

TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

Ustedes saben ya describir una partícula cuántica

No relativista:

$$\vec{x}, \vec{p} \rightarrow \hat{x}, \hat{p} \text{ con } [\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\delta^{ij} \quad (\hbar=1) \quad \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

delta de Kronecker

$$\text{Hamiltoniano } H = \vec{p}^2/2m \rightarrow \hat{H} = \hat{p}^2/2m$$

Los estados con energía definida son $|\vec{p}\rangle$ con $E = \vec{p}^2/2m$.

↖ momento definido

Para una partícula relativista sabemos que

$$p^\mu \equiv (E, \vec{p}) = (m\gamma, m\gamma\vec{v}) \quad (c=1)$$

↖ $1/\sqrt{1-v^2}$

satisface

$$p^2 \equiv p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad \leftrightarrow \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

↖ métrica de Minkowski = diag(+1, -1, -1, -1)

así que para una partícula cuántica relativista $\hat{H} = \sqrt{\hat{p}^2 + m^2}$,

y los estados con energía definida son $|\vec{p}\rangle$ con $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Aunque diría mucho de ser obvio, resulta que

$$\text{Partículas} + \text{Relatividad Especial} + \text{Mecánica Cuántica} \\ = \text{Teoría Cuántica de Campos}$$

¿Por qué campos? La respuesta corta: ¡porque el universo no está hecho de partículas, sino de campos!!

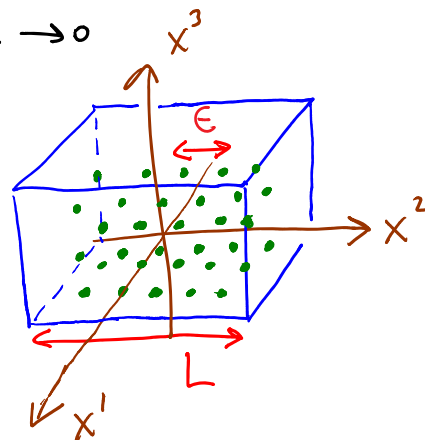
¿Qué es un campo? Por definición, un campo es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante del tiempo (matemáticamente, una función del espaciotiempo): $\varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi_{\vec{x}}(t)$

(Análogo a $\vec{x}_n(t)$ en sistema con N partículas
 \uparrow índice continuo $\in \mathbb{R}^3$
 \uparrow índice discreto $n=1, \dots, N$)

A partir de la definición vemos que cualquier campo es un sistema con un número infinito (y no denumerable) de grados de libertad.

Se le puede pensar como el límite $L \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$

del caso con un volumen finito L^3 en un espacio discretizado con espaciado ϵ , sistema que tendría $(L/\epsilon)^3$ grados de libertad.



A entender los resulta ya muy familiar un ejemplo de campo: el campo electromagnético, descrito por 6 números en cada

lugar, $\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{B}(t, \vec{x}) \leftrightarrow F_{\mu\nu}(x)$ intensidad de campo (field strength),
 eléctrico magnético $\uparrow \uparrow \equiv x^{\mu\nu}$
 antisimétrico

o mejor dicho, por 4 números en cada lugar,

$$A_\mu(x) \equiv \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{potencial} \\ \text{escalar}}}{\Phi(t, \vec{x})}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{potencial} \\ \text{vectorial}}}{\vec{A}(t, \vec{x})} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(Aedri) potencial} \\ \text{electromagnético} \end{array}$$

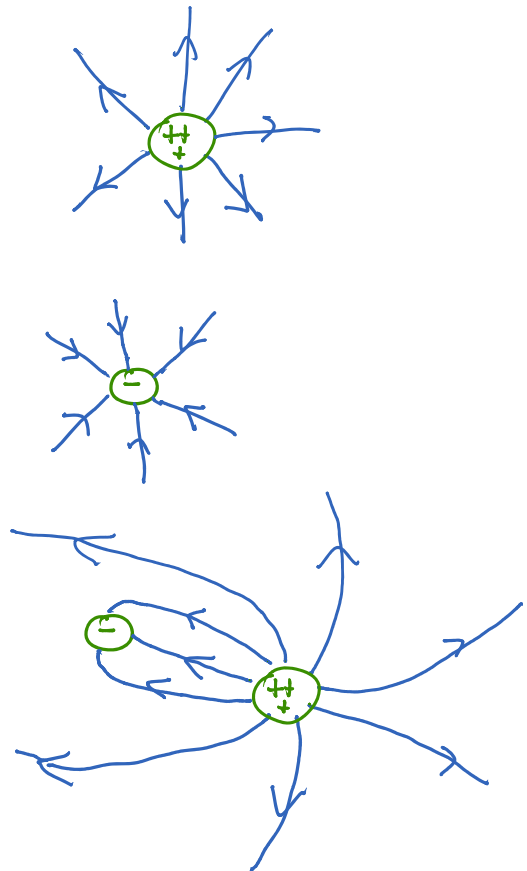
$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right\} \leftrightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

Vale la pena obtenerlos aquí con una adriación.

Cuando primero nos enseñan sobre \vec{E} y \vec{B} , visualizamos

que un imán o un objeto con carga eléctrica tiene (genera) su campo (que lo sigue cuando se mueve), que un segundo objeto tiene similarmente su propio campo, y que cuando ambos objetos están presentes sumamos su 2 campos para obtener el resultado total.

