaremos analizando lo que sucede cuando se tiene un equilibrio de fuerzas y por lo tanto no hay movimiento, y después estudiaremos el caso en el que existe movimiento.

Caso estático: la ley de Hooke

Lo primero que podemos *observar* es que si sujetamos el extremo de un resorte y no aplicamos ninguna fuerza al otro extremo, el resorte tendrá una longitud fija, digamos x_0. Ahora continuamos nuestro experimento estirando el resorte al aplicar una fuerza al extremo que originalmente habíamos dejado suelto y observamos que el resorte genera una fuerza de oposición en la dirección contraria a la fuerza aplicada y que se produce un desplazamiento o elongación del resorte con respecto a la longitud registrada en nuestra primera observación. Dado que si yo aumento la fuerza, la elongación aumenta, concluimos que la elongación

m (kg)	w (N)	$(x - x_0)$ (m)
0.00	0.00	0.00
0.10	0.98	0.025
0.20	1.96	0.050
0.30	2.94	0.076
0.40	3.92	0.099
0.50	4.90	0.127
0.60	5.89	0.166
0.70	6.87	0.215

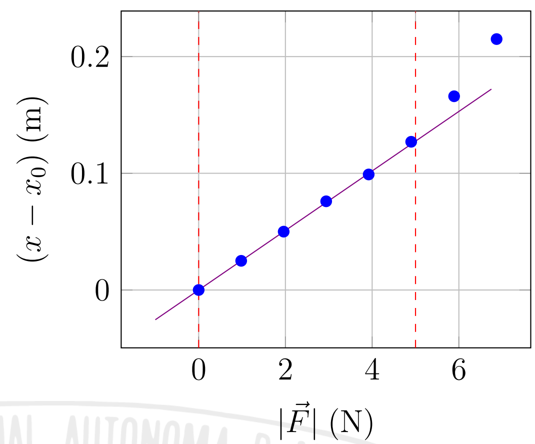


Figura 1.7: La ley de Hooke: determinación experimental de la constante del resorte.

depende de o es proporcional a la fuerza aplicada:

$$(x - x_0) \propto \left|\vec{F}\right|$$

Para determinar el tipo de dependencia, se tiene que realizar una medición. Podemos por ejemplo proponer un experimento en el que colgamos un resorte del techo y colgamos distintas masas desde el extremo inferior del resorte como se muestra en la figura 1.6. Así podemos identificar a la fuerza aplicada sobre nuestro resorte con el peso de cada una de las cargas: $\vec{F} = -mg$. Realizamos entonces una gráfica en la que ponemos la fuerza aplicada en el eje horizontal y la longitud correspondiente en la dirección vertical. Observamos que existe una región en la que el desplazamiento es directamente proporcional a la fuerza aplicada. Esto quiere decir que $(x - x_0) = \text{cte.} \times |\vec{F}|$. Utilizando la tercera ley de Newton para sustituir la fuerza aplicada por la fuerza ejercida por el resorte para oponerse al desplazamiento, tendremos que:

$$\boxed{\vec{F} = -k(x - x_0)\hat{x}} \tag{1.23}$$

La constante de proporcionalidad k tiene unidades de Newton sobre metro $[\mathrm{N\,m^{-1}}]$, es decir, nos indica cuantos Newtons de fuerza es necesario ejercer para obtener una elongación de un metro. Esto es:

$$k = \frac{\Delta|\vec{F}|}{\Delta x}$$

Se puede ver como la derivada de la fuerza con respecto a la elongación.

La ecuación 1.23 es conocida como la *ley de Hooke*. Observe que, como muchas otras "leyes", la ley de Hooke tiene un intervalo de validez fuera del cual el resorte ya no es capaz de mantener el régimen lineal. Comúnmente fuera de este régimen se produce una deformación permanente del resorte que tiene como consecuencia que cuando se retira la fuerza, el resorte ya no regresa a su longitud original.

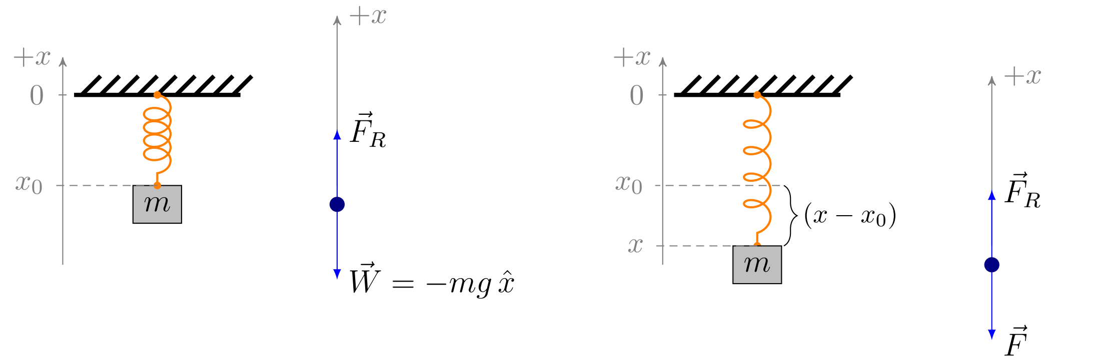


Figura 1.8: El resorte y la ley de Hooke, caso dinámico

Caso dinámico: el oscilador armónico

Analicemos ahora el movimiento o dinámica de una masa m sujeta por un resorte que es desplazada de su posición de equilibrio x_0 por una fuerza $\vec{F}$ como se muestra en la figura 1.3.1.

$$\vec{F} = -k(x - x_0)\hat{x}$$

$$m\vec{a} = -k(x - x_0)\hat{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}(x - x_0)\hat{x}$$

Dado que este movimiento se desarrolla en una sola dimensión, podemos escribir esta ecuación como:

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_0) = 0} \tag{1.24}$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden que debemos de resolver para encontrar la trayectoria de la masa sujeta a la acción del resorte. Sin embargo, la ecuación no es suficiente ya que nos hace falta conocer la situación que dio origen al movimiento, es decir, necesitamos incluir las condiciones iniciales o las condiciones en algún tiempo dado a partir del cual queremos reconstruir en movimiento.

Digamos que a un tiempo dado $t = t_0$, el cuerpo es soltado desde una posición $x(t_0) = x_i$ e imprimiéndole una velocidad $v(t_0) = v_i$. Entonces nuestro problema consiste en resolver el sistema dado por:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}(x - x_0) \tag{1.25a}$$

$$x(t_0) = x_i \tag{1.25b}$$

$$v(t_0) = v_i \tag{1.25c}$$

Basados en la observación mostrada en el vídeo del profesor Walter Lewin, proponemos una solución de la forma:

$$x(t) = [A\cos(\omega t + \phi) + B] \tag{1.26}$$

donde (ver documento *oscilacion.nb*):

- A: amplitud de la oscilación
- ω: frecuencia angular de la oscilación

$$\omega = 2\pi f; \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

con f la frecuencia (lineal) y T el periodo (en segundos) de la oscilación. Entonces, cada vez que t avanza un múltiplo entero de $2\pi/\omega$, ωt cambia en un múltiplo entero de 2π y se tiene un ciclo completo de la oscilación.

$$f = \frac{1}{T} = \left[\frac{1}{\text{seg.}}\right] = [\text{Hertz}]$$

- ϕ: la fase de la oscilación.

Para demostrar que la forma de onda propuesta (ecuación 1.26) en verdad describe el movimiento de la masa sujeta a la acción del resorte, tenemos que encontrar las condiciones que los parámetros A, ω y ϕ deben de cumplir para que se satisfaga el sistema de ecuaciones 1.25. Para esto lo que tenemos que hacer es sustituir la solución propuesta en el sistema de ecuaciones.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \tag{1.27a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \tag{1.27b}$$

El lado derecho de esta última ecuación contiene el factor $A\cos(\omega t + \phi)$ que, de acuerdo con la solución general 1.26 que propusimos es igual a $x(t) - B$. Por lo tanto, la fórmula 1.27b es equivalente a tener

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 [x(t) - B] = -\frac{k}{m}[x(t) - x_0]$$

De aquí encontramos que la frecuencia angular es determinada por la constante del resorte

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

y que la posición de equilibrio corresponde al desplazamiento constante alrededor del cual se produce el desplazamiento

$$B = x_0.$$

A continuación necesitamos utilizar las condiciones iniciales 1.25b y 1.25c para determinar A y ϕ. Para simplificar el álgebra, supongamos que $t_0 = 0$,

$$x(0) = A\cos(\phi) = x_i$$

$$x'(0) = -A\omega \operatorname{sen}(\phi) = v_i$$

Tomemos el cociente de estas dos últimas expresiones para obtener

$$\frac{v_i}{x_i} = -\omega \tan(\phi)$$

que es equivalente a que

$$\phi = \arctan\left(-\frac{1}{\omega}\frac{v_i}{x_i}\right) = \arctan\left(-\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{v_i}{x_i}\right)$$

Por último, este resultado lo podemos sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones de valores iniciales para obtener A en términos de dos de los parámetros ϕ, x_i o v_i.

$$A = \frac{x_i}{\cos\phi} = \frac{x_i}{\cos\left[\arctan\left(-\frac{1}{\omega}\frac{v_i}{x_i}\right)\right]}$$

$$A = -\frac{v_i}{\omega \operatorname{sen}\phi} = -\frac{v_i}{\omega \operatorname{sen}\left[\arctan\left(-\frac{1}{\omega}\frac{v_i}{x_i}\right)\right]}$$

Para analizar el movimiento de oscilación que hemos encontrado, consideremos el caso simple en el que $v_i = 0$, es decir, al momento inicial se desplaza a la masa de la posición de equilibrio y se suelta desde el reposo. En este caso es fácil demostrar que $\phi = 0$ y $A = x_i$ (tarea).

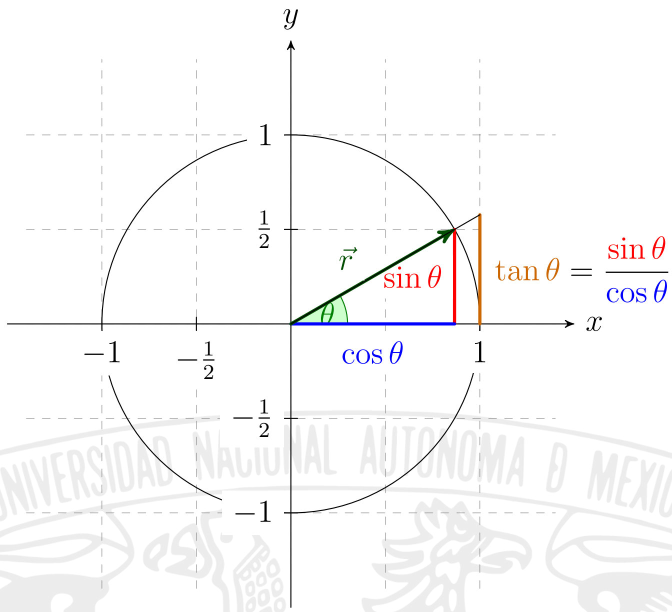


Figura 1.9: Coordenadas polares y el movimiento circular uniforme.

1.3.2. Movimiento circular uniforme

Así como se estudió desde el punto de vista de la cinemática el movimiento de un cuerpo que se desplaza con velocidad constante, el movimiento rectilíneo uniforme, a continuación estudiaremos el caso de un objeto que se mueve a lo largo de una trayectoria circular barriendo ángulos iguales en tiempos iguales: *el movimiento circular uniforme*.

Suponga que se tiene una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria de acuerdo con la siguiente expresión,

$$\vec{r}(t) = A\left\{\cos(\omega t), \operatorname{sen}(\omega t)\right\} \tag{1.28}$$

Recordando que la velocidad es la primera derivada de la posición con respecto al tiempo tenemos que:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = A\left\{-\omega \operatorname{sen}(\omega t), \omega\cos(\omega t)\right\} \tag{1.29}$$

Más aún, el ritmo de cambio de esta velocidad se obtiene al aplicar una vez más la derivación con respecto al tiempo; esto quiere decir que la aceleración del objeto está dada por:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = A\left\{-\omega^2\cos(\omega t), -\omega^2\operatorname{sen}(\omega t)\right\} \tag{1.30}$$

Observe además que:

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 A\left\{\cos(\omega t), \operatorname{sen}(\omega t)\right\}$$

esto es,

$$\vec{a}(t) = -\omega^2\vec{r}(t) \tag{1.31}$$

La partícula está siendo constantemente acelerada en una dirección siempre paralela al vector de posición pero en dirección al centro del círculo. Claramente lo que hemos encontrado es una expresión para la *aceleración centrípeta*.

También podemos notar que la ecuación 1.31 es equivalente a la ecuación diferencial que describe a un oscilador armónico en dos dimensiones:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\vec{r}(t) \tag{1.32}$$

Dado que en todo momento existe una aceleración, por primera ley de Newton también sabemos que una fuerza debe de estar actuando sobre el objeto. Para calcular la fuerza que debe actuar sobre nuestra partícula para que se mantenga sobre la trayectoria circular aplicamos entonces la segunda ley de Newton utilizando la segunda derivada que encontramos antes:

$$\vec{F} = m\vec{a}(t) = -m\omega^2\vec{r}(t) \tag{1.33}$$

Esto implica que la fuerza que mantiene a la partícula sobre la trayectoria circular apunta en todo momento en la misma dirección que la posición de la partícula pero siembre está dirigida hacia el centro del círculo, es decir, acabamos de deducir la *fuerza centrípeta*, misma que genera la aceleración centrípeta que habíamos encontrado antes.

Utilicemos ahora el producto punto para encontrar la magnitud de cada una de las tres variables dinámicas que hemos encontrado.

$$|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{A^2\left[\cos^2(\omega t) + \mathrm{sen}^2(\omega t)\right]} = A$$

Lo cual quiere decir que la amplitud A del movimiento es simplemente el radio R del círculo.

A continuación calculemos la magnitud de la velocidad también utilizando el producto punto:

$$\left|\dot{\vec{r}}\right| = \sqrt{\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}} = \sqrt{A^2\omega^2\left[\mathrm{sen}^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right]} = A\omega$$

Esto nos lleva a un resultado interesante que utilizaremos más adelante cuando analicemos el movimiento planetario:

$$\left|\dot{\vec{r}}\right| = v = R\omega = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.34}$$

Por último hagamos lo mismo para la aceleración:

$$\left|\ddot{\vec{r}}\right| = \sqrt{\ddot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}} = \sqrt{A^2\omega^4\left[\cos^2(\omega t) + \mathrm{sen}^2(\omega t)\right]} = A\omega^2$$

a partir de lo cual obtenemos un resultado análogo al anterior:

$$\left|\ddot{\vec{r}}\right| = a = R\omega^2 = v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v\omega = \frac{v^2}{R} \tag{1.35}$$

Ahora apoyémonos en el producto punto para analizar la direcciones relativas de los vectores que hemos encontrado. Comencemos con los vectores de posición y velocidad:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = A^2 \left[-\omega \cos(\omega t) \operatorname{sen}(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t)\right] = 0$$

Por lo tanto, el vector de velocidad es siempre perpendicular al vector de posición: $\vec{r} \perp \vec{v}$. Esto implica que la velocidad es siempre tangencial a la trayectoria, lo cual es consistente con el hecho de que si en algún momento la fuerza centrípeta desapareciera, el objeto continuaría con su movimiento a lo largo de una recta tangente a la trayectoria.

Ahora veamos cuál es el ángulo entre el vector de posición y el vector de aceleración:

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = A^2\omega^2 \left[-\cos^2(\omega t) - \operatorname{sen}^2(\omega t)\right] = -A^2\omega^2 = |\vec{r}|\,|\vec{a}|\,(-1) = |\vec{r}|\,|\vec{a}| \cos\theta_{\vec{r},\vec{a}}$$

donde hemos utilizado a $\theta_{\vec{r},\vec{a}}$ como el ángulo entre los vectores de posición y aceleración. Entonces,

$$\cos\theta_{\vec{r},\vec{a}} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \pi$$

Esto confirma nuestra observación de que en todo momento la aceleración apunta en la misma dirección que el vector de posición pero en sentido contrario.

¿Cuál es el ángulo entre los vectores de velocidad y aceleración?

El momento angular

El momento angular de un cuerpo en movimiento se define utilizando el producto vectorial o producto cruz de la siguiente manera:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{1.36}$$

Recordando que $\vec{p} = m\vec{v}$,

$$\vec{L} = m\ (\vec{r} \times \vec{v}) \tag{1.37}$$

de modo que la magnitud del momento angular es $\left|\vec{L}\right| = m\,|\vec{r}|\,|\vec{v}|\sin\theta_{\vec{r},\vec{v}}$.

Para el movimiento circular uniforme, recordemos que ya habíamos demostrado que $\vec{r} \perp \vec{v}$, así que $\sin\theta_{\vec{r},\vec{v}} = 1$

$$\left|\vec{L}\right| = m\,|\vec{r}|\,|\vec{v}|$$

Así mismo, por las propiedades del producto cruz también sabemos que la dirección de $\vec{L}$ es perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{v}$, y sigue la regla de la mano derecha.

