ξ constante arbitraria

esto se traduce en

$$\boxed{\int \frac{\mathcal{D}A_\mu(x)}{\mathrm{Vol}(U(1))} e^{iS[A]} = \mathcal{N}_\xi \int \mathcal{D}A(x) \exp\left[i \int d^4x \left\{ \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial\cdot A)^2 \right\} \right]}.$$

constante de normalización ↑ incluye a Δ_{FP}, que en el caso abeliano es una constante

término fijador de norma

L1: 02/02/16

Consideremos ahora el caso de un campo fermiónico $\psi(x)$, donde los operadores satisfacen relaciones de anticonmutación.

En notación apropiada para un número finito de grados de libertad, en lugar de $[\hat{q}_a, \hat{p}_b] = i\delta_{ab}$, $[\hat{q}_a, \hat{q}_b] = 0 = [\hat{p}_a, \hat{p}_b]$ tendremos entonces

$$\boxed{\{\hat{\psi}_a, \hat{\chi}_b\} = i\delta_{ab} \quad , \quad \{\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b\} = 0 = \{\hat{\chi}_a, \hat{\chi}_b\} \quad a,b = 1,\dots,L}$$

donde $\hat{\chi}_a$ denota el momento canónicamente conjugado a $\hat{\psi}_a$ —p.ej., $\hat{\chi}_a = i\hat{\psi}_a^\dagger$ para el campo de Dirac (salvo que en el caso de campos, evidentemente $a \to (a, \vec{x})$ y $\delta_{ab} \to \delta_{ab}\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$).

Podemos notar que $\hat{\psi}_a$ y $-i\hat{\chi}_b$ satisfacen las relaciones de anticonmutación apropiadas para un par de operadores de creación y aniquilación fermiónicos, $\{\hat{a}_a, \hat{a}_b^\dagger\} = \delta_{ab}$, $\{\hat{a}_a, \hat{a}_b\} = 0 = \{\hat{a}_a^\dagger, \hat{a}_b^\dagger\}$.

$\hat{\psi}_a \quad -i\hat{\chi}_b$

Dado que $\hat{\psi}_a \hat{\psi}_a = 0$, existe un estado $|0)$ tal que

$$\hat{\psi}_a |0) = 0 \quad \forall\ a \qquad (\text{análogo a } \hat{a}_a|0\rangle = 0),$$

a partir del cual podemos construir una base para el "espacio de Fock" correspondiente,

$$\underbrace{|a_1, a_2, \cdots, a_n)}_{\text{equivale a } |0,0,0,1,0,0,1,0,\ldots\rangle \text{ con los 1 en el lugar } a_1, a_2, \ldots} \equiv (-i\hat{\chi}_{a_1})(-i\hat{\chi}_{a_2}) \cdots (-i\hat{\chi}_{a_n})\, |0)$$

con $n = 0, \ldots, L$, $\quad a_j \neq a_k \ \forall\ 1 \leq j, k \leq n \quad j \neq k$

(base análoga a $\hat{a}_{a_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{a_n}^\dagger |0\rangle$). Aprendemos entonces que el espacio de Hilbert de nuestro sistema fermiónico es 2^L-dimensional (muy diferente al caso bosónico $\{|q\rangle\}$).

En el caso bosónico, para obtener la integral funcional utilizamos bases $\{|q\rangle\}$ y $\{|p\rangle\}$ de eigenestados de $\hat{q}_a$ y $\hat{p}_a$, respectivamente, así que necesitamos las bases análogas aquí, (cf. $\hat{q}_a|q\rangle = q_a|q\rangle$, $\hat{p}_a|p\rangle = p_a|p\rangle$)

$$\hat{\psi}_a|\psi\rangle = \psi_a|\psi\rangle \;, \qquad \hat{\chi}_a|\chi\rangle = \chi_a|\chi\rangle .$$

Pero notando que $0 = \{\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b\}|\psi\rangle = (\psi_a\psi_b + \psi_b\psi_a)|\psi\rangle$, aprendemos que los eigenvalores ψ_a (y, de manera similar, los χ_a) NO pueden ser números ordinarios, puesto que anticonmutan.