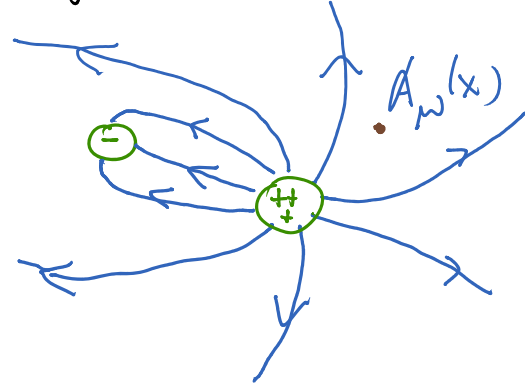
Pero éste NO es una buena manera de pensarlo.



Ya sea que haya uno, dos, muchos o ningún objeto, el campo electromagnético NO es "DE" ninguno de ellos: es un ente que llena siempre Todo el espacio, y puede describirse dando 4 números en cada sitio.

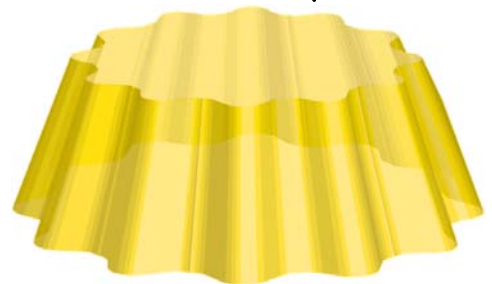
El valor de esos números SÍ depende de los objetos presentes; pero incluso cuando no hay ningún objeto, el campo electromagnético sigue estando ahí — es solo que los números son 0 en todo lugar, el campo está 'apagado'. El campo $A_\mu(x)$ es una propiedad de nuestro universo, preinstalada de fábrica.

Intuitivamente, podemos visualizarlo como una especie de 'gelatina' que llena absolutamente todo el universo y es capaz de vibrar (en un sentido abstracto) y sustentar ondas. Es justamente para describir cómo es que está vibrando que necesitamos especificar números en cada lugar.



$$\bullet A_\mu(x) = 0 \quad \forall x$$

2 El campo existe aún cuando no hay líneas / flechas

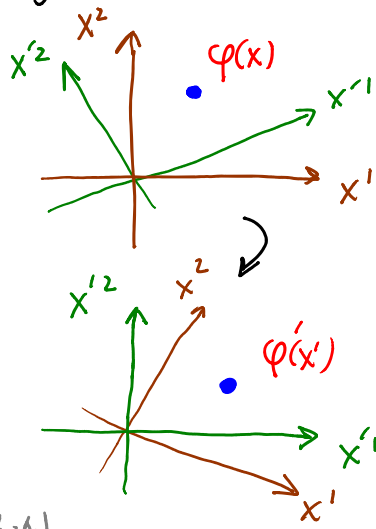


Por simplicidad, consideremos primero el campo más sencillo posible: un solo número real en cada x , que denotaremos $\varphi(x)$ (con $\varphi(x)^* = \varphi(x)$). Nos interesa estudiar campos relativistas (en el sentido de relatividad especial), es decir, con propiedades de transformación específicas bajo transformaciones de Lorentz
 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \equiv 3 \text{ rotaciones} + 3 \text{ empujones}$ ("boosts")
 (que forman el grupo $SO(3,1)$)
 ↗ matriz 4×4 tal que $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

Con $\varphi(x)$ solo tenemos un número en cada sitio, así que lo único decente que puede ocurrir cuando giramos nuestra cabeza (rotaciones) o pasamos caminando (empujes) es que ese número No cambie:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x') = \varphi(x)$$

↗ Cambia el nombre del punto
 ↘ Cambia la función matemática



pero el valor en ese punto sigue igual

Esto es lo que se conoce como un campo escalar real.

Describiremos la dinámica de este campo a través de

la acción

$$S[\varphi(x)] \equiv \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

↗ corchetes denotan funcional

Lagrangiano

densidad Lagrangiana

↗ dt en el mismo pie que $\vec{\nabla}$

Justo como en el caso de un sistema con un número finito de grados de libertad, las ecs. de mov. para el campo $\varphi(x)$ se deducen a partir del principio variacional — las soluciones clásicas $\varphi_{cl}(x)$ serán aquellas configuraciones donde la acción es estacionaria:

$$\varphi_{cl}(x) \rightarrow \varphi_{cl}(x) + \delta\varphi(x) \Rightarrow S[\varphi] \rightarrow S[\varphi_{cl} + \delta\varphi] \equiv S[\varphi_{cl}] + \delta S[\varphi_{cl}, \delta\varphi]$$

con $\delta S[\varphi_{cl}, \delta\varphi] = 0$ para cualquier variación $\delta\varphi(x)$ que

satisface condiciones de borde apropiadas en la frontera de la región de integración (normalmente $\int_{t_i}^{t_f} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x$, quizás también con $t_i \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow +\infty$).