De los resultados anteriores sabemos que para el movimiento circular uniforme $|\vec{r}\,| = A$ y $|\vec{v}| = \left|\dot{\vec{r}}\right| = A\omega$, por lo que

$$\left|\vec{L}\right| = mA^2\omega$$

Esto indica que en el movimiento circular uniforme el momento angular es una constante, es decir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = 0$$

Veamos entonces a que nos lleva tomar la derivada del momento angular:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}\right) \times \vec{p} + \vec{r} \times \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}\right)$$

Pero $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \dot{\vec{r}}$ es paralelo a $\vec{p}$, así que $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}) \times \vec{p} = 0$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{r} \times (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}) = \vec{r} \times (m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}) = \vec{r} \times (m\vec{a})$$

Por lo tanto, utilizando la segunda ley de Newton

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}$$

La torca

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{1.38}$$

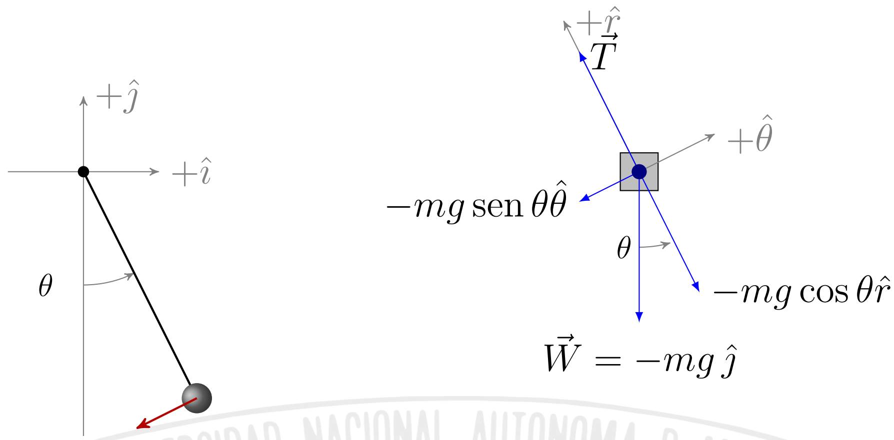


Figura 1.10: El péndulo simple

1.3.3. El péndulo

Este es un problema clásico de mecánica. Un objeto de masa m se encuentra suspendido en un extremo de una cuerda rígida de longitud ℓ que a su vez está sujeta del techo. Si la masa se coloca directamente por debajo del punto de sujeción de la cuerda, con esta última perfectamente alineada con la vertical, el sistema se encontraría en equilibrio y no habrá movimiento. Por el contrario, si el cuerpo se desplaza de manera que ahora la cuerda haga un ángulo θ con respecto a la vertical y es soltado a partir de ese punto, el objeto describirá un movimiento oscilatorio alrededor de la posición de equilibrio.

Análisis con coordenadas polares

Para analizar el problema consideremos la situación que se muestra en la figura 1.10, tal que en un instante de tiempo dado la masa se encuentra desplazada de la posición de equilibrio con la cuerda haciendo un ángulo θ con respecto a la vertical. Observe que como se ha especificado que la cuerda sea rígida, no puede haber movimiento a lo largo de la dirección radial, por lo que resulta natural utilizar esta dirección para definir nuestro sistema de coordenadas. En consecuencia, al realizar un diagrama de cuerpo libre tendremos que descomponer todas las fuerzas que actúan sobre la masa m en las direcciones paralela y perpendicular a la dirección radial, donde la segunda dirección resulta ser la dirección tangencial a la trayectoria. Así, el sistema de coordenadas que nos conviene adoptar en este caso es un sistema de coordenadas polares (r, θ) en el que la coordenada radial es siempre igual a una constante $r = \ell$, mientras que la coordenada angular depende del tiempo $\theta = \theta(t)$ y se mide a partir de la dirección vertical. De este modo $\theta = 0$ corresponde a la posición de equilibrio alrededor de la cual se da la oscilación.

Para empezar notamos que la tensión de la cuerda actúa únicamente a lo largo de la dirección radial. A continuación, el peso del objeto lo debemos separar en sus componentes a lo largo de cada una de las dos direcciones ortogonales del sistema de coordenadas que hemos elegido: la dirección radial r (perpendicular a la trayectoria) y la dirección tangencial θ (paralela a la trayectoria). Como se muestra en el diagrama a la derecha de la figura 1.10, la descomposición de fuerzas se hace en términos del ángulo $\theta(t)$.

Aplicando la primera ley de Newton, la suma de fuerzas a lo largo de la dirección radial debe de ser igual a cero porque no hay movimiento en esa dirección

$$\sum \vec{F}_r = T - mg\cos\theta = 0$$

donde $W_r = -mg\cos\theta$ es la componente del peso que apunta a lo largo de la dirección radial de nuestro sistema de coordenadas. Esto quiere decir que la tensión de la cuerda se adapta continuamente para cancelar en todo momento a la componente del peso que apunta a lo largo de la dirección radial:

$$T = mg\cos\theta$$

Por otro lado, en la dirección tangencial observamos que la velocidad depende de la posición, es decir, depende del valor que toma la coordenada angular que elegimos θ. Por lo tanto, la aceleración varía y necesitamos hacer uso de la segunda ley de Newton,

$$\sum \vec{F}_\theta = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta = ma_t$$

Recordemos que, de acuerdo con la ecuación 1.34, en el movimiento circular la magnitud de la velocidad tangencial está dada por:

$$|\dot{\vec{r}}| = v = R\omega = \ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

En esta relación vemos que la variación de la magnitud de la velocidad tangencial depende únicamente del cambio en el ángulo como función del tiempo. Entonces, la derivada de la magnitud de la velocidad tangencial es precisamente la aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \ell\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \ell\ddot{\theta}$$

De este modo, la aceleración tangencial la podemos escribir en términos de la segunda derivada del ángulo θ con respecto al tiempo de la siguiente manera:

$$a_t = \ell\ddot{\theta}$$

y sustituyendo este resultado en la suma de fuerzas a lo largo de la dirección tangencial se obtiene que

$$-mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\ell\ddot{\theta}$$

Por lo tanto, el movimiento angular de nuestro péndulo está enteramente descrito por la ecuación diferencial

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{1.39}$$

La solución de esta ecuación diferencial implica conocer el valor del ángulo $\theta(t)$ para todo momento del tiempo.

Límite de oscilaciones pequeñas: Para simplificar la ecuación 1.39 usualmente se comienza por analizar el caso de oscilaciones pequeñas, esto es, encontrar la solución para $\theta \sim 0$. Obsérvese entonces que en esta situación se tiene que

$$\lim_{\theta \to 0}(\mathrm{sen}\,\theta) = \theta$$

por lo que la ecuación diferencial para oscilaciones pequeñas se convierte en

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta$$

Esta ecuación tiene exactamente la misma forma de la ecuación diferencial que encontramos para el resorte y podemos simplemente proponer como solución

$$\theta(t) = \Theta\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

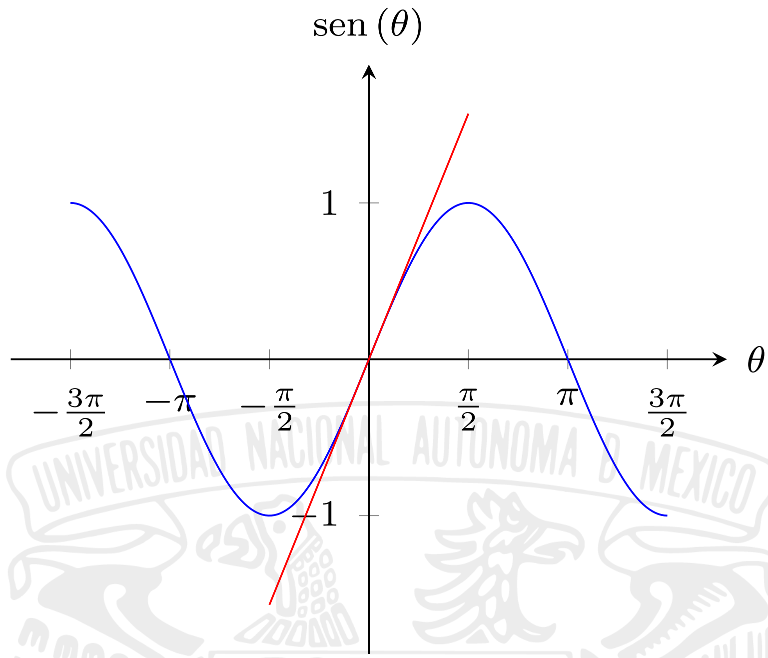


Figura 1.11: El límite de oscilaciones pequeñas

donde la amplitud angular del movimiento Θ y la fase ϕ estarán determinadas por las condiciones iniciales del movimiento y

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

será la frecuencia angular del desplazamiento angular del péndulo. El periodo del péndulo será $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

1.4. Semana IV: El trabajo y la energía

1.4.1. El trabajo

El trabajo se define como la cantidad escalar dada por:

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{1.40}$$

Recuérdese que el producto punto es la proyección de un vector sobre otro. Por lo tanto, el trabajo es igual a la integral de la proyección de la fuerza aplicada $\vec{F}$ a lo largo de la trayectoria $\vec{r}$ descrita por el cuerpo sobre el que actúa la fuerza.

El trabajo tiene unidades de fuerza por distancia:

$$[W] = \left[\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\right] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{Joule}$$

El Joule es la unidad de "energía" del sistema internacional, pero ¿qué es la energía?

1.4.2. La energía

La energía es un concepto abstracto que surge de la observación de que existe una cantidad física que en un sistema cerrado se conserva.

"Ley de la conservación de la energía"

La energía es una medida de las acciones que se ejercen sobre un sistema dado y esta cantidad obedece una ley *universal* de conservación. La energía no se crea ni se destruye, únicamente se transforma de una forma a otra.

Teorema del trabajo y la energía

El trabajo expresa la habilidad de una fuerza de ejercer un cambio en la energía de un cuerpo o sistema. Considere una partícula de masa m que se mueve bajo la influencia de una fuerza neta constante, $\vec{F} = \mathrm{cte}$ (*i.e.* $\vec{a} = \mathrm{cte}$).

Si la partícula se desplaza una distancia $d = (x_f - x_i)$ en la dirección de la fuerza,

$$\begin{aligned} \Rightarrow W &= \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = F \int_{x_i}^{x_f} \mathrm{d}x = Fx\Big|_{x_i}^{x_f} = F(x_f - x_i) \\ &= F \times d = (ma)d \end{aligned}$$

donde F y a son respectivamente las magnitudes de la fuerza y de la aceleración. Ahora recordando nuestros conceptos de cinemática podemos escribir

$$d = \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$$

$$a = \frac{(v_f - v_i)}{t}$$

con $v_i = v(t = 0)$ y $v_f = v(t)$ como las velocidades instantáneas al momento cuando se inicia el desplazamiento d y al tiempo t cuando se ha realizado el desplazamiento. Sustituyendo en la fórmula del trabajo

$$W = m\left(\frac{v_f - v_i}{t}\right)\frac{1}{2}\left(v_f - v_i\right)t = \frac{1}{2}m\left(v_f - v_i\right)\left(v_f + v_i\right)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Observe que en efecto cada uno de los dos términos de la expresión anterior tienen unidades de trabajo:

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \mathrm{kg}\,(\mathrm{m/s})^2 = \left(\mathrm{kg}\,\mathrm{m/s}^2\right)\,m = \mathrm{N}\,\mathrm{m} = \mathrm{Joule}$$

Además, cada uno de los dos términos de la expresión dependen únicamente del estado de movimiento de la partícula en el momento inicial y final del desplazamiento. Por lo tanto, cada uno de estos términos pueden identificarse como la energía asociada el estado de movimiento de la partícula antes y después de aplicada la fuerza, por lo que el trabajo realizado puede ser identificado como el cambio de la energía de la partícula. Esto es, podemos definir a la *energía cinética* de una partícua de masa m que se mueve a una velocidad v de la siguiente manera:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.41}$$

De esta forma, el teorema de trabajo-energía resulta de relacionar al trabajo realizado por la fuerza con el cambio en la energía cinética:

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

Este mismo procedimiento lo podemos repetir aún si la fuerza no es constante:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \cdot \mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_f} ma_x \cdot \mathrm{d}x$$

Utilizando la regla de la cadena $a_x = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

$$\Rightarrow \qquad W = \int_{x_i}^{x_f} mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = \int_{v_i}^{v_f} mv\,\mathrm{d}v$$

$$\therefore \qquad W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

La energía potencial

La energía potencial es energía almacenada en un sistema que puede realizar trabajo o transformarse en energía cinética. La energía potencial la podemos asociar a fuerzas conservativas para las que la energía cinética ganada ó perdida por un sistema conforme sus constituyentes cambian sus posiciones relativas es balanceada por una pérdida o ganancia igual en energía potencial. Esto da lugar al principio de conservación de la energía mecánica.

Hagamos un ejercicio simple. ¿Cuál es la energía potencial de un cuerpo de masa m que se encuentra a una altura h con respecto al piso? Para resolver este problema calculemos la cantidad de trabajo que realizaría el campo de fuerza gravitacional sobre el cuerpo cuando este se deja caer desde la altura h y llega hasta el suelo.

$$W = \int_h^0 \vec{F} \cdot \mathrm{d}y = (-mg)y\Big|_h^0 = (-mg)(0-h) = mgh$$

Si ahora definimos a U_g como la energía potencial gravitacional de modo que $U_g = 0$ en el suelo ($y = 0$), entonces necesariamente a una altura $y = h$ tendremos que

$$U_g(y = h) = mgh$$

Por lo tanto, el cambio en la energía potencial sufrido por el cuerpo en su desplazamiento entre la altura h y el suelo está dado por:

$$\Delta U_g = U_g(y = 0) - U_g(y = h) = 0 - mgh = -mgh$$

Podemos ahora extender este mismo concepto para dos alturas arbitrarias y calcular el trabajo requerido para mover al objeto desde una posición inicial hasta una final:

$$W_g = -(U_f - U_i) = -\Delta U_g$$

Esto quiere decir que el trabajo realizado sobre un cuerpo por la fuerza gravitacional es igual al negativo del cambio en la energía potencial gravitacional del sistema.

En general, el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual al negativo cambio de la energía potencial generada por la fuerza en el espacio.

$$W = -\Delta U \tag{1.42}$$

Problemas de trabajo y energía

- Cuanto trabajo se realiza en contra de la gravedad al levantar un objeto de $3\ \mathrm{kg}$ a lo largo de una distancia vertical de $40\ \mathrm{cm}$.

- ¿Cuánto trabajo realiza sobre un objeto una fuerza que lo sostiene mientras el objeto es descendido a través de una distancia vertical h? ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza de gravitación en este objeto al realizar el mismo proceso?

  Solución: El trabajo realizado por quien sostiene el objeto mientras desciende:

  $$W_f = \int_h^0 \vec{F} \cdot \mathrm{d}y = F \int_h^0 \mathrm{d}y = (mg)y\Big|_h^0 = (mg)(0-h) = -mgh$$

  Por otro lado, como se vió anteriormente, el trabajo realizado por la fuerza de gravedad es:

  $$W_G = \int_h^0 \vec{F} \cdot \mathrm{d}y = F \int_h^0 \mathrm{d}y = (-mg)y\Big|_h^0 = (-mg)(0-h) = mgh$$

- Calcule el trabajo realizado en contra de la gravedad por una bomba que descarga $600\,\mathrm{l}$ de combustible en un tanque que se encuentra $20\,\mathrm{m}$ por encima de la toma de la bomba. $1\,\mathrm{cm}^3$ de combustible tiene una masa de $0.82\,\mathrm{g}$. $1\,\mathrm{l}$ es igual a $1000\,\mathrm{cm}^3$.

- Una masa de $2\,\mathrm{kg}$ cae $400\,\mathrm{cm}$. (a) ¿Cuánto trabajo ha realizado sobre esta masa la fuerza gravitacional? (b) ¿Cuánta energía potencial gravitacional ha perdido esta masa?

- Un bloque de $0.5\,\mathrm{kg}$ se desliza sobre la superficie de una mesa con una velocidad inicial de $20\,\mathrm{cm/s}$ y alcanza el reposo en una distancia de $70\,\mathrm{cm}$. Encuentre la fuerza de fricción promedio que frenó este movimiento.

  Solución: Este problema se puede resolver utilizando únicamente argumentos de trabajo y energía. Para empezar, el trabajo realizado por la fuerza de fricción es:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = F \int_{x_i}^{x_f} \mathrm{d}x = F(x_f - x_i) = F\,d$$

  Esto debido a que la magnitud F de la fuerza de fricción cinética es constante y su dirección es siempre paralela pero con sentido contrario al desplazamiento. A la vez, el teorema de trabajo y energía indica que este trabajo debe de ser igual al cambio en la energía cinética:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}mv_i^2$$

  Por lo tanto, la fuerza de fricción es:

$$F = -\frac{mv_i^2}{2d}$$

Si resolvemos esto utilizando el procedimiento desarrollado en la sección de cinemática tendríamos posiblemente que:

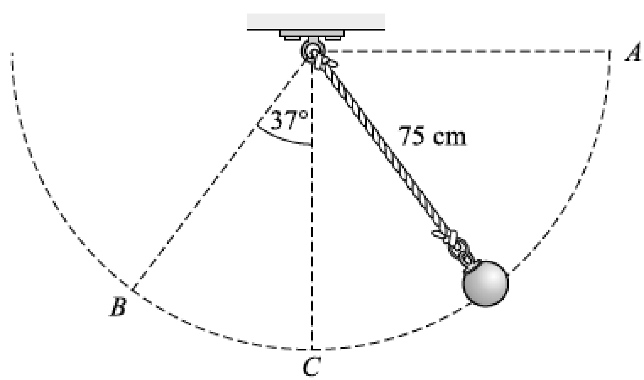
$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2d} = -\frac{v_i^2}{2d}$$

Luego, por la 2a ley de Newton tenemos que

$$F = ma = -\frac{mv_i^2}{2d}$$

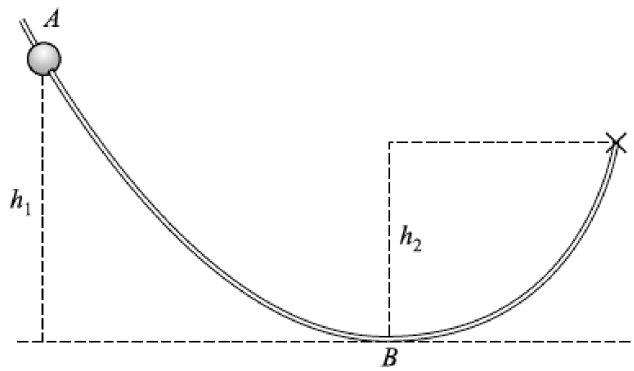
que es el mismo resultado al que llegamos antes.