Lo que hacemos entonces es considerar a los ψ_a's y χ_a's como elementos de un espacio vectorial V_1 (para que podamos sumarlos o reescalarlos) (real o complejo) de dimensión $D \geq 2L$ (así que $V_1 \simeq \mathbb{R}^D$ ó $\mathbb{C}^D$; eventualmente necesitaremos $D \geq 2LN \to \infty$ para la integral funcional, donde $N \equiv \frac{t'-t}{\Delta t}$ es igual que antes el número de subintervalos en la discretización de $\int \mathcal{D}\psi(t)$), y definir formalmente un producto bilineal y asociativo, conocido como 'producto exterior', tal que

$$\boxed{\theta\theta' = -\theta'\theta \quad \forall\ \theta, \theta' \in V_1} \qquad (\Rightarrow \theta^2 = 0 \quad \forall\ \theta \in V_1).$$

Podemos notar que los resultados de este producto

$(\theta_1\theta_2)(\theta_3\theta_4) = (\theta_3\theta_4)(\theta_1\theta_2)$ por asociatividad del producto

conmutan entre sí, y forman parte de un nuevo espacio vectorial, V_2, que tiene dimensión $\binom{D}{2}$:
si e_j con $j=1,\ldots,D$ es una base para V_1, entonces $e_j e_k$ con $1 \leq j < k \leq D$ es una base para V_2.
De manera similar, los productos triples $\theta\theta'\theta''$ (anticonmutan y) pertenecen a un espacio vectorial V_3 de dimensión $\binom{D}{3}$, los productos cuádruples a V_4 de dimensión $\binom{D}{4}$, ..., y los productos D-tuples a V_D de dimensión $\binom{D}{D}=1$.
Para obtener un espacio vectorial cerrado bajo este producto y con elemento identidad, consideramos también a $V_0 \equiv \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ de dimensión $\binom{D}{0}=1$, y formamos la suma directa

$$A_D \equiv V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_D ,$$

que tiene dimensión

$$\binom{D}{0} + \binom{D}{1} + \binom{D}{2} + \ldots + \binom{D}{D} = 2^D$$

y se conoce como álgebra de Grassman (o álgebra exterior).

Para entender esta estructura de forma más concreta, tomemos como ejemplo el caso $D=3$, donde V_0, V_1, V_2, V_3 tienen respectivamente dimensión $1, 3, 3, 1$.

Si e_1, e_2, e_3 constituyen una base para V_1 ← nos sirve para 1ψ y 1χ, entonces $e_{12} \equiv e_1 e_2$, $e_{13} \equiv e_1 e_3$, $e_{23} \equiv e_2 e_3$ son una base para V_2, y $e_{123} \equiv e_1 e_2 e_3$ es una base para V_3.

Cualquier elemento $\Theta \in V_1$ se puede descomponer en términos de esta base, $\Theta = \sum_j \alpha_j e_j$ con $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y puede por tanto representarse simplemente como $\Theta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

Similarmente, podemos escribir $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \in V_2$ y $(\gamma_1) \in V_3$.

Los elementos de p.ej., la suma directa $V_2 \oplus V_3$ son por definición del tipo $\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{13} + \beta_3 e_{23} + \gamma_1 e_{123}$, es decir, para sumar elementos de V_2 y V_3 promovemos

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\gamma_1) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

y al sumar obtenemos entonces

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando esta misma idea a la suma total, vemos que el álgebra de Grassmann en cuestión,

$$A = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

es un espacio vectorial 8-dimensional ($2^3 = 8$) constituido por elementos

$$z + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{13} + \beta_3 e_{23} + \gamma_1 e_{123},$$

que (con esta elección de base) pueden representarse en la forma

$$\begin{pmatrix} z \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

y que tienen un producto entre sí, definido a partir de $e_j e_k = -e_k e_j$.