Debido que $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \vec{\nabla})$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x) \Rightarrow \partial_\mu \varphi(x) \rightarrow \partial_\mu \varphi(x) + \underbrace{\partial_\mu \delta\varphi(x)}_{\equiv \delta(\partial_\mu \varphi(x))}$$

$$\delta S[\varphi, \delta\varphi] \equiv S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi]$$

$$= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\varphi(x) + \delta\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x) + \partial_\mu \delta\varphi(x)) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \delta\varphi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \partial_\mu \delta\varphi(x) \right\}$$

$$\stackrel{\text{partes}}{=} \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \right) \right\} \delta\varphi(x),$$

expresión que se anula para $\phi(x)$ arbitrario solo si se satisface la ecuación de movimiento para $\phi(x)$,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)}$$

Ecuación de Euler-Lagrange

Sabemos que la acción $S[\phi]$ debe ser un número invariante bajo Lorentz, y $d^4x \equiv dx^0 d^3x$ es invariante, así que a partir de $S = \int d^4x \mathcal{L}$ concluimos que la densidad lagrangiana debe ser también invariante, es decir, $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ debe ser una combinación de ϕ y $\partial_\mu \phi$ que sea escalar.

Claramente $\partial_\mu \phi$ es un vector de 4 \equiv vector covariante \equiv covector, así que no puede aparecer solo: para tener un escalar debemos

$$\text{formar la combinación } \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \eta^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \equiv (\partial\phi)^2$$

transforma como vector
 \equiv vector contravariante

$$= (\partial_t \phi)^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2$$

Si queremos que la ecuación de movimiento sea de segundo orden en las derivadas (que es la situación más común), nuestra densidad lagrangiana debe entonces tomar la forma

↙ elegimos por convención, ajustando la normalización de φ

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)$$

Término "cinético" "Potencial"
 $\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2$

A partir de esta descripción lagrangiana, podemos generar también los ingredientes de la correspondiente descripción hamiltoniana. Definimos primero (la densidad de) el momento canónico conjugado a $\varphi(x)$,

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x) \quad (\text{análogo a } \vec{p}_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n})$$

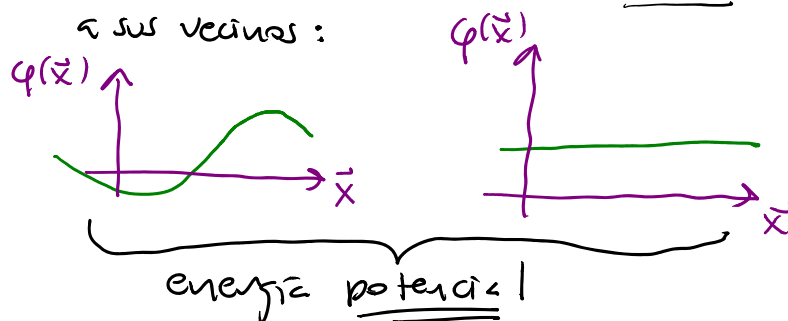
y utilizándolo (la), el Hamiltoniano

$$H \equiv \int d^3x (\pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}) \quad (\text{análogo a } H = \sum_n \vec{p}_n \cdot \dot{\vec{x}}_n - L)$$

$\equiv \mathcal{H}$ Densidad Hamiltoniana

$$= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + V(\varphi) \right]$$

Energía \rightarrow costo energético por variación espacial:
Cinética: cada $\varphi_{\vec{x}}$ está acoplado a sus vecinos:
 costo por encender el campo, incluso si tomamos un valor constante:
 costo por variación temporal

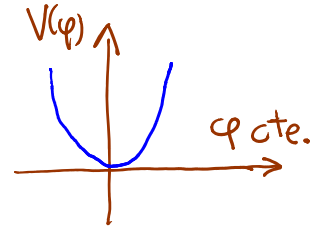


Lo más común es utilizar potenciales polinómicos,

$$V(\varphi) = C_2 \varphi^2 + C_3 \varphi^3 + C_4 \varphi^4 + C_5 \varphi^5 + \dots$$

Empezaremos estudiando el caso

más sencillo, donde V es cuadrático:



Para que $\varphi=0$ sea un mínimo en

lugar de un máximo (y represente por tanto el valor preferido del campo) necesitamos tener $V''(0) = 2C_2 > 0$,

condición que es más fácil de recordar si adoptamos la notación $C_2 = \frac{1}{2} m^2$ (con m real), es decir, $m^2 \equiv V''(0)$.

Por razones que entenderemos en breve, un campo (no necesariamente escalar) con potencial cuadrático se llama un campo libre. El campo escalar libre se conoce también como campo de Klein-Gordon, y según hemos visto, su densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Lagrangiano de Klein-Gordon

y su densidad hamiltoniana (densidad de energía),

$$\mathcal{H}_{KG} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Hamiltoniano de Klein-Gordon

La ecuación de movimiento (Euler-Lagrange) es

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \Rightarrow \boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0} \quad \text{Ecuación de Klein-Gordon}$$

$$\underbrace{\quad}_{\equiv \square} \text{D'Alembertiano (Laplaciano)}$$

$$= \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$$

Igual que en el Hamiltoniano, en esta ecuación vemos que cada variable $\varphi_{\vec{x}}(t)$ está acoplada a sus

vecinos:

$$\partial_t^2 \varphi(\vec{x}, t) - \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{x}, t) + m^2 \varphi(\vec{x}, t) = 0.$$

$$\partial_i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\varphi_{\vec{x} + \epsilon \vec{e}_i}(t) - \varphi_{\vec{x}}(t)]$$