- Considere el péndulo simple mostrado en la figura. (a) Si la bola es liberada desde el punto A, ¿cuál será la velocidad de la bola cuando esta pase a través del punto C? (b) ¿Cuál es la velocidad de la bola en el punto B?

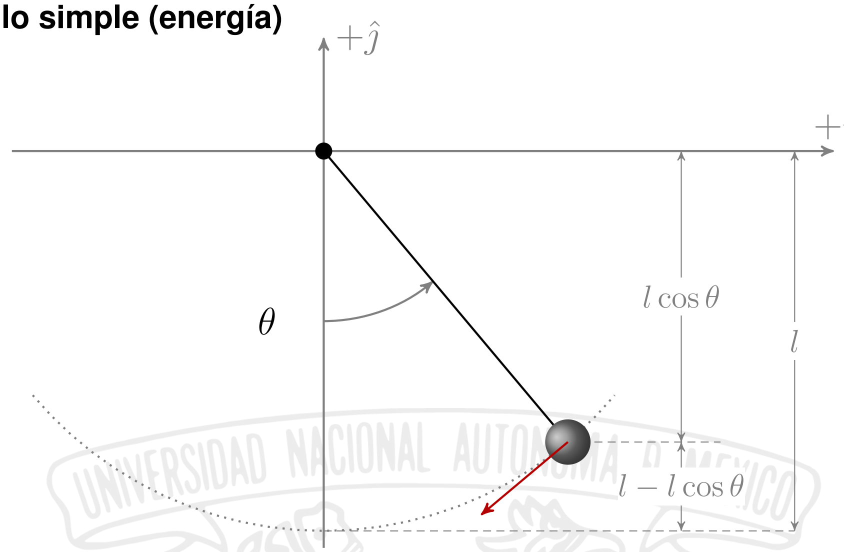


- La figura muestra una cuenta resbalando en un alambre. ¿Qué tan grande debe de ser la altura h_1 para que la cuenta, iniciando desde el reposo en el punto A, alcance una velocidad de $200\ \mathrm{cm/s}$ en el punto B?

- Suponga que $\mathrm{h}_1 = 50\ \mathrm{cm}$, $\mathrm{h}_2 = 30\ \mathrm{cm}$, la longitud a lo largo del alambre desde A hasta C es de $400\ \mathrm{cm}$, y una cuenta de $3\ \mathrm{g}$ liberada desde A alcanza el punto C donde se detiene. ¿Qué tan grande es la fuerza de fricción promedio que se opone a este movimiento?



El péndulo simple (energía)



$$U_g = mgl\,(1 - \cos\theta)$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

La energía total del péndulo se conserva:

$$U_g + K = E$$

$$mgl\,(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = E$$

Debido a que la energía se conserva, entonces E es una constante y su derivada debe de ser igual a cero:

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}\left[-mgl\cos\theta\right] + \frac{\mathrm{d}}{dt}\left[\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2\right] = \frac{\mathrm{d}}{dt}E = 0$$

$$mgl\sin\theta\dot{\theta} + ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

$$g\sin\theta + l\ddot{\theta} = 0$$

Por consiguiente la ecuación de movimiento que se obtiene es:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

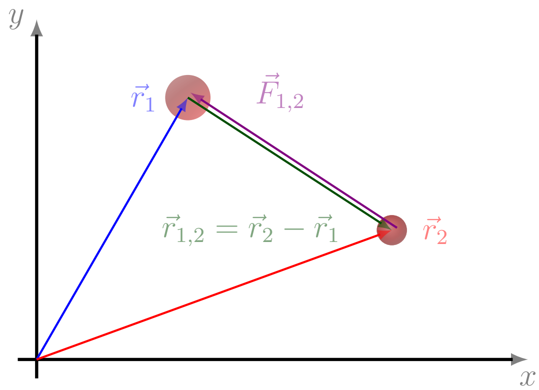


Figura 1.12: La ley de gravitación universal de Newton

1.5. La ley de la gravitación universal de Newton

Observaciones:

- Los cuerpos ejercen una fuerza de atracción sobre otros cuerpos.

- La fuerza de atracción gravitacional es proporcional a las masas involucradas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \tag{1.43}$$

  F módulo de la fuerza ejercida sobre cada una de las masas m_1 y m_2

  d distancia de separación entre los centros de masa de los cuerpos m_1 y m_2.

- La fuerza de atracción gravitacional va siempre dirigida a lo largo de la línea que une a los centros de masa de los objetos involucrados:

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12}$$

La ley de gravitación universal: La fuerza de atracción gravitacional ejercida sobre una masa m_2 debido a la presencia de una masa m_1 es directamente proporcional al producto de las masas, inversamente proporcional al cuadrado de $|\vec{r}_{12}|$ la distancia de separación entre los centros de masa y apunta siempre en la dirección de la línea que une a dos centros de masa $\hat{r}_{12}$:

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12} \tag{1.44}$$

Notese que $\vec{F}_{12}$ es la fuerza de atracción ejercida por la masa m_1 sobre la masa m_2. Esto se puede ver como si colocáramos a nuestro sistema de referencia en la posición de la masa m_1 y en consecuencia tenemos una fuerza que apunta siempre en la dirección del origen de dicho sistema de referencia y por lo tanto en la fórmula de la fuerza aparece un signo negativo.

El parámetro G es la constante de la gravitación universal y corresponde a una constante universal.

$$G = 6.67384(80) \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{Kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$$

La descripción moderna de la gravitación nos dice que la fuerza de gravedad se debe a la modificación de la curvatura generada sobre el espacio-tiempo a causa de la existencia de la masa.

Principio de superposición

$$\vec{F}_k = \sum_{i=1}^{N} -G\frac{m_i m_k}{|\vec{r}_{ik}|^2}\hat{r}_{ik} \tag{1.45}$$

Problemas de la Ley de Gravitación Universal

- El radio de la tierra es de alrededor de $6370\,\mathrm{km}$. Un objeto cuya masa es igual a $20\,\mathrm{kg}$ es elevado a una distancia de $160\,\mathrm{km}$ de la superficie de la tierra. (a) ¿Cuál es la masa del objeto a esa altura? (b) ¿Cuánto pesa el objeto a dicha altura?

- Un gravímetro de átomos fríos es capaz de detectar la variación de la aceleración de la gravedad que la tierra ejerce sobre los átomos de rubidio cerca de la superficie de la tierra cuando la altura del experimento es cambiada en tan solo un metro. Estime la resolución del aparato considerando que el radio medio de la tierra es de $6371\,\mathrm{km}$.

  La fuerza que ejerce la tierra sobre un átomo cerca de la superficie de la tierra y a una altura ΔR por encima de dicha posición es respectivamente

$$F(R_T) = G\frac{m_a\,M_T}{R_T^2} \quad \text{y} \quad F(R_T+\Delta R) = G\frac{m_a\,M_T}{(R_T+\Delta R)^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta F}{F(R_T)} &= \frac{F(R_T)-F(R_T+\Delta R)}{F(R_T)} \\
&= 1-\frac{F(R_T+\Delta R)}{F(R_T)} = 1-\left(G\frac{m_a\,M_T}{(R_T+\Delta R)^2}\right)\Big/\left(G\frac{m_a\,M_T}{R_T^2}\right) \\
&= 1-\frac{R_T^2}{(R_T+\Delta R)^2} = 1-\frac{1}{(1+\Delta R/R_T)^2} \\
&= 1-\frac{1}{\left[1+(1\,\mathrm{m}/6371\times10^3\,\mathrm{m})\right]^2} \approx 3\times10^{-7}
\end{aligned}$$

  Este resultado indica que nuestro aparato de medición tiene que ser capaz de distinguir al menos tres partes en diez millones. Esto implica que cada Newton de fuerza que registra este aparato lo puede determinar con una barra de incertidumbre de aproximadamente $0.0000003\,\mathrm{N}$ y la lectura correspondiente la reportaríamos como $1.0000000(3)\ \mathrm{N}$.

El potencial gravitacional

De la definición de la energía potencial,

$$W = -\Delta U$$

vamos a encontrar el valor de la energía potencial del campo gravitacional calculando el trabajo realizado para traer a un objeto m cerca de otro objeto M.

Observemos que la definición anterior únicamente indica un cambio en la energía. Por tal motivo tenemos que definir el cero de la energía potencial y resulta natural pensar que cuando los dos objetos se encuentran infinitamente lejos el uno del otro, la energía potencial asociada a esa situación debe de ser cero. Entonces,

$$\Delta U = -\int_{\infty}^{r'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

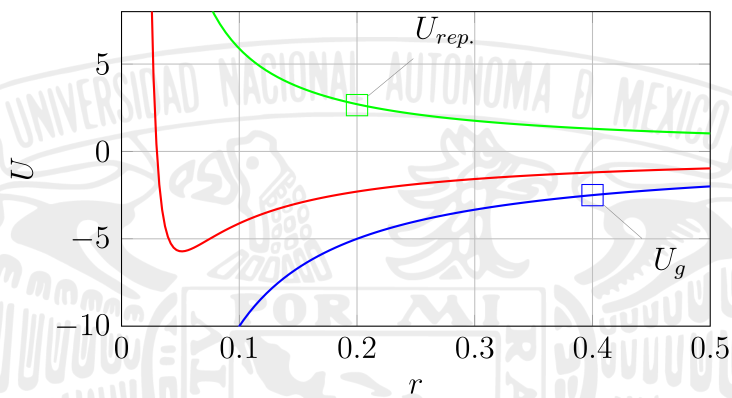
Ahora recordemos que la fuerza gravitacional es siempre paralela al vector que une a los dos objetos interactuantes, por lo que podemos realizar la integral usando únicamente las magnitudes de los vectores

$$\begin{aligned}
\Delta U = -\int_{\infty}^{r'} \left(-G\frac{mM}{r^2}\right) dr &= GmM \int_{\infty}^{r'} \frac{1}{r^2} dr \\
&= GmM \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_{\infty}^{r'} \\
&= -GmM \left[\frac{1}{r'} - \frac{1}{\infty}\right] = -G\frac{mM}{r'}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos definir a la energía potencial asociada a un campo de fuerza gravitacional de la siguiente manera:

$$U_g(r) = -G\left(\frac{mM}{r}\right)$$

con $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.



Demostremos ahora que este potencial esta asociado a la fuerza gravitacional mediante $\vec{F} = -\vec{\nabla}U_g$, es decir, vamos a mostrar que la fuerza gravitacional $\vec{F}$ la podemos expresar como el gradiente del potencial U_g:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} U_g \\
&= GmM\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= GMm(-r^{-2})\frac{1}{2}\left[x^2 + y^2 + z^2\right]^{-1/2}\{2x, 2y, 2z\} \\
&= -GMm(r^{-2})\frac{1}{2}(r^{-1})\{2x, 2y, 2z\} \\
&= -GMm\frac{\{x, y, z\}}{|\vec{r}|^3} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

1.5.1. Las leyes de Kepler

1. Los planetas describen órbitas elípticas con el sol en un uno de sus focos.
2. La línea que une a cualquier planeta con su sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo de revolución es proporcional al cubo de la distancia promedio entre el planeta y su sol:

$$T^2 \propto a^3$$

$$i.e. \qquad T^2 = \kappa a^3$$

Estas tres leyes pueden ser demostradas partiendo únicamente de la ley de gravitación universal de Newton:

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12}$$

Lo primero que podemos observar es que la ley de gravitación universal de Newton es una fuerza central. Esto es debido a que la fuerza depende únicamente de la posición y actúa siempre a lo largo de la línea que une a los dos cuerpos involucrados en la interacción. Podemos ver que si elegimos al sistema de referencia de manera que coincida con la posición de alguno de los objetos, la fuerza de atracción que actúa sobre el otro cuerpo apuntará siempre en la dirección del origen de coordenadas, al centro del sistema de referencia y la magnitud de la fuerza dependerá solamente de la distancia. Por eso a estas fuerzas se les llama de tipo central.

Fuerzas centrales: Fuerza cuya magnitud depende únicamente de la distancia r entre el objeto y un punto fijo, al que convenientemente llamamos *centro*, y la dirección de la fuerza apunta a lo largo de la línea que une al cuerpo con este centro. Las características de una fuerza central son las siguientes:

- son conservativas;
- no dependen del tiempo;
- su rotacional es cero,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

  con $\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$; y por último,
- se pueden expresar como el gradiente de un potencial

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

Demostramos entonces que la fuerza gravitacional cumple no sólo con las tres condiciones que ya vimos si no también con la restante, el caso del rotacional:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\vec{F}) &= \vec{\nabla} \times \vec{F} \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{array} \right\} = -GMm \left\{ \begin{array}{ccc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r}\right) & \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{y}{r}\right) & \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{z}{r}\right) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Tomemos cualquiera de las tres coordenadas de la fuerza $F_v = -\frac{GMm}{r^2}\frac{v}{r}$ y calculemos su derivada parcial con respecto a cualquiera de las otras coordenadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} F_u &= -GMm \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{v}{r} \right) \\
&= -GMm \left[\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{r^2} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{r} \right] \\
&= -GMm \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial u} r \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{r} \right]
\end{aligned}$$

donde cada una de las derivadas parciales indicadas son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}r &= \frac{\partial}{\partial u}\left(u^2+v^2+w^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)^{-1/2}\cdot 2u = \frac{u}{r}\\
\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}r^{-2} = -2r^{-3} = -\frac{2}{r^3}\\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}r^{-1}\right] = \frac{1}{r}\left[-1r^{-2}\right] = -\frac{1}{r^3}
\end{aligned}$$

De este modo tendremos que

$$\frac{\partial}{\partial u}F_u = -GMm\frac{v}{r}\left(\frac{u}{r}\right)\left[-\frac{2}{r^3}-\frac{1}{r^3}\right] = 3GMm\frac{uv}{r^5}$$

Apliquemos esto para cada una de las coordenadas de $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ por separado

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y\right)\hat{\imath} &= -3GMm\left(\frac{yz}{r^5}-\frac{zy}{r^5}\right)\hat{\imath} = 0\\
\left(\frac{\partial}{\partial x}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_x\right)\hat{\jmath} &= -3GMm\left(\frac{xz}{r^5}-\frac{zx}{r^5}\right)\hat{\jmath} = 0\\
\left(\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y\right)\hat{k} &= -3GMm\left(\frac{yz}{r^5}-\frac{zy}{r^5}\right)\hat{k} = 0
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye plenamente que $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$.

Para regresar a las leyes de Kepler, comencemos por ver una propiedad más de las fuerzas centrales. Esta propiedad la obtenemos al calcular la *torca*, $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$, ejercida por una fuerza central. Para el caso gravitacional tenemos que:

$$\vec{\tau} = \left\{\begin{array}{ccc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ x & y & z\\ x/r & y/r & z/r \end{array}\right\}(-G\frac{Mm}{r^2}) = 0$$

Esto resulta obvio si tomamos en cuenta las propiedades del producto vectorial o producto cruz ($\times$) que nos dicen que es igual a cero si los vectores multiplicados son paralelos. Este es en verdad el caso porque la fuerza gravitacional apunta siempre en la dirección del vector de separación entre las masas.

La torca es el análogo a una fuerza en el caso de un movimiento rotacional. Por este motivo, aplicando la primera ley de Newton al caso rotacional tendremos que si la torca es cero, la velocidad angular o, más en general, el *momento angular* $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ debe de ser constante. Esto es,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = 0$$

$$i.e. \qquad \vec{L} = \text{cte.}$$

Ahora recordemos el significado físico del producto vectorial. Recordemos para empezar que el producto curz $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ nos da como resultado un vector que es perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{p}$ y que por lo tanto nos define la dirección perpendicular a la superficie definida por estos vectores. Por lo tanto, si el momento angular permanece constante, entonces el plano perpendicular a $\vec{r}$ y $\vec{p}$ también permanece constante y por lo tanto el movimiento se mantiene siempre contenido en un plano. Esta propiedad nos permite simplificar nuestro estudio del movimiento planetario discutido por Kepler debido a que nos podemos limitar a analizar el movimiento sobre un plano, es decir, en sólo dos dimensiones.