(El ejemplo más conocido de un álgebra de Grassmann es el conjunto de formas diferenciales sobre una variedad D-dimensional, $\omega_{(p)} \equiv \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \cdots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p}$ con $p = 0, 1, \ldots, D$, donde $\wedge$ denota al "producto cuña" o "producto exterior" y $\omega_{\mu_1 \cdots \mu_p}$ es un tensor de rango $(0,p)$ totalmente antisimétrico.)

Llamamos a los elementos básicos $\theta \in V_1$ Variables de Grassmann o números anticomutativos — y hay que tener claro que son tan 'números' como los números complejos $\mathbb{C} \equiv \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$

$$\left(\text{cf. } A_1 \equiv \{ x + ey \mid x, y \in \mathbb{R}, e^2 = 0 \} \right).$$

Más en general, los elementos de V_{2n} y V_{2n+1} se conocen como variables de Grassmann 'pares' e 'impares', respectivamente.

Adoptaremos además la convención de que

$$\{\theta, \hat{\psi}_a\} = 0 = \{\theta, \hat{\chi}_a\} \qquad \forall a.$$

Usando estos ingredientes, podemos definir entonces

$$|\psi\rangle \equiv \exp\left(-i\sum_{a=1}^{L}\hat{\chi}_a\psi_a\right)|0\rangle$$

(análogo al estado coherente $\exp(c\hat{a}^\dagger)|0\rangle$), es decir,

$$|\psi) = \prod_{a=1}^{L}\exp(-i\hat{\chi}_a\psi_a)|0\rangle$$

$$= \prod_{a=1}^{L}(1-i\hat{\chi}_a\psi_a)|0\rangle$$

la serie del exponencial se trunca porque $\psi_a\psi_a=0$ (y $\hat{\chi}_a\hat{\chi}_a=0$)

$$= (1-\psi_1\underbrace{(-i\hat{\chi}_1)}_{\text{análogo a } \hat{a}_1^\dagger})(1-\psi_2(-i\hat{\chi}_2))\cdots(1-\psi_L(-i\hat{\chi}_L))|0\rangle$$

$$= |0\rangle - \psi_1(-i\hat{\chi}_1)|0\rangle - \psi_2(-i\hat{\chi}_2)|0\rangle - \ldots - \psi_L(-i\hat{\chi}_L)|0\rangle$$

$$- \psi_1\psi_2(-i\hat{\chi}_1)(-i\hat{\chi}_2)|0\rangle - \ldots - \psi_{L-1}\psi_L(-i\hat{\chi}_{L-1})(-i\hat{\chi}_L)|0\rangle$$

$$- \ldots - \psi_1\psi_2\cdots\psi_L(-i\hat{\chi}_1)(-i\hat{\chi}_2)\cdots(-i\chi_L)|0\rangle,$$

que expresado en términos de la base original (p. 585) es

$$|\psi\rangle = |0\rangle - \sum_{a=1}^{L}\psi_a|a\rangle - \sum_{a_1<a_2}\psi_{a_1}\psi_{a_2}|a_1,a_2\rangle - \ldots - \psi_1\cdots\psi_L|1,\ldots,L\rangle.$$

(Podemos notar aquí que $|\psi\rangle$ de hecho NO forma parte del mismo espacio de Hilbert, sino de un espacio extendido donde permitimos coeficientes en el álgebra de Grassmann. Esta diferencia no importará para nuestros propósitos.)