↻ vector unitario en dirección i

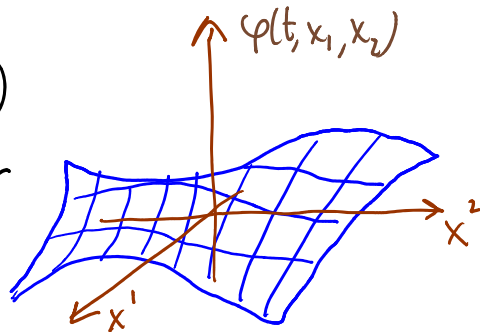
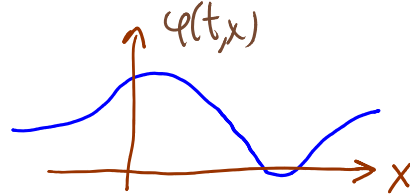
Es solo gracias a este acoplamiento que el campo es capaz de sustentar ondas — de hecho, si ponemos $m^2=0$ lo que tenemos es justamente

la llamada ecuación de ondas,

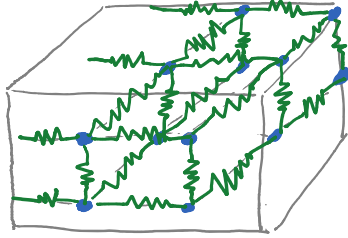
relevante para p.ej. una

cuerda de violín (cuya posición es descrita por un campo en $1+1$ dim)

o a la membrana de un tambor (campo en $2+1$ dim).



Vemos entonces que nuestro campo en 3+1 dim, $\varphi(t, \vec{x})$, en verdad es análogo a una GELATINA, o lo que es lo mismo,



a una colección de muchas pelotitas conectadas por resortes, en el límite donde el espaciamiento tiende a cero.

Por el acoplamiento entre puntos vecinos, el comportamiento de cada $\varphi_{\vec{x}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{x})$ (como el de cada pelotita) en general NO es sencillo. Pero para lidiar con las derivadas

especificar en la ecuación de movimiento $(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\varphi_{\vec{x}}(t) = 0$, podemos usar un truco familiar (de la cuerda, p.ej.): cambiar de variables por medio de una transformada de Fourier,

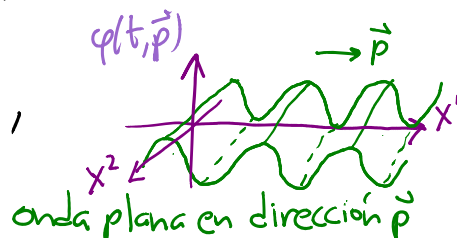
$$\varphi_{\vec{x}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{x}) \rightarrow \varphi_{\vec{p}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(t, \vec{x})$$

$$\left(\leftrightarrow \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(t, \vec{p}) \right),$$

$$\text{con } \varphi(t, \vec{x})^* = \varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi(t, \vec{p})^* = \varphi(t, -\vec{p}).$$

La ec. de mov. $(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = 0$ se convierte en

$$(\partial_t^2 + \underbrace{\vec{p}^2}_{\equiv E_{\vec{p}}^2} + m^2)\varphi(t, \vec{p}) = 0,$$



es decir, $\ddot{\varphi}(t, \vec{p}) = -E_{\vec{p}}^2 \varphi(t, \vec{p})$: cada $\varphi(t, \vec{p})$ es un oscilador armónico con frecuencia $\omega = E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$:

$$\varphi_{\vec{p}}(t) = \alpha_{\vec{p}} e^{-i\omega t} + \beta_{\vec{p}} e^{+i\omega t}, \text{ con } \beta_{\vec{p}} = \alpha_{-\vec{p}}^*$$