Consideremos entonces el movimiento de un objeto celeste como un planeta que se mueve en el campo gravitacional generado por un objeto masivo como el sol. Podemos entonces colocar nuestro sistema de referencia en el centro del objeto masivo y analizar el movimiento del planeta. Ahora, utilizando la propiedad que acabamos de encontrar, limitémonos a estudiar el movimiento en un plano, para lo cual la velocidad del planeta la vamos a dividir en un instante dado en sus componentes paralela $\vec{v}_{\parallel}$ y perpendicular $\vec{v}_{\perp}$ a la dirección de separación entre las masas, es decir, al vector de posición del planeta $\vec{r}$. De este modo podemos expresar simplemente $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, de modo que:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = m\left[\vec{r} \times \vec{v}\right] \\ &= m\left[\vec{r} \times (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp})\right] = m\left[(\vec{r} \times \vec{v}_{\parallel}) + (\vec{r} \times \vec{v}_{\perp})\right]\end{aligned}$$

Sin embargo, por propiedades del producto cruz podemos simplificar aún más nuestro análisis debido a que $\vec{r} \times \vec{v}_{\parallel} = 0$. Por lo tanto,

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}_{\perp}) = m\,|\vec{r}|\,|\vec{v}_{\perp}|\,\mathrm{sen}(\pi/2) = m\,|\vec{r}|\,|\vec{v}_{\perp}|$$

Apoyados en el diagrama **??**, se puede demostrar que para secciones de la trayectoria infinitesimalmente pequeñas ds en las que se cumple la aproximación $r\,\mathrm{sen}\,d\theta \approx rd\theta$, el desplazamiento $ds \approx rd\theta$:

$$\vec{v}_{\perp} \approx \frac{ds}{dt} \approx \frac{d}{dt}(r\,d\theta) = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

En resumen, $\vec{v}_{\perp} \approx r\omega$ y tenemos que la magnitud del momento angular será

$$\begin{aligned}|\vec{L}| &= mr^2\omega \\ &= mr^2\frac{d\theta}{dt} \\ \therefore \qquad \frac{d\theta}{dt} &= \frac{L}{mr^2}\end{aligned}$$

Ahora utilicemos la información de que el momento angular es una constante escribiendo que el cambio de este en función del tiempo debe de ser igual a cero,

$$\frac{dL}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

Por lo que necesariamente $\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$, lo cual implica que $\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \mathrm{cte.}$

Regresando al diagrama **??**, observemos que el diferencial de área dada por el triángulo formado por el centro del movimiento y los puntos s y $s + ds$ es

$$dA \approx \frac{1}{2}r(rd\theta) = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

Ahora derivamos con respecto al tiempo para encontrar las secciones de área barridas por el vector de posición a medida que avanza el tiempo para encontrar que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

es igual fuera de un factor de $1/2$ al término que habíamos encontrado antes cuya derivada con respecto al tiempo era igual a cero. Entonces,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dA}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

Por lo tanto, hemos demostrado la segunda ley de Kepler que indica que las áreas barridas por el vector de posición del planeta barre áreas iguales en tiempos iguales:

$$\frac{dA}{dt} = \text{constante.}$$

Observe además que hasta aquí no hemos introducido la forma funcional de la ley de gravitación universal de Newton, por lo que esta regla la debe de cumplir en general cualquier fuerza que cumpla con las condiciones de una fuerza central.

Para demostrar que la trayectoria es una elipse, consideremos que tenemos el cuerpo de masa m moviéndose en el potencial gravitacional $U_g(r)$ generado por la masa M. Entonces, la energía total del sistema en todo momento debe de conservarse y será:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + U_g(r)} \tag{1.46}$$

Ahora ya sabemos que el movimiento es en un plano y que la velocidad la podemos descomponer en las partes paralela $v_\parallel$ y perpendicular $v_\perp$ al vector de dirección $\vec{r}$ de modo que podemos escribir

$$\begin{aligned} v^2 &= v_\parallel^2 + v_\perp^2 \\ &= v_\parallel^2 + r^2\omega^2 \end{aligned}$$

con $L = mrv_\perp = mr^2\omega$. Entonces, $r^2\omega^2 = \frac{L^2}{m^2r^2}$ y sustituyendo en la fórmula del cuadrado de la velocidad tenemos que

$$v^2 = v_\parallel^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}$$

Ahora sustituimos este resultado en la ecuación de balance de energía 1.46

$$E = \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U_g(r)$$

Dado que la fuerza es conservativa, la cantidad E expresada en esta última ecuación es una constante. Si ahora identificamos a $v_\parallel = \frac{dr}{dt}$, tendremos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_g - \frac{L^2}{2mr^2}\right)} \\ \int dt &= \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_g - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} \end{aligned}$$

Recordando que $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_g - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}{L/mr^2}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = \int_{r_0}^{r_1} \frac{L dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_g - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

Finalmente elevamos al cuadrado para llegar a que:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} r^4 + 2m^2 \frac{GM}{L^2} r^3 - r^2 \tag{1.47}$$

donde además se ha sustituido la energía potencial gravitacional que se deduce de la ley de gravitación universal de Newton, $U_g(r) = -G\frac{Mm}{r}$.

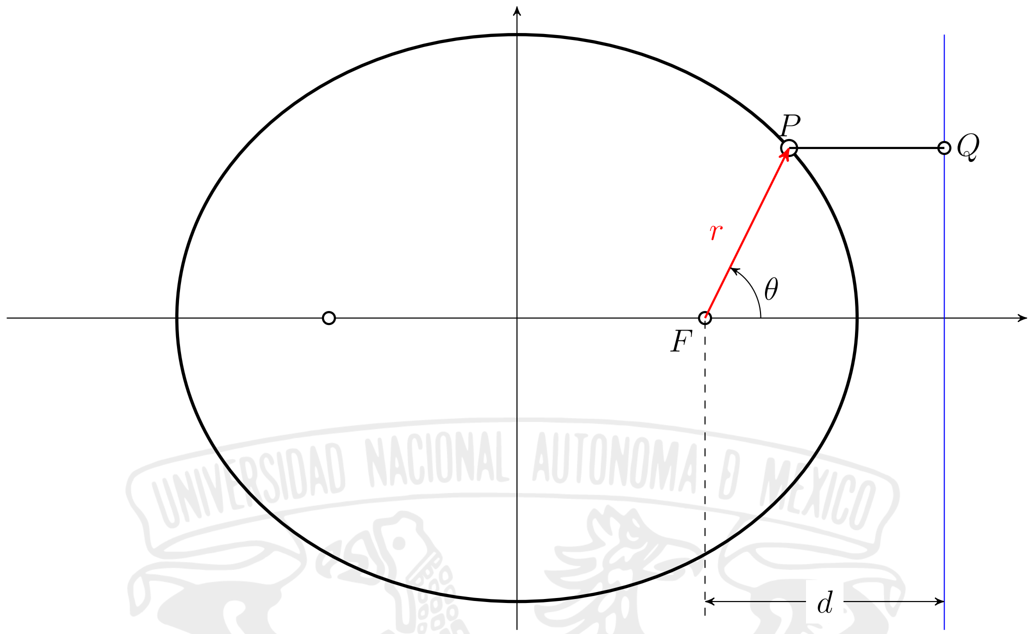


Figura 1.13: La elipse

Cónicas: Curvas generadas por un punto tal que la razón entre la distancia de este a un punto fijo, el *foco*, y la distancia a una línea llamada *directriz* es siempre igual a una constante llamada la *excentricidad* ϵ. Estas curvas incluyen a las elipses, las parábolas y las hipérbolas.

$$\epsilon = \frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}}; \qquad \overline{PF} = r; \qquad \overline{PQ} = d - r\cos\theta$$

$$\therefore \qquad \epsilon = \frac{r}{d - r\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\epsilon d}{r} = 1 + \epsilon\cos\theta$$

Esta es la ecuación de las cónicas en coordenadas polares (r, θ) con el foco en el origen de coordenadas.

Para comparar con el resultado que obtuvimos a partir del balance de energías, queremos expresar a la derivada de la magnitud del vector de posición r en función del ángulo θ, para lo cual derivamos con respecto al ángulo θ aplicando la regla de la cadena cuando haga falta:

$$-\frac{\epsilon d}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\epsilon \operatorname{sen}\theta$$

$$i.e. \qquad \frac{dr}{d\theta} = +\frac{r^2}{d}\operatorname{sen}\theta$$

A continuación elevamos al cuadrado y utilizamos la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta = (1-\cos^2\theta)$ para llegar a

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{d^2}\operatorname{sen}^2\theta = \frac{r^4}{d^2}(1-\cos^2\theta)$$

pero despejando el $\cos\theta$ de la ecuación de las cónicas tenemos que $cos\theta = \frac{d}{r} - \frac{1}{\epsilon}$.

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{d^2}\left(1-\left(\frac{d}{r}-\frac{1}{\epsilon}\right)^2\right) = \frac{1}{d^2}\left(1-\frac{1}{\epsilon^2}\right)r^4 + \frac{2}{d\epsilon}r^3 - r^2$$

En este punto podemos regresar a la ecuación de balance de energías y compararla con la relación que acabamos de deducir para las cónicas

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= \frac{2mE}{L^2}r^4 && +2m^2\frac{GM}{L^2}r^3 && -r^2 \\
\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= \frac{1}{d^2}\left(1-\frac{1}{\epsilon^2}\right)r^4 && +\frac{2}{d\epsilon}r^3 && -r^2
\end{aligned}$$

en donde E y L son constantes, por lo que podemos identificar término a término de estas última expresiones para encontrar que la ecuación de las cónicas es solución de nuestra ecuación del movimiento siempre y cuando se cumplan las siguientes condiciones:

$$\frac{1}{d^2}\left(1-\frac{1}{\epsilon^2}\right) = \frac{2mE}{L^2} \qquad\qquad \frac{2}{d\,\epsilon} = 2m^2\frac{GM}{L^2}$$

Esto es cierto no sólo para la elipse, también el círculo, la recta, la parábola y la hipérbola.

El semieje mayor a es

$$
\begin{aligned}
a &= (r(\pi) - r(0))/2 \\
&= \left(\frac{h^2/GM}{1+\epsilon} + \frac{h^2/GM}{1-\epsilon}\right)/2 \\
&= \frac{h^2/GM}{1-\epsilon^2}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, el semieje menor b se obtiene de las siguientes relaciones

$$
\begin{aligned}
&\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \\
&\overline{PF_1} = \overline{PF_2} = \sqrt{b^2+f^2} \\
\therefore \quad & 2\sqrt{b^2+f^2} = 2a, \qquad \epsilon = f/a \\
i.e. \quad & b^2 + \epsilon^2 a^2 = a^2 \\
& b = a\sqrt{1-\epsilon^2}
\end{aligned}
$$

Ahora debemos relacionar estos parámetros con el período de revolución del objeto celeste alrededor de su sol, para lo cual haremos uso del resultado de que el ritmo de barrido del área es igual a una constante. El área total de la elipse esta dada por

$$
\begin{aligned}
A &= \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-\epsilon^2} \\
&= \int dA = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta
\end{aligned}
$$

donde hemos hecho uso del resultado de que el área del pedazo diferencial del área es igual al área del triángulo formado por el vector de posición en dos momentos distintos. Ahora recordamos que el momento angular es igual a una constante $L = mr^2\omega = \text{cte.}$ para escribir:

$$\begin{aligned}
r^2 d\theta &= \frac{L}{m} dt \\
\int_0^{2\pi} r^2 d\theta &= \frac{L}{m} \int_0^T dt \\
2A &= \frac{L}{m} T \\
2\pi a^2 \sqrt{1-\epsilon^2} &= \frac{L}{m} T \\
a^4(1-\epsilon^2) &= \left(\frac{L}{2\pi m}\right)^2 T^2
\end{aligned}$$

El parámetro h había sido dado en términos del momento angular $L = mh$ y por otro lado encontramos que el semieje mayor estaba dado por $a = \frac{h^2/GM}{1-\epsilon^2}$. Combinando estas dos expresiones llegamos a que:

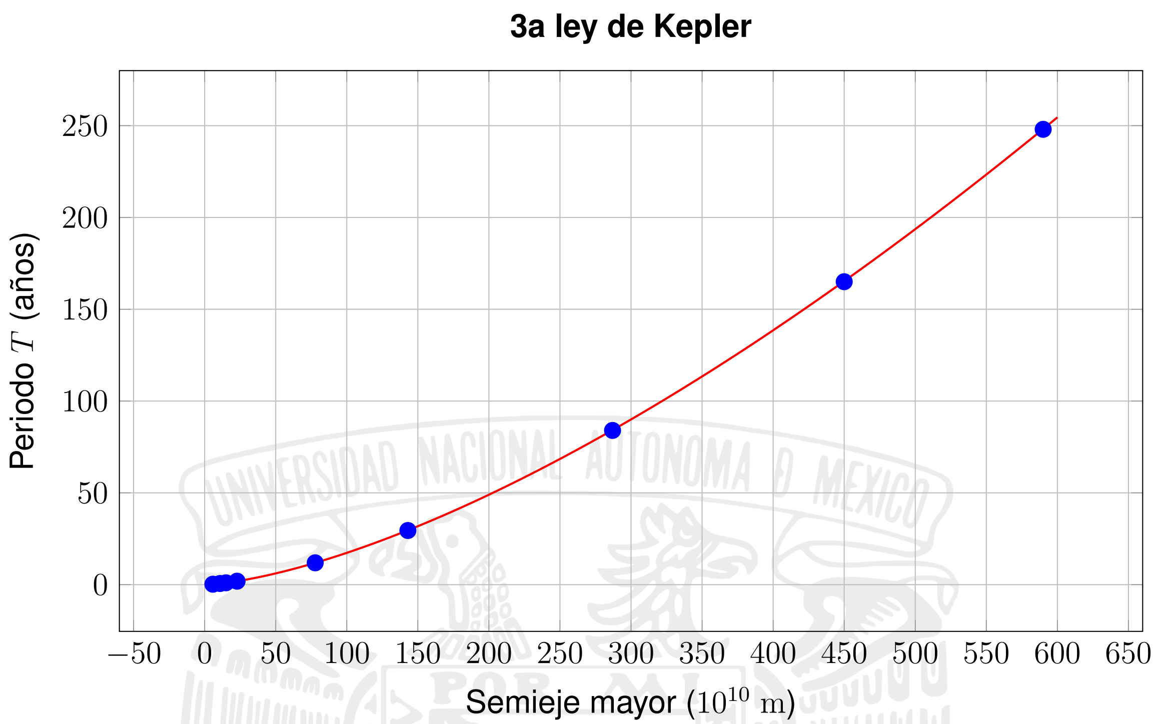
$$L^2 = GMm^2 a(1-\epsilon^2)$$

Para terminar, esta última expresión a su vez la podemos sustituir en la que relaciona al semieje mayor con el periodo de modo que tenemos que

$$a^4(1-\epsilon^2) = \frac{GMa(1-\epsilon^2)}{(2\pi)^2} T^2 \qquad i.e. \qquad a^3 = \frac{GM}{(2\pi)^2} T^2$$

Con esto hemos demostrado la tercera ley de Kepler al encontrar que el cubo del semieje mayor el cual es proporcional a la distancia promedio entre el planeta y el sol, es a su vez proporcional al cuadrado del periodo de revolución:

$$\boxed{a^3 = \frac{GM}{(2\pi)^2} T^2} \tag{1.48}$$



Curva de rotación del sistema solar

A continuación, realicemos un cálculo sencillo relacionado con la rotación de la tierra alrededor del sol. Para este cálculo hagamos la suposición de que la tierra se mueve en una órbita circular ($\epsilon \sim 0$).

- Aphelio: $\sim 152 \times 10^9$ mts.
- Perihelio: $\sim 147 \times 10^9$ mts.

$$a_T \approx 149,598,261 \text{ km}$$

Ahora procedemos a estimar la velocidad con la que se mueve la tierra alrededor del sol.

$$|\vec{v}| = r\omega \quad \text{con} \quad r \to a_T \quad \text{y} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore \quad |\vec{v}| = 2\pi \frac{a_T}{T}$$

El periodo de revolución es $T = 365.256363004$ dias $(24 \times 60 \times 60$ seg./dia$) = 31558149.7635456$ s. Con esto obtenemos que $|\vec{v}| = 29784.8$ m/s. Por comparación, el valor reportado en Wikipedia es $|\vec{v}| = 29.78$ km/s.