Podemos verificar que $|\psi\rangle$ es un eigenestado de los operadores $\hat{\psi}_a$:

$$\hat{\psi}_b|\psi\rangle = \hat{\psi}_b (1-i\hat{\chi}_b\psi_b) \prod_{a\neq b} \underbrace{(1-i\hat{\chi}_a\psi_a)}^{\exp(-i\hat{\chi}_a\psi_a)}|0\rangle$$

$$= (\cancel{\hat{\psi}_b} - i\underbrace{\hat{\psi}_b\hat{\chi}_b}\psi_b)\prod_{a\neq b}(1-i\hat{\chi}_a\psi_a)|0\rangle$$

análogo a $\hat{a}_b$

$$\{\hat{\psi}_b, -i\hat{\chi}_b\} = \delta_{bb} = 1 \qquad \text{p.584}$$

$$= \psi_b \prod_{a\neq b}(1-i\hat{\chi}_a\psi_a)|0\rangle$$

$$= \psi_b(1-i\hat{\chi}_b\psi_b)\prod_{a\neq b}(1-i\hat{\chi}_a\psi_a)|0\rangle$$

$$= \psi_b \prod_a (1-i\hat{\chi}_a\psi_a)|0\rangle$$

$$= \psi_b|\psi\rangle .$$

Si definimos además al bra $\langle\psi|$ a través de

$\langle 0|\hat{\chi}_a = 0 \quad \forall\ a$ (análogo a $\langle 0|\hat{a}_a^\dagger = 0$),

normalizado de tal manera que $\langle 0|0\rangle = 1$,

podemos construir análogamente

$$\langle\psi| \equiv \langle 0|\left(\prod_{a=1}^{L}\hat{\psi}_a\right)\exp\Big(\underbrace{-i\sum_a\psi_a\hat{\chi}_a}_{+i\sum_a\hat{\chi}_a\psi_a}\Big)$$

$$= \langle 0|\prod_a\left[\hat{\psi}_a(1-i\psi_a\hat{\chi}_a)\right],$$

que tiene la propiedad

$$\langle\psi|\hat{\psi}_b = \langle 0|\left(\prod_{a\neq b}\left[\hat{\psi}_a(1-i\psi_a\hat{\chi}_a)\right]\right)\underset{\pm 1}{s_b}\,\underbrace{\hat{\psi}_b(1-i\psi_b\hat{\chi}_b)\hat{\psi}_b}_{\underbrace{\hat{\psi}_b(\cancel{\hat{\psi}_b}^{\,0}-i\psi_b\underbrace{\hat{\chi}_b\hat{\psi}_b}_{\{\hat{\chi}_b,\hat{\psi}_b\}=i})}_{\hat{\psi}_b\psi_b}}$$

$$= \langle 0|\left(\prod_{a\neq b}\left[\hat{\psi}_a(1-i\psi_a\hat{\chi}_a)\right]\right)s_b\,\hat{\psi}_b\overbrace{(1-i\psi_b\hat{\chi}_b)\psi_b}^{\psi_b}$$

$$= \langle 0|\prod_a\left[\hat{\psi}_a(1-i\psi_a\hat{\chi}_a)\right]\psi_b$$

$$= \langle\psi|\psi_b.$$

La relación análoga a $\langle q'|q\rangle = \delta^{(L)}(q'_a - q_a)$ es entonces

$$\langle\psi'|\psi\rangle = \langle 0|\left(\prod_{a=1}^{L}\hat{\psi}_a\right)\exp\left[i\sum_a \hat{\chi}_a(\psi'_a-\psi_a)\right]|0\rangle$$

$$= \langle 0|\prod_a\left[\hat{\psi}_a + i\hat{\psi}_a\hat{\chi}_a(\psi'_a-\psi_a)\right]|0\rangle$$

$$= \langle 0|\prod_a\left[0 + i\underbrace{\{\hat{\psi}_a,\hat{\chi}_a\}}_{i}(\psi'_a-\psi_a)\right]|0\rangle$$

$$= \prod_{a=1}^{L}(\psi_a-\psi'_a),$$

así que este producto juega un papel análogo a la delta de Dirac (más adelante veremos porqué).