\hat{L} para tener
 $\varphi_{\vec{p}}^* = \varphi_{-\vec{p}}$

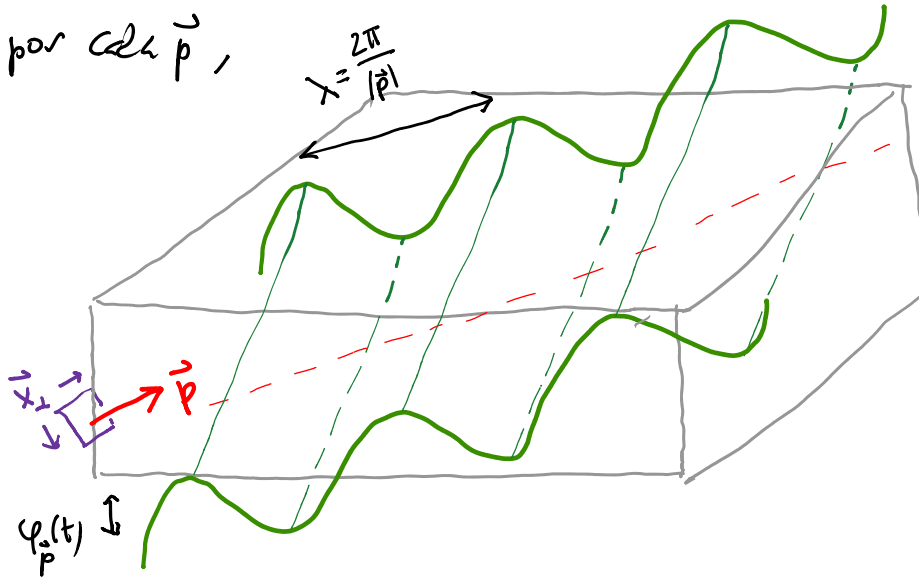
En otras palabras, hemos descubierto que los modos de Fourier son los modos normales del campo (compartimientos colectivos que oscilan armónicamente, tal como en una cuerda o en un sistema de péndulos con resortes), y nuestro campo libre $\varphi(t, \vec{x})$ no es entonces más que una colección infinita ($\varphi_{\vec{p}}(t) \forall \vec{p}$) de osciladores armónicos desacoplados — un sistema completamente análogo a una cuerda de violín, la membrana de un tambor, o una gelatina. El adjetivo "libre" para este campo se refiere justamente a que los modos de Fourier no interactúan entre sí (se superponen sin afectarse), que solo fue posible gracias a que la ec. de mov. es lineal en $\varphi \leftrightarrow \mathcal{L}$ es cuadrático en φ . Con esto entendemos perfectamente la manera en que $\varphi(t, \vec{x})$ evolucionará a nivel clásico:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \alpha_{-\vec{p}}^* e^{iE_{\vec{p}}t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \alpha_{-\vec{p}}^* e^{iE_{\vec{p}}t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right) \end{aligned}$$

(números complejos)

que se fijan por condiciones iniciales

es simplemente una superposición de ondas planas viajeras, una por cada \vec{p} ,



Como en cualquier sistema mecánico, existe una conexión muy bonita entre las simetrías de un campo (transformaciones de x y/o de φ que no cambian la acción $S[\varphi]$) y la existencia de cantidades conservadas (es decir, que no cambian con el tiempo). Concretamente,

la transformación se puede hacer gradualmente

el teorema de Noether afirma que cada simetría continua de lugar a una ley de conservación, es decir, a la existencia de una (cuerpo) corriente J^μ que se conserva,

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

(para configurar que resuelven la ec. de mov.)

$$\partial_0 J^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{Ecuación de continuidad}$$

densidad de carga \uparrow densidad de corriente (como en electro)

lo cual implica a su vez que la correspondiente carga de Noether

$$Q \equiv \int d^3x J^0$$

se conserva: $\frac{d}{dt} Q = \int d^3x \partial_0 J^0 = - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

ec. de continuidad \downarrow condiciones de borde apropiadas \downarrow

El teorema de hecho nos da una fórmula explícita para construir estas corrientes de Noether J_I^μ a partir de los campos de la teoría (y sus derivadas); pero no escribiremos aquí la fórmula general, porque nos tomaría un rato entender la notación necesaria. Ver p.ej. las pp. 163-175 del curso

<http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes>

[/indice.html#campos](#)

Mencionaremos aquí solo 2 ejemplos.

1) Normalmente consideramos teorías de campos que (además de invariantes de Lorentz) son invariantes bajo traslaciones en el espaciotiempo, $x^\mu \rightarrow x^\mu + c^\mu$ (transl.+ Lorentz \equiv Poincaré).

Estos son 4 simetrías continuas (una por cada valor de μ), y dan lugar entonces a 4 corrientes de Noether,

J_{μ}^{ν} con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, que es tradicional denotar

T_{ν}^{μ} ← componente
 ν ← nombre de la corriente, y constituyen el

tensar de energía-momento o energía-esfuerzos (canónico).

Por construcción, $\partial_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0$. Si llamamos $\phi_l(x)$ ($l=1, 2, \dots$) a los distintos campos de la teoría, la fórmula explícita resulta ser

$$T^{\mu}_{\nu} \equiv \partial_{\nu} \phi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_l)} - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L} \quad \text{(con suma sobre } l \text{)}$$

delta de Kronecker

y las 4 cargas conservadas son entonces

$$P_{\nu} \equiv \int d^3x T^0_{\nu} = \int d^3x \left(\partial_{\nu} \phi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_l(x))} - \delta^0_{\nu} \mathcal{L} \right) \quad \text{(Quadri-) Momento}$$

La carga para $\nu=0$ es la energía total de los campos,

$$P_0 = \int d^3x \left(\partial_0 \phi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_l(x))} - \mathcal{L} \right) = H \quad \text{Hamiltoniano } \checkmark$$

(cf. p. 8)

Densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} \equiv T^0_0$

y los 3 cargas con $\nu=i$ son el momento espacial

$$\vec{P} = - \int d^3x \vec{\nabla} \varphi_l \Pi_l .$$

signo por índice espacial subido: $P^i = \int d^3x T^{0i}$ ↙ carga conjugada

(Es importante No confundir a la densidad de momento espacial

$T^{0i}(x)$ con la densidad de momento canónica $\Pi_l(x) \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi}_l$.)