Fuerza centrípeta en el movimiento circular

$$\vec{F}_c = -m\omega^2\vec{r}, \quad \text{con} \quad |\vec{r}| \to a_T \quad \text{y} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \left|\vec{F}_c\right| &= m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a_T \\ &= 3.54158 \times 10^{22}\ \text{N} \end{aligned}$$

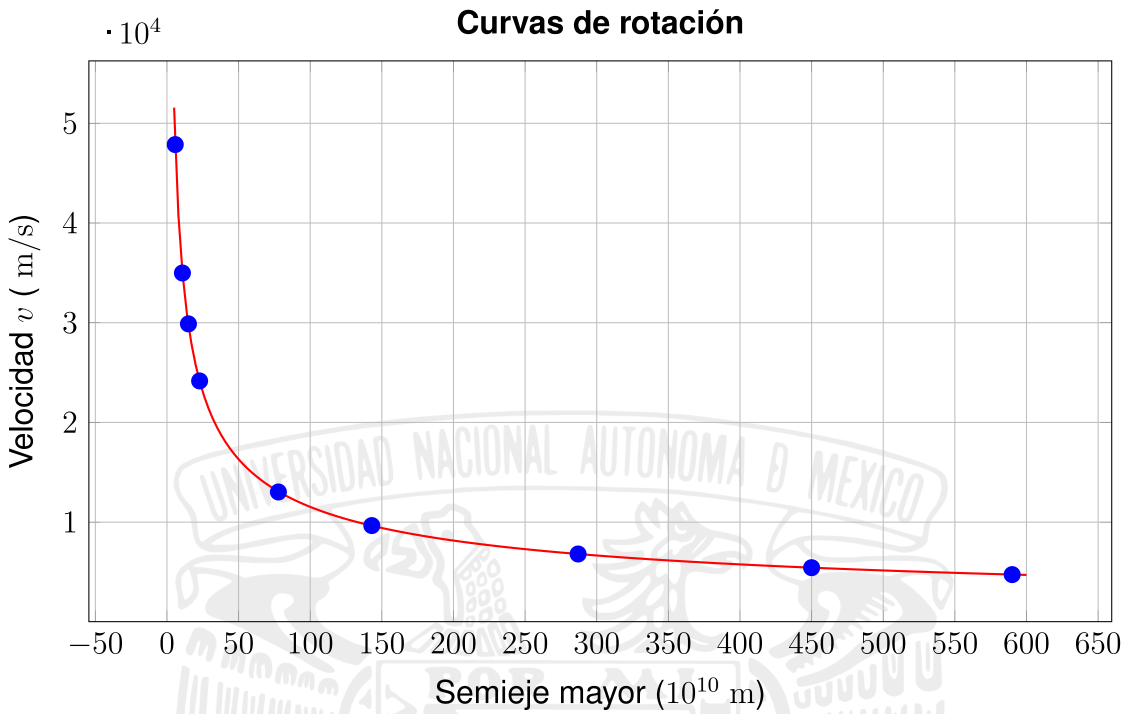
Por otro lado, esta fuerza debe de ser causada por la atracción gravitacional $\vec{F}_g = -(GMm/a_T^2)\hat{r}$, de modo que al igualar ambas expresiones encontramos que

$$\begin{aligned} \left|\vec{F}_c\right| &= \left|\vec{F}_g\right| \\ m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a_T &= (GMm/a_T^2) \end{aligned}$$

Un poco de álgebra nos permite recuperar un resultado que ya conocemos bien, la tercera ley de Kepler:

$$\begin{aligned} a_T^3 &= GM\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{GM}{\omega} = \frac{GMa_T^2}{v^2} \qquad \left(\omega = \frac{v}{a_T}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{a_T}}$$


Curvas de rotación
$\cdot 10^4$
5
4
3
2
1
Velocidad v (m/s)
−50 0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650
Semieje mayor (10^{10} m)

Derivación con coordenadas polares

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \qquad \hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}$$

$$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}$$

Tomando las primeras dos derivadas usando regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}\\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}}\\ &= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}}\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{r}} &= \frac{d}{dt}\left(\cos\theta\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}\right)\\ &= -\operatorname{sen}\theta\dot{\theta}\hat{\imath} + \cos\theta\dot{\theta}\hat{\jmath}\\ &= \dot{\theta}\hat{\theta}\end{aligned}$$

$$i.e. \qquad \dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\hat{r}} &= \ddot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\theta}\dot{\hat{\theta}}\\ &= \ddot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}^2\left(\cos\theta\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}\right)\\ &= \ddot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}^2\hat{r}\end{aligned}$$

con $\dot{\theta} = \omega$ la velocidad angular y $\ddot{\theta} = \alpha$ la aceleración angular. Regresando a $\ddot{\vec{r}}$,

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}}\\ &= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\left(\ddot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}^2\hat{r}\right)\\ &= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}\\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}$$

Ahora, de acuerdo con la ecuación de movimiento que escribimos partiendo de la segunda ley de Newton tenemos las siguientes dos ecuaciones,

a) parte radial:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\frac{Mm}{r^2}$$

b) parte angular:

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

Comencemos por la parte angular multiplicando por r a ambos lados

$$\begin{aligned}2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} &= 0\\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad r^2\dot{\theta} = \text{cte.} \quad (L = mr^2\omega)$$

Ahora para analizar la parte radial obtenida a partir de la segunda ley de Newton necesitamos encontrar una expresión para $\ddot{r}$. Sea $h = r^2\omega \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \omega = h/r^2$, de modo que podemos escribir

$$\begin{aligned}\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \\ = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{d\dot{r}}{d\theta} \\ = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left[-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ = -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\end{aligned}$$

Sustituyamos este resultado en la parte radial del inciso **a)**:

$$-\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - r\frac{h^2}{r^4} = -G\frac{M}{r^2}$$

$$i.e. \quad \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}$$

Sea $z = \frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2}$, entonces la ecuación diferencial anterior quedaría como

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = 0$$

Esta es la ecuación diferencial del oscilador armónico con frecuencia 1. Podemos por consiguiente proponer una solución de la forma $z(\theta) = \cos(\theta - \theta_0)$. Sustituyendo esto en la definición de z tendremos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \cos(\theta-\theta_0) + \frac{GM}{h^2} \\ \therefore \quad r &= \frac{h^2}{GM + h^2\cos(\theta-\theta_0)} \\ &= \frac{h^2/GM}{1 + \left(\frac{h^2}{GM}\right)\cos(\theta)}\end{aligned}$$

donde hemos elegido un sistema de referencia tal que $\theta_0 = 0$. A continuación definamos a los parámetros $\epsilon = h^2/GM$ y $\ell = h^2/GM$, de modo que

$$r(\theta) = \frac{\ell}{1 + \epsilon\cos(\theta)}$$

Esta es la ecuación paramétrica de las cónicas en la que el parámetro ϵ es la excentricidad:

$\epsilon = 0 \Rightarrow$ círculo

$0 < \epsilon < 1 \Rightarrow$ elipse

$\epsilon = 1 \Rightarrow$ parábola

$\epsilon > 1 \Rightarrow$ hipérbola

Capítulo 2

Electricidad y magnetismo

De acuerdo con el *modelo estándar*, toda la materia que compone al universo está a su vez compuesta por leptones (como el electrón) y quarks. Estos constituyentes interactuan entre sí por medio de cuatro interacciones fundamentales:

- Gravitacional
- Electromagnética
- Nuclear (fuerte)
- Débil

A grandes rasgos, estas interacciones difieren entre sí por sus magnitudes relativas y por las escalas en las que se manifiestan. Analicemos estas interacciones partiendo desde lo microscópico, desde la estructura del núcleo atómico, y avanzando hacia lo macroscópico, pasando por la estructura del átomo, la formación de las moléculas, de las estructuras cristalinas y hasta llegar a la formación de los planetas, de los sistemas solares, galaxias, cúmulos de galaxias, etc.

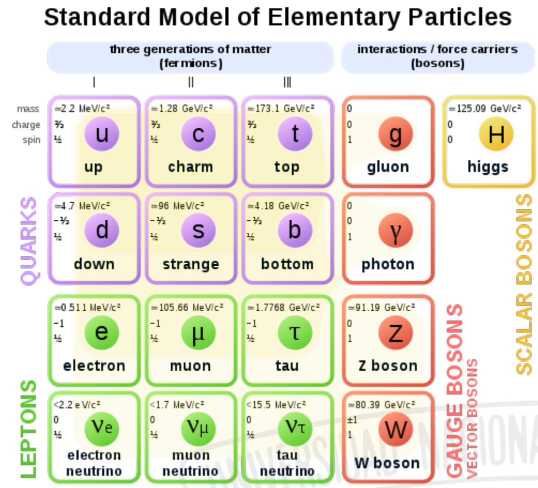


Figura 2.1: Conjunto de partículas elementales y sus interacciones que constituyen en modelo estándar del universo. Imagen tomada de Wikipedia, *Stadard Model* https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model.

a) Nuclear o fuerza fuerte

- Interacción entre protones y neutrones responsable de que los núcleos sean estables contrarrestando la repulsión eléctrica.
- Para comparar su magnitud con la del resto de las interacciones consideremos que esta tiene magnitud igual a 1.
- Su rango de acción es de 10^{-15} m. (Radio del protón: $0.8775(51)\ \mathrm{fm} = 0.8775(51) \times 10^{-15}\ \mathrm{m}$)
- Esta interacción por lo tanto actúa a distancias parecidas al diámetro medio de los núcleos atómicos.

b) Interacción electromagnética

- Responsable de la formación de los átomos y de sus interacciones.
- Magnitud relativa igual a $\frac{1}{137} \sim 7.3 \times 10^{-3}$ ($k = 8.99 \times 10^{9}\ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$).
- Actúa en todas las distancias con una fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia $F \propto \frac{1}{r^2}$.

c) Fuerza débil

- Interacción al interior de los elementos que conforman al núcleo, *i. e.* protones y neutrones.
- Magnitud relativa 10^{-6}.
- La fuerza decae rápidamente para distancias cercanas al tamaño de los protones: $F \propto \frac{1}{r}e^{-m_{W,Z}r}$.
- Rango 10^{-18} m: $0.1\,\%$ del diámetro del protón.

d) Interacción gravitacional

- Magnitud relativa 6×10^{-39} ($G = 6.67384(80) \times 10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$).
- Rango ∞.
- Fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia $F \propto \frac{1}{r^2}$.
- Al igual que la interacción electromagnética, la gravitacional esta presente a toda escala, pero su magnitud es tan pequeña que sólo es relevante cuando las masas involucradas son suficientemente grandes (macroscópicas).

- **Fuerza débil:** actúa sobre quarks
  $\Rightarrow$ Responsable de procesos de decaimiento que dan lugar a la formación de protones y neutrones.

- **Fuerza fuerte:** actúa sobre protones y neutrones
  $\Rightarrow$ Responsable de la formación de núcleos atómicos

- **Fuerzas electromagnéticas:** actúa sobre partículas con carga eléctrica, como protones, electrones, átomos, etc.
  $\Rightarrow$ Responsable de la formación de la materia (física y química).

- **Fuerzas gravitacionales:** modifica la geometría del espacio-tiempo; actúa sobre partículas con masa y es determinante sólo a escalas macroscópicas (grandes cantidades de masa).
  $\Rightarrow$ Responsable del "aglutinamiento" de la materia en la escala macroscópica, generando la formación de asteriodes, planetas, estrellas, galaxias, etc.

2.1. La carga eléctrica

La interacción electrostática es responsable de un buen número de fenómenos físicos a los que estamos acostumbrados en la vida diaria.

- Descargas eléctricas o "toques"
- Fuerzas inducidas por frotamiento
- Impenetrabilidad de la materia

La interacción entre cargas puede ser atractiva o repulsiva:

- cargas distintas se atraen;
- cargas iguales se repelen.

Precisamente por esta propiedad de la interacción electromagnética es que sabemos que existen sólo dos tipos distintos de carga, a los que por convención les llamamos positiva y negativa, y asignamos esta última polaridad a la carga del electrón.

La carga es una propiedad fundamental/intrínseca de la materia, tal como la masa. El Coulomb (C) es la unidad de carga eléctrica del sistema internacional y está definida como la cantidad de carga transportada por un ampere (A) de corriente en un segundo (s):

$$1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{A} \times 1\ \mathrm{s}$$

La carga está cuantizada: la cantidad mínima de carga que una partícula puede poseer es la carga del electrón $-e$ o la carga del protón $+e$, donde $e = 1.60219 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$. Por lo tanto, la cantidad de carga total de cualquier objeto tiene que ser un múltiplo entero de la carga fundamental e.

Principio de conservación de la carga: la cantidad total de carga eléctrica en un proceso físico se conserva y únicamente puede haber transferencia de carga entre los constituyentes del sistema físico estudiado.

Una partícula como el electrón o el protón no puede perder o cambiar su carga. La materia está formada por estas partículas con carga y el intercambio de estas entre las distintas partes de la materia es lo que genera el cambio en la cantidad de carga.

Por ejemplo, una barra de vidrio es frotada con un paño de seda. El frotamiento genera un intercambio de carga entre la seda y el vidrio. El vidrio pierde electrones y termina con exceso de protones, carga neta positiva. La seda adquiere los electrones perdidos por el vidrio, quedando con exceso de carga negativa. La suma total de carga antes y después del frotamiento se conserva.

Distintos procesos pueden dar lugar a los intercambios de carga:

- **Fricción:** frotando dos objetos de distintos materiales se puede lograr una transferencia de carga entre ellos.
- **Inducción:** al acercar un objeto cargado a un conductor se puede crear un flujo de carga en el interior de este último que tiene como resultado un desbalance de carga.

- **Conducción:** si un objeto con un exceso de carga se pone en contacto con un conductor, parte de este exceso será transferido al último dejándolo con una cantidad de carga distinta a la que tenía originalmente.

2.2. La ley de Coulomb

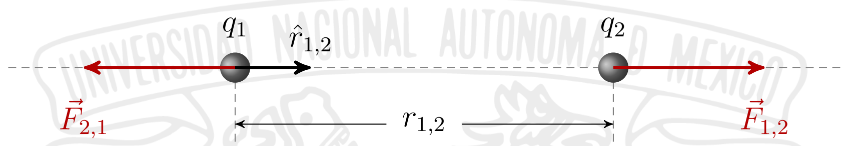


Figura 2.2: La ley de Coulomb

La fuerza ejercida por una carga q_1 sobre una carga q_2 es proporcional al producto de las cargas, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia $r_{1,2}$ que las separa y apunta en la dirección $\hat{r}_{1,2}$ que une a la carga que ejerce la fuerza q_1 con la carga q_2 sobre la que se ejerce la fuerza:

$$\boxed{\vec{F}_{1,2} = k\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2}\hat{r}_{1,2}} \tag{2.1}$$

El factor de proporcionalidad k es la constante de Coulomb

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$$

donde $\epsilon_0 = 8.854187 \times 10^{-12} \ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$ es la permitividad eléctrica del vacío.

Convención: de nuevo el orden de los subíndices indica en primer lugar la carga responsable de generar la fuerza y en segundo lugar la carga que experimenta la fuerza que ejerce la carga.

Ejercicio: Imagine que se tiene un par de partículas con cargas q_1 y q_2 en las posiciones dadas por $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ y $\vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ respectivamente. Escriba la fuerza eléctrica que experimenta cada una de las cargas en términos de sus coordenadas de posición.

Ejercicio: El electrón y el protón de un átomo de hidrógeno están separados (en promedio) una distancia de aproximadamente 0.5×10^{-10} m. Calcule la magnitud de la fuerza electrostática y la fuerza gravitacional que cada partícula ejerce sobre la otra y compárelas. ($m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C, $k = 8.99 \times 10^9$ Nm^{2}C^{-2}, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2})

Ejercicio: Calcule la magnitud de la fuerza electrostática y la fuerza gravitacional que sienten dos electrones separados por una distancia de 1 m y compárelas.

Ejercicio: En un experimento en el espacio, se mantiene fijo un protón y se libera otro desde el reposo a una distancia de 2.5 mm del primero. **(a)** ¿Cuál es la aceleración inicial del protón después de liberarlo? **(b)** Elabora diagramas cualitativos (¡sin números!) de aceleración-tiempo y velocidad-tiempo, para el movimiento del protón liberado.

Ejercicio: Dos esferas conductoras de masa 0.2 g y diámetro despreciable están suspendidas mediante hilos rígidos no conductores de un punto en común. La longitud de los hilos es $L = 1$ m y su masa es despreciable. Cuando a cada una de las esferas se les comunica una carga q, estas se repelen y se separan de manera que los hilos forman un ángulo $\theta = 45°$ con la vertical. Hallar la carga de cada esfera.

2.2.1. El principio de superposición

Cuando se tienen más de dos cargas, la fuerza neta ejercida sobre cada una de ellas se obtiene sumando la fuerza de Coulomb ejercida por cada una de las otras cargas por separado y haciendo la suma vectorial de cada una de las fuerzas resultantes.

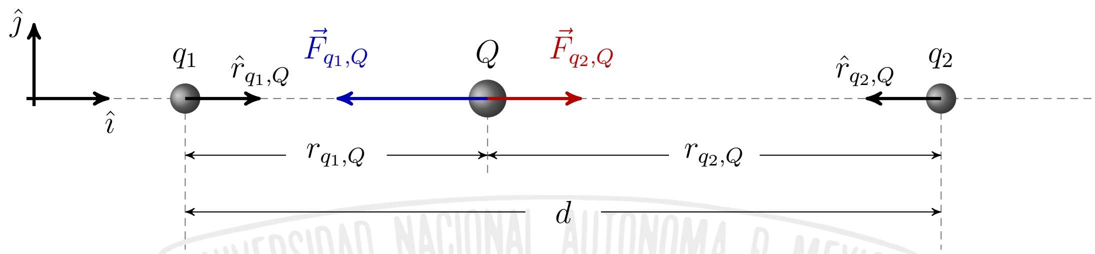
Consideremos el caso de un sistema de N cargas que se encuentran distribuidas en el espacio y se quiere conocer la fuerza efectiva que siente una de ellas, por ejemplo la carga q_1. Entonces, haciendo uso de la ley de Coulomb tenemos que la fuerza que la carga q_i ejerce sobre la carga q_1, que le podemos llamar carga prueba, se escribe como:

$$\vec{F}_{i,1} = k\frac{q_i q_1}{r_{i,1}^2}\hat{r}_{i,1} \tag{2.2}$$

En donde tenemos que $r_{i,1}$ es la distancia que une a los centros de la carga q_i con la carga q_1 y el vector unitario de dirección correspondiente a la línea que va del centro de la carga q_i al centro de la carga q_1 esta dado por $\hat{r}_{i,1}$. A continuación, para calcular la fuerza total o neta que actúa sobre la carga prueba q_1 se tiene que hacer la suma vectorial de cada una de las fuerzas ejercidas por las $N-1$ cargas,

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{T,1} &= \sum_{i=2}^{N}\vec{F}_{i,1} = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} + \cdots + \vec{F}_{N-1,1} + \vec{F}_{N,1} \\
&= k\frac{q_2 q_1}{r_{2,1}^2}\hat{r}_{2,1} + k\frac{q_3 q_1}{r_{3,1}^2}\hat{r}_{3,1} + \cdots + k\frac{q_{(N-1)} q_1}{r_{(N-1),1}^2}\hat{r}_{(N-1),1} + k\frac{q_N q_1}{r_{N,1}^2}\hat{r}_{N,1} \\
&= \sum_{i=2}^{N} k\frac{q_i q_1}{r_{i,1}^2}\hat{r}_{i,1} \\
&= kq_1\sum_{i=2}^{N}\frac{q_i}{r_{i,1}^2}\hat{r}_{i,1}
\end{aligned}$$

Ejercicio: Considere dos cargas puntuales iguales q_1 y q_2 separadas una distancia d. ¿En qué punto (distinto de ∞) una tercera carga Q, colocada sobre la misma línea que une a las dos primeras, no experimentaría fuerza alguna?