De manera similar, podemos definir autoestados de $\hat{\chi}_a$:

$$|\chi\rangle \equiv \exp\left(-i\sum_a\hat{\psi}_a\chi_a\right)\prod_{a=L}^{1}(-i\hat{\chi}_a)|0\rangle,$$

$$\langle\chi| \equiv \langle 0|\exp\left(-i\sum_a\chi_a\hat{\psi}_a\right),$$

que satisfacen

$$\hat{\chi}_b|\chi\rangle = \chi_b|\chi\rangle, \qquad \langle\chi|\hat{\chi}_b = \langle\chi|\chi_b,$$

$$\langle \chi' | \chi \rangle = i^L \prod_{a=L}^{1} (\chi_a - \chi'_a) \,, \quad \sim \text{delta de Dirac}$$

$$\langle \chi | \psi \rangle = \exp\left(-i \sum_a \chi_a \psi_a\right) \,, \quad \text{OJO: } \neq 1 - i \sum_a \chi_a \psi_a$$

$$\langle \psi | \chi \rangle = \exp\left(+i \sum_a \chi_a \psi_a\right) .$$

Podemos notar que estas 2 últimas expresiones son análogas al traslape $\langle q | p \rangle = \exp(i \sum_a q_a p_a)$.

Como último ingrediente para formular la integral de trayectoria para un campo fermiónico, nos falta definir una noción de integración, análoga a la integral bosónica $\int_{-\infty}^{\infty} dq\, f(q)$.

Es decir, necesitamos un mapeo $A_D \to A_D$ que posea las mismas propiedades básicas que la integral usual: linealidad, invariancia bajo el corrimiento de la variable de integración ($q \to q + c$), y el hecho de que la integral de una derivada total es igual a cero (lo cual nos da la posibilidad de integrar por partes).

En el caso fermiónico, debido a que θ es 'nilpotente' ($\theta^2 = 0$), la función más general de UNA variable de Grassmann es

$$f(\theta) = A + \theta B .$$

En esta expresión, A y B podrían ser números ordinarios o anticonmutativos, por lo que debemos recordar que $\theta B = \pm B\theta$ si B es $\begin{smallmatrix}\text{par}\\ \text{impar}\end{smallmatrix}$.

La noción natural de "derivada" es

$$\frac{d}{d\theta} 1 = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\theta}\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{df(\theta)}{d\theta} = B .$$

objeto impar (mapea $V_1 \to V_0$)

Esta es evidentemente una copia de las reglas usuales para diferenciar con respecto a variables conmutativas, pero es importante notar que aquí NO hemos interpretado a $\frac{d}{d\theta}$ como una operación asociada a un cambio infinitesimal en la variable θ (ni podríamos hacerlo, puesto que el producto en $\mathcal{A}$ no es invertible, de modo que NO podemos definir el concepto de dividir entre un número anticonmutativo).

Por la condición de nilpotencia $\frac{d^2}{d\theta^2} = 0$, no existe un inverso de esta derivada, lo que hubiera sido el análogo de la integral indefinida.

Pero lo que nosotros necesitamos es un análogo fermiónico de la integral definida $\int_{-\infty}^{\infty} dq\, f(q)$, que implemente todas las propiedades mencionadas.

Estos requisitos en realidad no nos dejan con mucha opción. Dado que $\int d\theta$ será un objeto anticonmutativo, tenemos

$$\int d\theta : V_0 \to V_1 \quad , \quad \int d\theta : V_1 \to V_0 .$$

Por linealidad, nos basta con saber como "integrar" a 1 y a θ. Pero $1 = \frac{d}{d\theta}\theta$ es una "derivada total", así que debe integrar a cero.