↙ conjugado al campo

2) Ordenemos una teoría con 2 campos escalares

(no necesariamente libres) $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 + V(\varphi_1, \varphi_2) .$$

Si nos restringimos al caso donde el potencial es solo función de la combinación $\varphi_1^2 + \varphi_2^2$, entonces la teoría es invariante bajo la 'rotación' (de los campos, no del espacio)

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} ,$$

con θ un ángulo arbitrario (porque $\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$).

A diferencia de las traslaciones y Lorentz que son simetrías espatiotemporales, esta rotación es un ejemplo

de lo que llamamos simetrías internas, porque No

involucran cambios de las coordenadas x^μ .

Si a partir de φ_1 y φ_2 formamos el campo escalar complejo

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) ,$$

← por convención

el lagrangiano se reescribe como

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - V(\Phi^* \Phi) ,$$

y la rotación interna toma la forma más sencilla

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{i\theta} \Phi(x) ,$$

que evidentemente es una simetría, con transformaciones que son elementos del grupo $U(1) \equiv \{ \text{"matrices"} \ 1 \times 1 \text{ unitarias} \}$
 $= \{ \text{fase } e^{i\theta} \}$. $(U^\dagger U = 1)$

La corriente de Noether correspondiente es

$$J^\mu(x) = \Phi^*(x) \partial^\mu \Phi(x) - \Phi(x) \partial^\mu \Phi^*(x) .$$

Cuando aprendamos cómo acoplar este campo al campo electromagnético $A_\mu(x)$, aprovecharemos esta simetría $U(1)$ y veremos que la corriente J^μ es ni más ni menos que la (usual) corriente eléctrica, y la carga de Noether $Q \equiv \int d^3x J^0(x)$ es entonces la carga eléctrica, cuya conservación se debe por tanto

a la existencia de la simetría interna!

Por la misma razón, **cualquier campo** (no necesariamente escalar) **que porte carga eléctrica** (es decir, que se acople a $A_\mu(x)$) **será un campo complejo** (o lo que es lo mismo, un paquete de 2 campos reales que pueden rotarse entre sí).

Ahora, para que éste sea un curso de teoría cuántica de campos, ¿cómo cuantizamos a nuestras gelatinas?

Sabemos que, para un sistema con un número finito de grados de libertad, la cuantización canónica consiste en promover las variables hamiltonianas básicas a operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert que describe a los estados del sistema, $H = \{|\psi\rangle\}$,

$$q_n(t), p_n(t) \rightarrow \hat{q}_n, \hat{p}_n$$

↑ coordenadas
↑ momentos
operadores independientes de t en el caso de Schrödinger

exigiendo que satisfagan las relaciones de conmutación canónicas

$$\boxed{[\hat{q}_n, \hat{p}_{n'}] = i \delta_{n,n'}, \quad [\hat{q}_n, \hat{q}_{n'}] = 0 = [\hat{p}_n, \hat{p}_{n'}]}$$

$$\delta_{n,n'} \rightarrow \text{delta de Kronecker} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } n=n' \\ 0 & \text{si } n \neq n' \end{cases}$$

La evolución dinámica de los estados $|\psi(t)\rangle$ es generada

por el operador hamiltoniano $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) \equiv H(\hat{q}, \hat{p})$ a través de la ecuación de Schrödinger $i\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$.

Equivalentemente, podemos pasar al caso de Heisenberg, donde los operadores son los que llevan la dependencia temporal,

$$\hat{q}_n(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{q}_n e^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{p}_n(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{p}_n e^{-i\hat{H}t},$$

las relaciones de conmutación canónicas se imponen a tiempos iguales,

$$[\hat{q}_n(t), \hat{p}_{n'}(t)] = i\delta_{n,n'}, \quad [\hat{q}_n(t), \hat{q}_{n'}(t)] = 0 = [\hat{p}_n(t), \hat{p}_{n'}(t)]$$

(en general $[\hat{q}_n(t), \hat{q}_n(t')] \neq 0$), los estados NO evolucionan con el tiempo ($|\psi\rangle_{\text{Heisenberg}} \equiv |\psi(t=0)\rangle_{\text{Schrödinger}}$ codifica

tal la historia del sistema), y la evolución dinámica de los operadores $\hat{O}(t)$ es generada por \hat{H} a través de la ecuación de Heisenberg

$$\frac{d\hat{O}(t)}{dt} = i[\hat{H}, \hat{O}(t)] + \frac{\partial \hat{O}(t)}{\partial t}$$

← posible dependencia explícita de t
(NO a través de $\hat{q}(t), \hat{p}(t)$)

Para cuantizar a nuestro campo escalar $\varphi(t, \vec{x}) \equiv \varphi_{\vec{x}}(t)$ con lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi)$ (sistema con un

número infinito y no numerable de grados de libertad), aplicamos exactamente la misma receta:

convertimos al campo $\varphi(t, \vec{x})$ y a su momento canónico conjugado $\pi(t, \vec{x}) = \dot{\varphi}(t, \vec{x})$ en operadores en el cuadro de Schrödinger, $\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x})$, o en el de Heisenberg,

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\varphi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{\pi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\pi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t},$$

e imponemos las relaciones de conmutación canónicas:

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] \\ [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] &= i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}}$$

donde la delta de Dirac $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} \infty & \text{si } \vec{x} = \vec{x}' \\ 0 & \text{si } \vec{x} \neq \vec{x}' \end{cases}$ tal que $\int d^3x f(\vec{x}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = f(\vec{x}')$ es el reemplazo natural de la delta de Kronecker que tenemos para variables discretas.