Solución: Primero, la fuerza que ejerce la carga q_1 sobre la carga Q está dada por:

$$\vec{F}_{q_1,Q} = k\frac{q_1 Q}{r^2_{q_1,Q}}\hat{r}_{q_1,Q}$$

En segundo lugar, la fuerza que ejerce la carga q_2 sobre la carga Q es:

$$\vec{F}_{q_2,Q} = k\frac{q_2 Q}{r^2_{q_2,Q}}\hat{r}_{q_2,Q}$$

Aplicando el principio de superposición se tiene que la fuerza total sobre la carga Q es:

$$\vec{F}_Q = \vec{F}_{q_1,Q} + \vec{F}_{q_2,Q} = kQ\left[\frac{q_1}{r^2_{q_1,Q}}\hat{r}_{q_1,Q} + \frac{q_2}{r^2_{q_2,Q}}\hat{r}_{q_2,Q}\right]$$

Para que las fuerzas sobre la carga Q estén balanceadas, es necesario que $\vec{F}_Q = 0$. Entonces,

$$\left[\frac{q_1}{r^2_{q_1,Q}}\hat{r}_{q_1,Q} + \frac{q_2}{r^2_{q_2,Q}}\hat{r}_{q_2,Q}\right] = 0$$

Para simplificar esta ecuación, podemos colocar nuestro origen de coordenadas sobre la posición de la carga q_1, de modo que el vector de posición de la carga q_2 será $\vec{r}_{q_2} = d\,\hat{\imath}$ y el vector de posición de la carga Q lo podemos denotar como $\vec{r}_Q = x_Q\,\hat{\imath}$. Así, la ecuación anterior se escribe

$$\left[\frac{q_1}{x_Q^2}\frac{x_Q}{|x_Q|}\hat{\imath} + \frac{q_2}{(x_Q-d)^2}\frac{(x_Q-d)}{|(x_Q-d)|}\hat{\imath}\right] = 0$$

Los vectores unitarios $\hat{r}_{q_1,Q} = \frac{x_Q}{|x_Q|}\hat{\imath}$ y $\hat{r}_{q_2,Q} = \frac{(x_Q-d)}{|(x_Q-d)|}\hat{\imath}$ determinan la dirección de cada fuerza y dependen de la posición de la carga Q con respecto a las cargas q_1 y q_2. Si Q se encuentra a la derecha de la carga en cuestión, entonces el cociente será igual a $+1$ y el vector unitario correspondiente será igual a $+1\hat{\imath}$; si Q está a la izquierda, dicho cociente será igual a -1 y el vector unitario será $-1\hat{\imath}$. Con base en esta observación y volviendo a nuestro diagrama podemos distinguir tres casos distintos:

1) la carga Q está a la izquierda de q_1;

2) la carga Q está en medio de q_1 y q_2; y

3) la carga Q está a la derecha de q_2.

Analicemos cada uno de estos casos por separado.

1. La carga Q está a la izquierda de q_1, $x_Q < 0$:

$$\left[-\frac{q_1}{x_Q^2} - \frac{q_2}{(x_Q-d)^2}\right]\hat{\imath} = 0$$

$$-\frac{q_1}{x_Q^2} = \frac{q_2}{(x_Q-d)^2}$$

$$-\frac{q_2}{q_1} = \frac{(x_Q-d)^2}{x_Q^2}$$

$$\sqrt{-\frac{q_2}{q_1}} = 1 - \frac{d}{x_Q}$$

$$x_Q = \frac{d}{1-\sqrt{-(q_2/q_1)}}$$

Las cargas tienen que tener polaridades opuestas y $q_2 > q_1$ para que se cumpla que $x_Q < 0$.

2. La carga Q está en medio de q_1 y q_2, $0 < x_Q < d$:

$$\left[\frac{q_1}{x_Q^2} - \frac{q_2}{(x_Q - d)^2}\right]\hat{\imath} = 0$$

$$x_Q = \frac{d}{1 + \sqrt{(q_2/q_1)}}$$

Las cargas tienen que tener la misma polaridad.

3. La carga Q está a la derecha de q_2, $x_Q > d$:

$$\left[\frac{q_1}{x_Q^2} + \frac{q_2}{(x_Q - d)^2}\right]\hat{\imath} = 0$$

$$x_Q = \frac{d}{1 - \sqrt{-(q_2/q_1)}}$$

De nuevo las cargas tienen que tener polaridades opuestas, pero ahora $q_2 < q_1$ para que se cumpla que $x_Q > d$.

Ejercicio: Dos cargas puntuales $+Q$ y $-Q$ separadas una distancia d (dipolo eléctrico) están en el eje x, en $x = d/2$ y $x = -d/2$, respectivamente. Encuentra la fuerza neta sobre una tercera carga $+q$, también en el eje x en $x > d/2$. Simplifica el resultado y obtén la forma de la fuerza neta aproximada para x mucho mayor que d.

2.3. El campo eléctrico

Desde el punto de vista matemático, un campo es una función $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ que asigna un "*valor*" a cada punto del espacio. En el caso del campo eléctrico lo que se tiene es un *campo vectorial*, es decir, una función que asigna un *vector* a cada punto del espacio:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{f}(x, y, z)$$

Definición: El campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto del espacio se define como la fuerza eléctrica que actuaría sobre una *carga prueba* q_0 colocada en ese punto dividida por la magnitud de dicha carga prueba.

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} \tag{2.3}$$

Utilizando la ley de Coulomb obtenemos que el campo eléctrico generado por una carga puntual q en un punto $\vec{r} = \{x, y, z\}$ localizado a una distancia r de ella es

$$\vec{E}(x, y, z) = k\frac{q}{|(\vec{r} - \vec{r}_q)|^2}\frac{(\vec{r} - \vec{r}_q)}{|(\vec{r} - \vec{r}_q)|} \tag{2.4}$$

En esta ecuación, $\hat{r}$ es el vector unitario que apunta en la dirección que va desde la carga q hacia el punto $\vec{r}$ en donde se calcula el campo eléctrico.

En particular, si colocamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en la posición de la carga generadora del campo, tenemos que el campo eléctrico producido por una carga eléctrica localizada en el origen es simplemente:

$$\vec{E}(x, y, z) = k\frac{q}{|\vec{r}|^2}\hat{r} \tag{2.5}$$

donde ahora $\hat{r} = \vec{r}/\,|\vec{r}|$ es el vector unitario que apunta desde el origen y hacia el punto en donde se calcula $\vec{E}$.

A continuación, podemos utilizar el principio de superposición para escribir el campo generado por un conjunto de cargas puntuales de la siguiente manera:

$$\vec{E}(x,y,z) = k\sum_i \frac{q_i}{|(\vec{r}-\vec{r}_i)|^2}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|(\vec{r}-\vec{r}_i)|} \tag{2.6}$$

donde $\vec{r} = \{x,y,z\}$ es el vector de posición del punto en el que se calcula el campo eléctrico. En esta ecuación tenemos que los términos de la sumatoria corresponden al campo eléctrico generado por cada una de las cargas q_i.

Si extendemos este resultado a una distribución continua de carga tenemos que subdividir a la distribución de carga en elementos infinitesimalmente pequeños de carga dq y aplicar el principio de superposición tal y como lo hicimos en la última ecuación

$$\vec{E}(x,y,z) = k\int \frac{dq}{r^2}\hat{r} \tag{2.7}$$

donde ahora la distancia r y el vector de dirección $\hat{r}$ son respectivamente la distancia entre el elemento de carga dq y el punto $\{x,y,z\}$ donde se calcula el campo eléctrico, y el vector unitario de dirección que apunta desde el elemento infinitesimal de carga dq y hacia el punto $\{x,y,z\}$.

Trayectoria de una carga en un campo eléctrico

Una de las ventajas principales de utilizar el concepto de campo eléctrico consiste en que una vez que este ha sido calculado, ya no es necesario sumar la fuerza carga por carga de la distribución original de carga. Así, la trayectoria de una partícula cargada en la presencia de una distribución de carga dada se calcula a partir del campo eléctrico por medio de

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{2.8}$$

A continuación se utiliza la segunda ley de Newton para escribir

$$\begin{aligned} \vec{F} = q\vec{E} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow \qquad \vec{a} &= \frac{q\vec{E}}{m} \\ i.e. \qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{q}{m}\vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

2.3.1. Representación gráfica del campo eléctrico $\vec{E}$

En resumen, el campo eléctrico $\vec{E}$ es igual a la fuerza por unidad de carga que se ejercería sobre una carga puntual colocada en algún punto del espacio. Esta función asigna un vector a cada punto del espacio. La representación gráfica del campo eléctrico se construye mediante curvas tangentes al vector de campo eléctrico en todo punto del espacio.

Convención: se establece que la carga prueba utilizada para mapear el campo eléctrico a través el espacio es positiva de manera que las líneas de campo eléctrico siempre apuntan de manera que se alejan de las cargas con polaridad positiva y apuntan en la dirección de las cargas con polaridad negativa.

Campo eléctrico de una carga puntual. Una carga puntual $+Q$ o $-Q$ colocada en el origen de coordenadas.

Campo eléctrico del dipolo. Dos cargas puntuales $+Q$ y $-Q$ separadas una distancia $2a$ y localizadas sobre el eje x, en $x = a$ y $x = -a$, respectivamente. **(a)** Calcula el campo eléctrico generado por el dipolo en todos los puntos del eje y que cruza exactamente a la mitad entre las dos cargas, en $x = 0$. **(b)** ¿Qué sucede en el límite $y >> a$?

2.3.2. Trayectoria de una carga en un campo eléctrico $\vec{E}$

Una partícula de masa m y carga q en presencia de un campo eléctrico $\vec{E}(x,y,z)$ siente una fuerza $\vec{F}(x,y,z) = q\vec{E}(x,y,z)$. Para encontrar la trayectoria que seguiría la partícula si se le dejara libre en ese potencial es necesario recurrir a la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}(x,y,z) = q\vec{E}(x,y,z) = m\,\vec{a}(x,y,z) \tag{2.9}$$

De este modo obtenemos que la ecuación de movimiento de la partícula está dada por:

$$\vec{a}(x,y,z) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(x,y,z) = \frac{q}{m}\vec{E}(x,y,z)$$

donde $\vec{r} = \{x,y,z\}$ es el vector de posición de la partícula. En principio esta ecuación diferencial puede ser muy complicada debido a que no conocemos la dependencia explícita (ni espacial, ni temporal) del campo eléctrico $\vec{E}(x,y,z)$, por lo que recurriremos a una aproximación para mostrar la utilidad de dicha ecuación de movimiento.

El campo eléctrico homogéneo: Describe el movimiento de una carga (positiva o negativa) en un campo eléctrico constante y homogéneo a través de todo el espacio. Escribe las ecuaciones de la trayectoria de dicha carga en tres dimensiones.

Un campo eléctrico homogéneo es aquel que es de magnitud y dirección constante en una cierta región del espacio. Entonces, $\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}_0$ y una carga q, positiva o negativa, que se encuentre en esta región del espacio sentirá una fuerza constante, tanto en magnitud como en dirección, en todo momento:

$$\vec{F} = q\vec{E}_0$$

Para deducir las ecuaciones de la trayectoria de esta carga, a continuación hacemos uso de la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, para escribir:

$$m\vec{a} = q\vec{E}_0$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t) = q\vec{E}_0$$

Si al vector de posición en coordenadas cartesianas lo escribimos como $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, la ecuación anterior se convierte en un sistema de tres ecuaciones diferenciales independientes:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = \frac{q}{m}E_{0,x} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) = \frac{q}{m}E_{0,y} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}z(t) = \frac{q}{m}E_{0,z}$$

Cada uno de los términos a la derecha de cada una de estas tres ecuaciones son constantes, lo cual indica que la trayectoria de la carga corresponde a un movimiento con aceleración constante. Por consiguiente, las ecuaciones de velocidad y posición de cada una de estas tres componentes deberán de estar dadas por relaciones equivalentes a las ecuaciones 1.5 y 1.6 respectivamente.

Dado que hemos asumido que el campo eléctrico es homogéneo y que no cambia en el tiempo, podemos integrar una primera vez ambos lados de esta ecuación de movimiento para encontrar la velocidad de la partícula como función del tiempo,

$$\int q\vec{E}_0 dt = \int m\,\vec{a} dt$$

$$\vec{v}\Big|_{t=t_0}^{t} = \frac{q}{m}\vec{E}_0 t\Big|_{t=t_0}^{t}$$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \frac{q}{m}\vec{E}_0(t - t_0)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{q}{m}\vec{E}_0(t - t_0)$$

donde $\vec{v}_0$ es la velocidad de la partícula al tiempo $t = t_0$. A continuación integramos una segunda vez para encontrar la posición en función del tiempo,

$$\int_{t_o}^{t} \vec{v} dt = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0 + \frac{q}{m}\vec{E}_0(t - t_0)dt$$

$$\vec{r}\Big|_{t_0}^{t} = \left[\vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\frac{q}{m}\vec{E}_0 t^2 - \frac{q}{m}\vec{E} t_0 t\right]\Bigg|_{t_0}^{t}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{q}{m}\vec{E}_0\,(t - t_0)^2$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{q}{m}\vec{E}_0\,(t - t_0)^2$$

y aquí hemos denotado a la posición de la partícula $\vec{r}$ al tiempo $t = t_0$ como $\vec{r}_0 = \{x(t_0), y(t_0), z(t_0)\}$.

En resumen, las componentes de posición y velocidad de la trayectoria de una partícula sujeta a la acción de un campo eléctrico $\vec{E}_0$ la podemos expresar mediante:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{q}{m}\vec{E}_0\,(t - t_0)^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{q}{m}\vec{E}_0(t - t_0)$$

Observe que si comparamos a estas ecuaciones con aquellas que encontramos en el análisis cinemático de la trayectoria de una partícula con aceleración constante podemos identificar a la cantidad vectorial $\frac{q}{m}\vec{E}_0$ con la aceleración de la carga.

Ejercicio: Se observa que un electrón que atraviesa un campo eléctrico tiene una aceleración de $1 \times 10^{16}\ \mathrm{ms}^{-2}$ en la dirección x. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del campo eléctrico que produce esta aceleración?

Ejercicio: Un haz de protones entra con una velocidad inicial de $1.8 \times 10^8\ \mathrm{ms}^{-1}$ a lo largo del eje x en una región de $2\ \mathrm{cm}$ de longitud donde existe un campo eléctrico uniforme que apunta verticalmente hacia arriba. Los protones salen de la región formando un ángulo θ con el eje x. Si la magnitud del campo es $E = 90\ \mathrm{NC}^{-1}$, ¿cuánto vale el ángulo de salida?