Haciendo una elección de la normalización de $\int d\theta\, \theta$, tenemos entonces la integral de Berezin

$$\boxed{\int d\theta\, 1 = 0 \quad , \quad \int d\theta\, \theta = 1} \quad \Rightarrow \int d\theta\, \overbrace{f(\theta)}^{A+\theta B} = B\,.$$

Es decir, nuestra noción de integral NO tiene nada que ver con una suma, ¡sino que coincide con la derivada, $\int d\theta \equiv \frac{d}{d\theta}$!

Podemos notar que con esta definición se logra también tener un resultado que no cambia ante el corrimiento de la variable de integración:

$$\int d\theta_1\, (\theta_1 + \theta_2) = 1 = \int d\theta'\, \theta' \quad \text{con} \quad \theta' \equiv \theta_1 + \theta_2\,.$$

Para funciones de más de una variable anticonmutativa, la forma más general es

totalmente antisimétricos

$$f(\theta_1, \cdots, \theta_N) = f_0 + \sum_{j=1}^{N} \theta_j f_j + \sum_{j<k} \theta_j \theta_k f_{jk}$$

$$+ \sum_{j<k<l} \theta_j \theta_k \theta_l f_{jkl} + \ldots + \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_N f_{12\cdots N}$$

(la cual se puede pensar como una "serie de Taylor", que termina debido a la nilpotencia de las θ_j).

En este caso, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial\theta_{j_1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{j_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial\theta_{j_{n-1}}}\frac{\partial}{\partial\theta_{j_n}}\,\theta_{j_n}\theta_{j_{n-1}}\cdots\theta_{j_2}\theta_{j_1} = 1 ,$$

y para otros órdenes debemos tomar en cuenta que

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_i},\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right\}=0 \quad \forall\, i,j \quad \text{y} \quad \left\{\frac{\partial}{\partial\theta_i},\theta_j\right\}=0 \quad \forall\, i\neq j .$$

Sabiendo que la integral fermiónica es lo mismo que la derivada, deducimos entonces que

$$\boxed{\int d\theta_{j_1}\cdots d\theta_{j_n}\;\theta_{j_n}\cdots\theta_{j_1} = 1} ,$$

$$\{d\theta_j, d\theta_i\} = 0 \quad \forall\, i,j ,$$

$$\{d\theta_j, \theta_i\} = 0 \quad \forall\, j\neq i ,$$

de donde podemos inferir el resultado para la integral múltiple más general posible,

$$\int d\theta_{j_1} \cdots d\theta_{j_n} \, f(\theta_1, \dots, \theta_N)$$

$$= \int d\theta_{j_1} \cdots d\theta_{j_n} \left[f_0 + \sum_j \theta_j f_j + \sum_{j<k} \theta_j \theta_k f_{jk} + \dots \right]$$

coeficiente de $\theta_{j_n}\theta_{j_{n-1}}\cdots\theta_{j_1}$

$$= f_{j_n j_{n-1} \cdots j_1} + \sum_j \theta_j f_{j_n j_{n-1} \cdots j_1 j}$$

coeficiente de $\theta_{j_n}\theta_{j_{n-1}}\cdots\theta_{j_1}\theta_j$

$$+ \sum_{j<k} \theta_j \theta_k f_{j_n j_{n-1} \cdots j_1 j k} + \dots$$

coeficiente de $\theta_{j_n}\theta_{j_{n-1}}\cdots\theta_{j_1}\theta_j$

En particular,

$$\int d\theta_N \cdots d\theta_2 \, d\theta_1 \, f(\theta_1, \dots, \theta_N) = f_{12\cdots N} ,$$

así que la integral de Berezin puede ser vista simplemente como una herramienta para extraer el coeficiente del término más alto en la "serie de Taylor" de f.

Notar que

porque $\frac{d}{d\theta'}\theta' = 1$ con $\theta' = \lambda\theta$

$$\int d(\lambda\theta) \equiv \frac{d}{d(\lambda\theta)} = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\theta} = \frac{1}{\lambda} \int d\theta ,$$

y, más en general, la regla para el cambio de