Se puede mostrar que las ecuaciones de Heisenberg para los operadores $\hat{\varphi}(t, \vec{x})$ y $\hat{\pi}(t, \vec{x})$ se combinan para implicar que, como esperaríamos, $\hat{\varphi}(t, \vec{x})$ satisface la misma ecuación de movimiento que era satisfecha por el campo $\varphi(t, \vec{x})$ a nivel clásico.

En el caso de un campo escalar real libre, la

ecuación de movimiento es la de Klein-Gordon (p. 10),

$$\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \hat{\varphi}(t, \vec{x}) = 0},$$

lo cual implica, tal como en las pp. 11-12, que los operadores asociados a los modos de Fourier

$$\hat{\varphi}_{\vec{p}}(t) \equiv \hat{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{\varphi}(t, \vec{x})$$

obedecen la ecuación del oscilador armónico

$$\partial_t^2 \hat{\varphi}(t, \vec{p}) = -\omega^2 \hat{\varphi}(t, \vec{p}) \quad \text{con frecuencia } \omega = E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

El punto central aquí es que ya habremos aprendido que a nivel clásico un campo libre es una colección de osciladores armónicos desplazados (uno por cada \vec{p}), pero es obvio entonces que desde pequeños sabemos cómo cuantizarlo!

Recordemos que para un oscilador armónico es muy útil definir los operadores de ascenso y descenso \hat{a}^\dagger y \hat{a} a través de

$$\hat{x} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger),$$

← reescalé
x y p para
abarcar la
masa M (→ 1)

$$\text{de modo que } [\hat{x}, \hat{p}] = i \iff [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$$

$$\text{y } \hat{H} = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \hat{x}^2 = \frac{\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = \omega \left(\underbrace{\hat{a}^\dagger \hat{a}}_{\equiv \hat{N}} + \frac{1}{2} \right)$$

↪ M=1 ↪

operador de número

Con estos ingredientes es fácil generar el conjunto completo de autoestados (eigenestados) de \hat{H} , es decir, de estados con energía definida:

* El estado base (o fundamental) es

$$|0\rangle \text{ tal que } \hat{a}|0\rangle = 0, \text{ y tiene energía } E = \frac{\omega}{2}.$$

\uparrow operador de descenso \uparrow "energía de punto cero"

* El primer estado excitado es (salvo normalización)

$$|1\rangle \equiv \hat{a}^\dagger |0\rangle, \text{ y tiene energía } E = \omega\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

\uparrow operador de ascenso

⋮

* El enésimo estado excitado es (salvo normalización)

$$|n\rangle \equiv (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \text{ y tiene energía } E = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

En otras palabras, $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ ($\hat{H} = \omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$).

\uparrow $\hat{a}^\dagger \hat{a}$

Regresando a nuestro campo escalar libre real ($\varphi^*(x) = \varphi(x) \Rightarrow \hat{\varphi}^\dagger(x) = \hat{\varphi}(x)$), sabemos que el operador $\hat{\varphi}(t, \vec{p})$ y su momento conjugado $\hat{\pi}(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{\pi}(t, \vec{x})$ son los que juegan el papel de \hat{x} y \hat{p} para cada oscilador armónico, así que podemos piratearnos impunemente

La definición de los operadores de ascenso y descenso
 $\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$:

$$\hat{\varphi}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2m}} (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}))$$

↑ operador de Schrödinger
 y ↓ (o Heisenberg a $t=0$)

↑ signo tal que $\hat{\varphi}(\vec{p})^{\dagger} = \hat{\varphi}(-\vec{p})$
 $\Rightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})^{\dagger} = \hat{\varphi}(\vec{x})$ (campo real)

$$\hat{\Pi}(\vec{p}) = -i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{p} = -i \sqrt{\frac{m}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}))$$

A partir de las relaciones de conmutación para
 $\hat{\varphi}(\vec{p})$ y $\hat{\Pi}(\vec{p})$ ($\leftrightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})$ y $\hat{\Pi}(\vec{x})$) es fácil deducir que

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

(análogo a $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}] = \delta_{ij}$)

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}]$$

Tenemos entonces

$$\hat{\varphi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}} + e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}),$$

$$\hat{\Pi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} -i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}} - e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}),$$

Con esto podemos calcular el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}^2 \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} E_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}) \quad \leftarrow \text{resultado espereado para cada oscilador} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(E_{\vec{p}} \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}}_{\equiv \hat{N}_{\vec{p}}} + \frac{1}{2} E_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}] \right) \quad \begin{array}{l} \text{nuestro primer} \\ \text{infinito} \end{array} \\ &\quad \text{operador de número para el oscilador } \vec{p} \quad (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}) = \infty \\ &\quad \text{(cf. } \hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^{\dagger}) = \omega (\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \frac{1}{2}) \text{)} \end{aligned}$$