Solución: Cada protón (masa m_p y carga e^+) entra en la región de $d = 2\ \mathrm{cm}$ de longitud en la que hay un campo eléctrico $\vec{E} = E\hat{\jmath}$ ($E = 90\ \mathrm{NC}^{-1}$) con una velocidad inicial $\vec{v}_i = v_0\hat{\imath}$. A su paso a través de esta región, cada protón experimenta una fuerza:

$$\vec{F} = e^+\vec{E} = e^+E\hat{\jmath} = m_p\vec{a}$$

En esta expresión observamos que la fuerza actúa únicamente a lo largo de la dirección y, por lo que la velocidad a lo largo de x se mantendrá constante y será sólo la velocidad en la dirección vertical la que sufrirá un cambio debido a la aceleración $\frac{e^+}{m_p}E$, pasando de cero al momento de entrar en la región de campo eléctrico y saliendo de esta a alguna velocidad final v_{yf}.

$$v_{yf} = v_{yi} + at = 0 + \frac{e^+}{m_p}Et$$

Lo que necesitamos saber es el ángulo que hace la trayectoria de los protones al salir de la región de campo eléctrico, el cual está dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_{yf}}{v_{x0}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{e^+}{m_p}Et}{v_0}\right)$$

donde sólo nos falta conocer el tiempo que le tomó al protón atravesar la región de longitud horizontal d. Dado que la velocidad horizontal permaneció constante, este tiempo es simplemente $t = d/v_0$, de modo que

$$\theta = \arctan\left(\frac{e^+}{m_p}\frac{d}{v_0^2}E\right)$$

2.4. El potencial eléctrico

Una carga q en presencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ experimenta una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$. Esto quiere decir que si la carga se desplaza desde un punto A hasta un punto B, el campo eléctrico estará realizando un trabajo

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Teorema trabajo-energía: El trabajo realizado sobre la carga q por la fuerza $\vec{F}$ al desplazarla desde el punto A hasta el punto B es igual al cambio en su energía cinética

$$W = q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Delta K$$

La fuerza eléctrica es conservativa, entonces el trabajo realizado se puede expresar también como un cambio en la energía potencial de la carga

$$W = q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Delta K = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

de modo que podemos escribir el cambio de la energía potencial de la siguiente manera

$$\Delta U = -q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

A continuación definimos la diferencia de potencial ΔV entre los puntos A y B en un campo eléctrico $\vec{E}$ como la diferencia de las energías potenciales entre estos puntos dividida por la carga q:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{2.10}$$

La diferencia de potencial ΔV y por tanto el potencial V es una cantidad escalar cuyas unidades son definidas como:

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{Volt} = [\mathrm{V}]$$

Calculemos **el potencial eléctrico generado por una carga puntual** Q en un punto cualquiera localizado a una distancia r de Q. Para encontrar esto comencemos primero por recordar que el campo eléctrico generado por la carga puntual Q:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

A continuación observamos que la ecuación 2.10 define únicamente la diferencia de potencial entre dos puntos. Por lo tanto, necesitamos determinar un punto de referencia con respecto al cual vamos a calcular la diferencia de potencial en el punto de interés. Para esto observamos que

$$\lim_{r\to\infty} \vec{E} = 0,$$

por lo que podemos considerar al infinito como el punto de referencia en donde consideraremos que el potencial toma un valor igual a cero. De este modo, la diferencia de potencial será

$$\Delta V = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Dado que la fuerza eléctrica es conservativa, no importa el camino por el que traemos a la carga de prueba q desde infinito hasta el punto a la distancia r de Q. Así, sin pérdida de la generalidad, podemos considerar que los elementos infinitesimales $d\vec{r}$ de la trayectoria sean siempre paralelos al campo eléctrico. Entonces $\vec{E} \cdot d\vec{r} = E\,r$

$$\begin{aligned}\Delta V = -\int_{\infty}^{r} E dr' &= -\int_{\infty}^{r} k\frac{Q}{r'^2} dr' \\ &= k\frac{Q}{r'}\bigg|_{\infty}^{r} = \left(k\frac{Q}{r} - 0\right) \\ &= k\frac{Q}{r}\end{aligned}$$

Ahora $\Delta V = V(r) - V(\infty)$ donde hemos dicho que nuestro punto de referencia era tal que $V(\infty) = 0\ \mathrm{V}$ y tendremos entonces que $\Delta V = V(r)$. En conclusión, una carga puntual Q genera a una distancia r un potencial eléctrico $V(r)$ dado por

$$V(r) = k\frac{Q}{r} \tag{2.11}$$

Observe que todos los puntos a una cierta distancia r_0 están exactamente al mismo potencial y todos estos puntos generan una esfera de radio r_0 con centro en la carga Q. Por lo tanto, esta esfera es una superficie *equipotencial* del campo generado por la carga Q.

El potencial eléctrico ha sido definido como la energía potencial por unidad de carga. Así, conocido el potencial eléctrico es posible conocer la energía potencial a la que está sujeta una carga cualquiera q en un punto dado del espacio; tan solo se multiplica al potencial por la carga $U = qV$. Por ejemplo, la energía potencial almacenada en un sistema de dos cargas puntuales q_1 y q_2 separadas una distancia $r_{1,2}$ es

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}} = q_2 V_{q_1}(r_{1,2}) = q_1 V_{q_2}(r_{1,2})$$

donde $V_{q_1}(r_{1,2})$ [$V_{q_2}(r_{2,1})$] es el potencial eléctrico generado por la carga q_1 [q_2] a una distancia $r_{2,1} = r_{1,2}$ de su centro. Entonces, U es la energía requerida para poner a una carga en presencia de la otra habiéndola traído desde el infinito.

Ejercicio: *El modelo atómico de Bohr.*[1] Un electrón es atraído desde el infinito hasta una distancia $r_B = 5.3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}$ de un protón para formar un átomo de hidrógeno. ¿Cuál es el potencial generado por el protón a la distancia del radio de Bohr r_B?

Solución: Consideremos al protón como una carga puntual de modo que el potencial estará dado simplemente por

$$
\begin{aligned}
V(r_B) &= k\frac{e^+}{r_B} \\
&= 8.99 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2C^{-2}} \left(\frac{1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}}{5.3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}}\right) \\
&= 27.2\ \mathrm{JC^{-1}} = 27.2\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Ejercicio: ¿Cuál es la energía potencial del electrón cuando está a la distancia r_B del protón?

Solución: Recordemos simplemente que la diferencia de potencial se definió como la energía potencial por unidad de carga

$$
\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{\Delta U}{e^-}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad U &= e^- V = -k\frac{e^2}{r_B} \\
&= (-1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(27.2\ \mathrm{V}) = 27.2\ \mathrm{eV} \\
&= -43.5 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}
\end{aligned}
$$

[1] Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles, 2nd ed. (R.M. Eisberg, R. Resnick)(1985)(Wiley). PP. 100-101

Ejercicio: Suponiendo que el electrón realiza un movimiento circular uniforme alrededor del protón, ¿cuál es la energía cinética del electrón al moverse en una órbita circular de radio r_B?

Solución: Para el electrón describiendo un movimiento circular uniforme, la magnitud de su aceleración (ver ecuación 1.35) es igual a v^2/r_B. Así, la condición de estabilidad mecánica del movimiento del electrón indica que la fuerza centrífuga debe contrarrestar a la fuerza centrípeta:

$$m\frac{v^2}{r_B} - k\frac{e^2}{r_B^2} = 0$$

$$m\frac{v^2}{r_B} = k\frac{e^2}{r_B^2}$$

$$mv^2 = k\frac{e^2}{r_B}$$

Por lo tanto, la energía cinética del electrón es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\frac{e^2}{r_B}$$

Ejercicio: Por último, ¿cuál es la energía total del electrón en su órbita de radio r_B?

Solución: Ya calculamos la energía cinética y la energía potencial:

$$K = \frac{1}{2}k\frac{e^2}{r_B} \qquad\qquad U = -k\frac{e^2}{r_B}$$

Entonces, la energía total es $E = K + U$

$$E = \frac{1}{2}k\frac{e^2}{r_B} - k\frac{e^2}{r_B} = -\frac{1}{2}k\frac{e^2}{r_B}$$

$$E = -13.6 \text{ eV}$$

2.4.1. El principio de superposición aplicado al cálculo del potencial eléctrico

Para un grupo de cargas puntuales, el potencial eléctrico se obtiene al sumar algebráicamente las contribuciones generadas por cada una de las cargas por separado. Esto es,

$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{r_i} \tag{2.12}$$

donde $r_i = |\vec{r} - \vec{r}_i|$ es la distancia entre la posición $\vec{r}_i$ de la carga i y el punto $\vec{r} = (x, y, z)$ en el que se quiere conocer el potencial.

$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \tag{2.13}$$

Para una distribución continua de carga el potencial eléctrico se calcula sumando algebráicamente los potenciales producidos por cada uno de los elementos infinitesimales de carga que conforman a la distribución:

$$V(x, y, z) = \int k\frac{dq}{r} \tag{2.14}$$

2.4.2. Campo eléctrico y potencial eléctrico

La fuerza eléctrica como la gravitacional es una fuerza central. En el caso gravitacional obtuvimos que la fuerza podía obtenerse mediante el gradiente de la energía potencial del campo gravitacional. Para el caso eléctrico podemos extender este resultado y calcular el campo eléctrico a partir del potencial eléctrico mediante

$$\vec{E} = -\nabla V(x,y,z) \tag{2.15}$$

donde a través de $\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ se obtiene el gradiente de la función sobre la que esta operando.

$$\vec{E} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}V(x,y,z); \frac{\partial}{\partial y}V(x,y,z); \frac{\partial}{\partial z}V(x,y,z)\right\}$$

Por ejemplo, imagínese que una cierta distribución de carga en el espacio genera un potencial eléctrico de la forma $V(x,y,z) = ax^2 + by^2$, donde a y b son constantes positivas.

(a) ¿Cuál es el campo eléctrico correspondiente?

Solución:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\left\{\frac{\partial}{\partial x}V(x,y,z); \frac{\partial}{\partial y}V(x,y,z); \frac{\partial}{\partial z}V(x,y,z)\right\}\\ &= -\left\{\frac{\partial}{\partial x}(ax^2+by^2); \frac{\partial}{\partial y}(ax^2+by^2); \frac{\partial}{\partial z}(ax^2+by^2)\right\}\\ &= \{-2ax, -2by, 0\}\end{aligned}$$

(b) En un punto de coordenadas $(0, L, 0)$ se suelta una partícula de masa m y carga eléctrica q. ¿Se mueve la partícula? ¿Por qué?.

Solución: Considérese en general que la partícula esta en un punto (x,y,z) en presencia del campo eléctrico encontrado en el inciso (a). Entonces, esta carga estará sujeta a una fuerza eléctrica dada por:

$$\vec{F}(x,y,z) = q\vec{E}(x,y,z) = \{-2aqx, -2bqy, 0\}$$

En particular en el punto $(0, L, 0)$, la partícula siente una fuerza $\vec{F} = (0, L, 0)\{0, -2bqL, 0\}$.

(c) Encuentra la trayectoria que sigue. ¿Cómo depende la trayectoria del signo de la carga? Utilizando la forma general que se encontró en el inciso anterior y aplicando la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ encontramos que

$$\vec{F} = m\vec{a} = \{-2aqx, -2bqy, 0\}$$

Separamos ahora esta ecuación componente a componente para obtener las ecuaciones diferenciales que determinan la trayectoria de la carga q

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2a\frac{q}{m}x = -\frac{k_x}{m}x$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2b\frac{q}{m}y = -\frac{k_y}{m}y$$

donde hemos definido $k_x = 2aq$ y $k_y = 2bq$.

2.5. El campo magnético

- La unidad del campo magnético en el sistema internacional es el Tesla $[\mathrm{T}]$

$$1\ \mathrm{T} = 1\ \mathrm{N/Am} = 1\ \mathrm{NA^{-1}m^{-1}}$$

- El campo magnético generado por la tierra en la superficie es del orden de 10^{-5} T.

- En los imanes comunes el campo magnético es del orden de 10^{-3} T.

- No existen los monopolos magnéticos, (Ley de Gauss magnética)

$$\oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, da = 0$$

La fuerza generada por un campo magnético sobre una carga eléctrica es conocida como la fuerza de Lorentz,

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} \tag{2.16}$$

Esta ecuación indica que la fuerza magnética ejercida sobre una partícula cargada en movimiento es proporcional a su carga, a la magnitud de la velocidad con la que se desplaza y a la magnitud del campo magnético, además de que es igual a cero si la partícula se mueve de forma paralela al campo magnético. La dirección de esta fuerza en cada punto de la trayectoria es perpendicular a la velocidad de la partícula y al campo magnético, por lo que la trayectoria se curvará al entrar en una región de campo magnético.

Más en general, cuando también existe un campo eléctrico se tiene que la fuerza de Lorentz esta dada por

$$\vec{F} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \tag{2.17}$$

2.6. Las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial e integral son las siguientes.

- La ley de Gauss para el campo eléctrico establece que la divergencia del flujo neto de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga encerrada por la superficie:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{enc}}{\epsilon_0} \tag{2.18a}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, da = \frac{\rho_{enc}}{\epsilon_0} \tag{2.18b}$$

- La ley de Gauss para el campo magnético establece que la divergencia del flujo neto de campo magnético a través de una superficie S es igual a cero:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.19a}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, da = 0 \tag{2.19b}$$

  Esta ecuación implica que los monopolos magnéticos no existen.

- La ley de inducción de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.20a}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, da \tag{2.20b}$$

- La ley de Ampere-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{2.21a}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{enc} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, da \right) \tag{2.21b}$$

2.6.1. La divergencia y el rotacional

La divergencia: el operador vectorial de divergencia $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ asigna un valor escalar positivo o negativo que cuantifica la magnitud de una fuente o un sumidero de un campo vectorial $\vec{f}(\vec{r})$ en un punto dado. Para esto se considera un volumen infinitesimal que rodea a dicho punto de manera que la divergencia representa la densidad de flujo del campo vectorial que sale del volumen.

Si no hay fuentes en el interior del volumen elegido, entonces la divergencia del campo vectorial debe de ser cero.

El rotacional: el operador vectorial conocido como el rotacional describe la rotación infinitesimal de un campo vectorial en tres dimensiones, asignando a cada punto del dominio del espacio vectorial un nuevo vector. La magnitud y la dirección del rotacional caracterizan la rotación del campo vectorial en dicho punto. La dirección del vector rotacional corresponde al eje de rotación del campo vectorial y esta determinada por la regla de la mano derecha.

2.6.2. La ecuación de onda electromagnética

Consideremos el campo electromagnético en ausencia de cargas eléctricas. Entonces las ecuaciones de Maxwell serían:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{2.22}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.23}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.24}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{2.25}$$

Tomemos el rotacional de las ecuaciones que ya incluyen un rotacional

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{2.26}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{2.27}$$

A continuación usamos la identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla}^2 \vec{V}$$

donde $\vec{\nabla}^2 \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{V})$. Ahora utilizamos las dos ecuaciones de Maxwell restantes para obtener

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Lo que es lo mismo que

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{E} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0$$

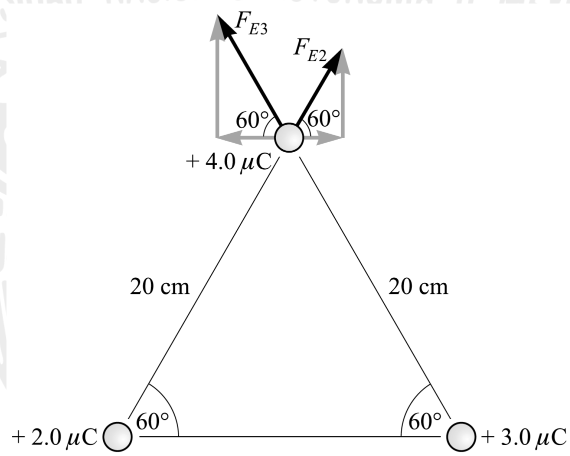
$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c_0^2 \, \vec{\nabla}^2 \vec{E} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c_0^2 \, \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0$$

donde $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ es la velocidad de la radiación electromagnética en el vacío.

2.7. Problemas

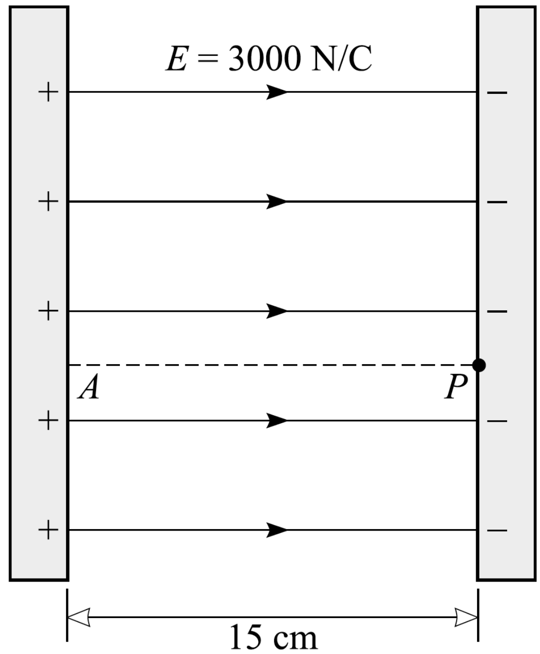
1. Dos cargas se encuentran sobre el eje x: la primera de $+3\ \mu\mathrm{C}$ en $x = 0$ y la segunda de $-5.0\ \mu\mathrm{C}$ en $x = 40\ \mathrm{cm}$. ¿Dónde deberá de estar colocada una tercera carga q para que la fuerza eléctrica ejercida sobre ella sea cero?

2. Las cargas mostradas en la figura están fijas. Encuentra la fuerza que actúa sobre la carga de $4.0\ \mu\mathrm{C}$ debido a las otras dos cargas.



3. Calcula (a) el campo eléctrico $\vec{E}$ en el vacío a una distancia de $30\ \mathrm{cm}$ de una carga puntual $q_1 = 5.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}$, (b) la fuerza sobre una carga $q_2 = 4.0 \times 10^{-10}\ \mathrm{C}$ localizada a $30\ \mathrm{cm}$ de distancia de q_1 y (c) la fuerza sobre una carga $q_3 = -4.0 \times 10^{-10}\ \mathrm{C}$ colocada a $30\ \mathrm{cm}$ de q_1 (en ausencia de q_2).

4. Dos placas metálicas cargadas se encuentran en vacío separadas una distancia de $15\ \mathrm{cm}$ como se muestra en la figura. El campo eléctrico entre las placas es uniforme y tienen una magnitud de $E = 3000\ \mathrm{NC}^{-1}$. Un electrón ($q = e^-$, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$) es liberado desde el reposo en el punto P justo en la frontera de la placa negativa. (a) ¿Cuánto tiempo le tomará llegar a la otra placa? (b) ¿A qué velocidad se estará moviendo justo antes de golpear a la segundo placa?



5. Suponga que el electrón en el diagrama anterior es disparado directamente hacia arriba desde el punto P con una velocidad de $5.0 \times 10^6\ \mathrm{ms}^{-1}$. ¿Qué tan lejos por encima del punto A chocará el electrón en la placa positiva?

Capítulo 3

Termodinámica

A la termodinámica le concierne el estudio de las propiedades físicas de los sistemas macroscópicos. Este estudio se realiza analizando las transformaciones de formas de energía como el calor y el trabajo en sistemas macroscópicos en términos de sus propiedades físicas, que son las cantidades que describen de forma única al sistema en cuestión. Ejemplo de estas propiedades son la presión, el volúmen, la temperatura, la entropía, entre otras. Estas propiedades son macroscópicas porque son el resultado del efecto neto de un gran número (i.e. *macroscópico*) de variables dinámicas. Por "efecto neto" debe de entenderse que estas son las propiedades promedio que reflejan el comportamiento dinámico de un sistema que poseé del orden de 10^{23} grados de libertad.

La manera en la que los sistemas macroscópicos pasan de un estado a otro es determinado por una serie de reglas **empíricas** que permiten establecer los límites dentro de los cuales estos procesos ocurren. A estas reglas se les conoce como las tres leyes de la termodinámica.

Ley cero de la termodinámica: Si dos cuerpos están en equilibrio térmico con un tercero, entonces también están en equilibrio térmico entre sí.

Esta ley nos permite definir las nociones de temperatura y flujo de calor, para lo cual necesitamos también introducir dos conceptos nuevos, el *contacto térmico* y el *equilibrio térmico*.

Calor es una forma de energía que se manifiesta como la transmisión de energía entre dos objetos como resultado de la diferencia de temperatura entre ellos. En este sentido, dos objetos están en *contacto térmico* si puede haber un intercambio de energía entre ellos. El *equilibrio térmico* es una situación en la que dos objetos en contacto térmico dejan de intercambiar energía en forma de calor, lo cual sucede cuando ambos objetos están a la misma temperatura.

La ley cero de la termodinámica la podemos expresar de la siguiente manera. Consideremos dos objetos A y B que **no están en contacto térmico**, pero nos gustaría saber si están en equilibrio térmico entre ellos. Para esto utilizamos un tercer objeto C (el termómetro) que ponemos en contacto térmico con el objeto A hasta que se alcanza el equilibrio térmico entre ellos. Cuando esto sucede, la temperatura del objeto C (la lectura del termómetro) permanece constante; A y C están a la misma temperatura. A continuación, C es retirado del objeto A y colocado en contacto térmico con el objeto B y se espera hasta que se alcanza de nuevo el equilibrio térmico. Si la temperatura del objeto C es la misma que en el paso anterior, entonces A y B se encontraban en equilibrio térmico desde un principio.

A partir de esta ley podemos entonces construir dispositivos para medir temperatura, los termómetros. El principio de operación de un termómetro se basa en que alguna propiedad física de algún sistema cambie como resultado del cambio en la temperatura del sistema. Ejemplos de las propiedades físicas y los sistemas que pueden utilizarse para medir temperatura son:

- el volumen de un líquido

- la longitud de un sólido
- la presión de un gas a volumen constante
- el volumen de un gas a presión constante
- la resistencia eléctrica de un conductor (efecto termistor)
- el color de un objeto

Para un sistema determinado y un rango de temperaturas dado, se puede establecer una escala de temperaturas con base en cualquiera de estas propiedades físicas. Los termómetros de mercurio o alcohol por ejemplo se basan en la expansión volumétrica de una masa contenida en un tubo capilar de vidrio.

La calibración del termómetro se realiza poniéndolo en contacto térmico con algún sistema físico que se mantenga a temperatura constante durante un tiempo que sea largo en comparación con el tiempo que le tome al termómetro alcanzar el equilibrio térmico con el objeto en cuestión. Una mezcla de agua y hielo en equilibrio térmico a presión atmosférica se mantiene a una temperatura constante que se conoce como el punto de congelación del agua. Así mismo, una mezcla de vapor de agua y agua en estado líquido en equilibrio térmico a presión constante se mantiene también a una temperatura constante conocida como el punto de ebullición del agua. La escala Celsius de temperaturas toma estos dos puntos como referencia de calibración y el rango entre ellos se subdivide en cien grados, por lo que esta escala la conocemos también como escala centigrada de temperaturas.

La escala de temperatura Celsius es relativa a los puntos de ebullición y congelación del agua. Sin embargo, es necesario contar con una referencia de temperatura absoluta que no dependa de un tipo de materia en particular y que por lo tanto sea aplicable a todo sistema termodinámico que queramos estudiar. Experimentalmente se observa que la expansión volumétrica de los gases a bajas presiones cuando la presión se mantiene constante es siempre proporcional a la temperatura sin importar los constituyentes atómicos o moleculares del gas en cuestión. Así mismo, se observa que cuando las rectas resultantes de repetir este tipo de medición con gases distintos son extrapoladas hacia bajas temperaturas, todas ellas se intersectan en un punto para el que la temperatura en la escala Celsius correspondería a $-273.15°\mathrm{C}$. Este es el mínimo absuluto de temperatura que puede alcanzarse en cualquier sistema físico y por lo tanto, esta temperatura se toma como la referencia o el cero de la escala absoluta de temperatura, la escala Kelvin.

$$T_C = T_K - 273.15 \tag{3.1}$$

Primera ley de la termodinámica: La energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma de un tipo a otro. El cambio en la energía interna de un sistema es igual a la cantidad de calor suministrada al sistema menos la cantidad de trabajo realizado por el sistema en sus alrededores.

Transferencia de energía: trabajo y calor

La energía interna de un sistema

$$\delta U = \delta Q - \delta W$$

Segunda ley de la termodinámica: Los sistemas tienden al equilibrio termodinámico.

Diferencias de temperatura, presión y potencial químico al interior de un sistema físico aislado tienden a equilibrarse.

Sistemas aislados tienden espontáneamente hacia un estado de equilibrio térmico, el cual corresponde al estado de máxima entropía del sistema. El proceso se conoce como *termalización*.

Este es el principio del aumento de la entropía y explica el fenómeno de irreversibilidad.

Calsius: “No existe proceso en la naturaleza cuyo único resultado se la tranferencia de calor desde un cuerpo a baja temperatura hacia un cuerpo a mayor temperatura.”

Kelvin: “No es posible un proceso en el que el resultado único sea la absorción de calor desde un reservorio y su conversión completa en trabajo.”

Tercera ley de la termodinámica: No es posible enfriar un cuerpo hasta el cero absoluto de temperatura.

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T}$$

El cambio en la entropía de un sistema es proporcional a la cantidad de calor introducido o extraído e inversamente proporcional a la temperatura a la cual sucede el proceso. Por lo tanto, para extraer una cantidad fija de calor δQ, el cambio correspondiente en la entropía del sistema tiende a infinito conforme la temperatura se acerca al cero absoluto.

3.1. El gas ideal

Un gas ideal es un sistema idealizado en el que los átomos o moléculas que lo constituyen no interactuan entre sí. Esta idealización o aproximación generalmente se cumple cuando los gases están suficientemente diluidos (presiones bajas) y están lejos de sus puntos de evaporación y de condensación. Bajo estas condiciones, el estudio del gas ideal consiste en determinar las relaciones que existen entre las variables termodinámicas utilizadas para determinar el estado del sistema.

Las variables termodinámicas que se utilizan para determinar el estado de un gas ideal en unidades del sistema internacional (SI) son:

- **Presión** (P): es la fuerza por unidad de área ejercida por el gas sobre las paredes del recipiente que lo contiene. Las unidades son el Pascal, $\mathrm{Nm}^{-2} = \mathrm{Pa}$.
- **Temperatura** (T): medida absoluta de la energía cinética promedio de los constituyentes del sistema, por lo tanto esta es siempre medida en K.
- **Volumen** (V): medido en litros L, donde $1\ \mathrm{L} = 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$
- **Cantidad de substancia** (n): esta variable es la cantidad de entidades fundamentales (átomos, moléculas, protones, electrones, etc.) que constituyen al gas; se mide en moles (mol), donde $1\ \mathrm{mol}$ corresponde a la cantidad de substancia que contiene tantos átomos, moléculas, iones, electrones o cualquier entidad fundamental de materia como el número de átomos que hay en $12\ \mathrm{g}$ de ^{12}C, lo cual corresponde al *número de Avogadro* N_A,

$$N_A = 6.02214179(30) \times 10^{23}$$

  Por consiguiente, la cantidad de substancia en moles n es igual al número de entidades fundamentales que contiene dicha porción de materia N entre el número de Avogadro N_A

$$n = \frac{N}{N_A}.$$

3.1.1. La ley de Charles (1780)

n y P constantes. Explica como se expanden los gases cuando son calentados.

“A presión constante (proceso *isobárico*), el volumen de una masa determinada de un gas ideal aumenta o disminuye proporcionalmente a su temperatura (escala absoluta de temperatura)"

$$V \propto T \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V}{T} = \text{cte.} \tag{3.2}$$

Esto quiere decir que para dos temperaturas distintas T_1 y T_2, los volúmenes correspondientes V_1 y V_2 serán tales que:

$$\frac{V_1}{T_1} = \text{cte.} = \frac{V_2}{T_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Gráficas de isobaras V vs. T...

Ejercicio: El volumen inicial de una cierta cantidad de gas es de $200\ \text{cm}^3$ a la temperatura de $20\ °\text{C}$. Calcula el volumen a $90\ °\text{C}$ si la presión permanece constante.

Ejercicio: Se calienta un gas de $27\ °\text{C}$ a $127\ °\text{C}$ mientras se mantiene a presión constante en un recipiente cuyo volumen aumenta. ¿En qué factor cambia el volumen?

3.1.2. La ley de Boyle (1662)

n y T constantes.

Para una cantidad fija de un gas ideal a temperatura fija (proceso *isotérmico*), la presión P y el volumen V son inversamente proporcionales.

$$V \propto \frac{1}{P} \qquad \Rightarrow \qquad PV = \text{cte.} \tag{3.3}$$

Entonces, para dos presiones distintas P_1 y P_2, los volúmenes correspondientes V_1 y V_2 serán tales que:

$$P_1V_1 = \mathrm{cte.} = P_2V_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

Gráficas de isotermas V vs. P...

Ejercicio: Una cantidad de gas ocupa un volumen de $80\ \mathrm{cm}^3$ a una presión de $750\ \mathrm{mm\,Hg}$. ¿Qué volumen ocupará a una presión de $1.2\ \mathrm{atm.}$ si la temperatura no cambia?

Ejercicio: Un cilindro con un volumen de $12\ \mathrm{L}$ contiene un gas de helio a una presión de $136\ \mathrm{atm}$. ¿Cuántos globos se pueden llenar con este cilindro a presión atmosférica si el volumen de cada globo es de $1\ \mathrm{L}$?

Ejercicio: Un tanque con un volumen de $0.1\ \mathrm{m}^3$ contiene gas de helio a una presión de $150\ \mathrm{atm}$. ¿Cuántos globos se pueden inflar si cada globo lleno es una esfera de $30\ \mathrm{cm}$ de diámetro y a una presión absoluta de $1.2\ \mathrm{atm}$?

3.1.3. La ley de presión-temperatura (1700-1702)

n y V constantes.

La presión de un gas de masa fija y volumen fijo es proporcional a la temperatura absoluta del gas

$$P \propto T \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{T} = \mathrm{cte.} \tag{3.4}$$

Ahora tendremos que para dos temperaturas distintas T_1 y T_2, las presiones correspondientes P_1 y P_2 serán tales que:

$$\frac{P_1}{T_1} = \text{cte.} = \frac{P_2}{T_2} \qquad \Rightarrow \qquad P_1 T_2 = P_2 T_1$$

Ejercicio: Una cierta cantidad de gas se encuentra a la presión de $790\ \mathrm{mm\,Hg}$ cuando la temperatura es de $25\ ^\circ\mathrm{C}$. Calcula la presión que alcanzará si la temperatura sube hasta los $200\ ^\circ\mathrm{C}$.

3.1.4. La ley de Guy-Lussac (1808)

Cuando dos o más gases reaccionan entre sí y sus volúmenes son medidos a la misma temperatura y presión, la razón entre los volúmenes de los reactivos y de los productos se expresan siempre como números enteros.

3.1.5. La ley de Avogadro (1811)

P y T constantes.

Volúmenes iguales de un gas a temperatura y presión constantes, contienen el mismo número de constituyentes básicos como átomos o moléculas,

$$\frac{V}{n} = \text{cte.}$$

donde $n \equiv$cantidad de sustancia del gas.

Recordemos que la cantidad de substancia n se mide en moles (mol). Una mol corresponde a la cantidad de substancia que contiene tantos átomos, moléculas, iones, electrones o cualquier entidad fundamental de materia como el número de átomos que hay en $12\ \mathrm{g}$ de ^{12}C, lo cual corresponde al *número de Avogadro* N_A,

$$N_A = 6.02214179(30) \times 10^{23}$$

De esta manera, la cantidad de materia en moles n es igual al número de entidades fundamentales que contiene dicha porción de materia N entre el número de Avogadro N_A

$$n = \frac{N}{N_A}$$

Ejercicio: Un recipiente cerrado de $2\ \mathrm{L}$ contiene oxígeno a $200\ ^\circ\mathrm{C}$ y $2\ \mathrm{atm}$. Calcula: a) Los gramos de oxígeno contenidos en el recipiente; b) Las moléculas de oxígeno presentes en el recipiente. $Ar(O) = 16$.

Ejercicio: Disponemos de un recipiente de volumen variable. Inicialmente presenta un volumen de $500\ \mathrm{cm}^3$ y contiene $34\ \mathrm{g}$ de amoníaco. Si manteniendo constante la P y la T, se introducen $68\ \mathrm{g}$ de amoníaco, ¿qué volumen presentará finalmente el recipiente? $Ar(N) = 14$, $Ar(H) = 1$.

3.1.6. Ley de los gases

Si combinamos ahora la ley de Avogadro con la ley de presión-temperatura, tendremos que dado que

$$\frac{V}{n} = \mathrm{cte.} \qquad\qquad \frac{P}{T} = \mathrm{cte.}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{T}\frac{V}{n} = \mathrm{cte.} \tag{3.5}$$

Procesos con n constante:

Si en esta ecuación asumimos que la cantidad de materia se mantiene constante a lo largo de un proceso termodinámico, podemos escribir

$$\frac{PV}{T} = \mathrm{cte.}$$

Si consideramos las presiones, volúmenes y temperaturas a un tiempo dado (P_1, V_1 y T_1) y a un tiempo posterior (P_2, V_2 y T_2), tendremos que

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = \text{cte.}$$

Ejercicio: Una cierta cantidad de oxigeno ocupa $0.0200\ \mathrm{m}^3$ a presión atmosférica, $101\ \mathrm{kPa}$, y a $5.0\ ^\circ\mathrm{C}$. Determine su volumen si la presión aumenta a $108\ \mathrm{kPa}$ mientras que su temperatura cambia a $30\ ^\circ\mathrm{C}$. (Schaum's pb. 16.1, pag.183).

Ejercicio: Un día en que la presión atmosférica es de $76\ \mathrm{cm\,Hg}$, el medidor de presión de un tanque registra que la presión en el interior es de $400\ \mathrm{cm\,Hg}$. El gas en el tanque está a una temperatura de $9\ ^\circ\mathrm{C}$. Si el tanque es calentado a $31\ ^\circ\mathrm{C}$ por el sol y no hay fuga de gas, ¿cuánto registrará del medidor de presión? (Schaum's pb. 16.2, pag.183).

3.1.7. La ley del gas ideal

Si denotamos a la constante en la ecuación 3.5 como R,

$$\Rightarrow \frac{P}{T}\frac{V}{n} = R$$

entonces obtenemos lo que se conoce como la ley del gas ideal,

$$PV = nRT$$

donde R es conocida como la constante universal de los gases:

$$R = 8.3144621(75)\ \mathrm{J\,mol^{-1}K^{-1}}$$

Si ahora regresamos a la ley del gas ideal e incluímos el número de moles n en términos del número de Avogadro N_A tendremos que

$$PV = \left(\frac{N}{N_A}\right) RT$$

$$PV = N k_B T \tag{3.6}$$

Donde hemos identificado al cociente $\frac{R}{N_A}$ con la constante de Boltzmann k_B,

$$k_B = \frac{8.3144621(75)\ \mathrm{J\,mol^{-1}K^{-1}}}{6.02214179(30) \times 10^{23}} = 1.3806504(24) \times 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$$

Por sus unidades, k_B corresponde a la cantidad de energía que tiene cada una de las partículas elementales que constituyen al gas por cada grado de temperatura. Así, la cantidad $k_B T$ es proporcional a la energía cinética promedio que tiene cada una de las partículas elementales que constituyen a un gas a la temperatura T.

Ejercicio: Un gas ocupa un volumen de $2\ \mathrm{L}$ en condiciones normales. ¿Qué volumen ocupará esa misma masa de gas a $2\ \mathrm{atm}$ y $50\ ^{\circ}\mathrm{C}$?