El segundo término en \hat{H} claramente representa la 'energía de punto cero' del oscilador armónico etiquetado por \vec{p} , es decir, la energía que tiene ese oscilador cuando se encuentra sin excitar, en su estado base. Sabemos que, en ausencia de la gravedad, solo importan diferencias de energía, por lo que podemos por simplicidad ignorar estas constantes y trabajar con el Hamiltoniano

$$:\hat{H}: \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{N}_{\vec{p}},$$

Energía de cada modo de Fourier

que nos da la energía total del sistema medida por encima de la energía que tiene el campo sin excitar. En esta expresión hemos usado el

simbolo $::$, que denota lo que se conoce como "ordenamiento normal", el cual consiste en colocar todas los \hat{a}^\dagger 's a la izquierda de los \hat{a} 's

$$(p.ej., : \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} : \equiv \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}, \quad : \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger : \equiv \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \\ : \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger : \equiv \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}'}, = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}}, \text{ etc.})$$

De manera similar, se encuentra que el operador de momento espacial asociado al campo (ver p.16)

$$\hat{\vec{P}} = - \int d^3x \vec{\nabla} \hat{\phi} \hat{\Pi}$$

se reduce a

$$\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{N}_{\vec{p}}.$$

↙ momento espacial de cada modo

Colocando \hat{H} , podemos también obtener el operador de campo en el orden de Heisenberg,

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \exp(i\hat{H}t) \hat{\phi}(\vec{x}) \exp(-i\hat{H}t)$$

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right),$$

↖ "frecuencia positiva" ↗ "frecuencia negativa"

que podemos resumir usando $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ con $p^0 = E_{\vec{p}}$,

"frec. positiva" "frec. negativa"

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

De hecho, en la p.13 habíamos visto que, para el campo clásico, la solución más general a la ec. de Klein-Gordon es

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \alpha_{\vec{p}}^* e^{iE_{\vec{p}}t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right),$$

↖ números complejos

así que lo único que ha ocurrido es que al promover

$$\varphi(x) \rightarrow \hat{\varphi}(x) \quad \text{tenemos} \quad \alpha_{\vec{p}} \rightarrow \hat{\alpha}_{\vec{p}} \equiv \frac{\hat{a}_{\vec{p}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \quad \leftarrow \text{operador de descenso}$$

Entonces, aunque no lo habían notado, ¡desde antes de venir a este curso ustedes conocen ya la manera de cuantizar un campo libre (= gektinga con ec. de mov. lineal, o también una cuerda [cf. curso de Curcio], o una membrana [cf. curso de Braner]), y de obtener fácilmente sus estados con energía finita!

Justo como hicimos para 1 oscilador armónico en la p.22, podemos construir el espacio de autoestados de $:\hat{H}:$ (y \hat{H}) usando los operadores de ascenso y descenso. Identificamos primero al estado base (o fundamental) para el campo como aquel en el que

todos los osciladores están sin excitar:

$$|0\rangle \equiv |0, 0, \dots\rangle \text{ tal que } \hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}, \langle 0|0\rangle = 1.$$

↑ en realidad no podemos hacer una lista exhaustiva
(la etiqueta \vec{p} es no denumerable)

Actuando sobre este estado con un solo operador de creación,

obtenemos los estados con 1 solo oscilador excitado:

$$|\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle \quad (\equiv |0, 0, \dots, 1, 0, \dots\rangle)$$

↖ oscilador número \vec{p}

donde hemos elegido la normalización de tal manera que

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{p}'}} \sqrt{2E_{\vec{p}}} (\langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}'}) (\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle) \\ &= \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{p}'}, \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}] |0\rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \end{aligned}$$

← porque el término
 $-\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}$
da cero al
actuar sobre $|0\rangle$

combinación invariante bajo Lorentz

¿Cuál es la energía de estos estados?

Usando $:\hat{H}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}$ vemos que

- $:\hat{H}: |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} |0\rangle = 0,$

es decir, $|0\rangle$ tiene energía $E=0$ (resulta ser esperable porque omitimos la energía de punto cero);

$$\bullet \quad : \hat{H} : | \vec{p} \rangle = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}'} \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger}_{[\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger]} | 0 \rangle \sqrt{2E_{\vec{p}'}}$$

$[\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}') | 0 \rangle$
 ↗ porque el segundo término da 0

La delta de Dirac sirve para eliminar la integral, así que

$$: \hat{H} : | \vec{p} \rangle = E_{\vec{p}} \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = E_{\vec{p}} | \vec{p} \rangle,$$

que es el resultado esperado para el primer nivel excitado de un oscilador con frecuencia $\omega = E_{\vec{p}}$. ($E = \omega(1 + \frac{1}{2})$)

Con un cálculo idéntico, usando $\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$

(p.25), podemos obtener

$$\hat{\vec{P}} | 0 \rangle = 0, \quad \hat{\vec{P}} | \vec{p} \rangle = \vec{p} | \vec{p} \rangle.$$

Vemos entonces que el estado $| \vec{p} \rangle$ del campo (↔ onda plana \vec{p} lo más chiquitita posible en nuestra gelatina) tiene momento espacial \vec{p} y energía

$E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ (su cuadrimomento p^μ satisface la condición de capa de masa "mass shell" $p^2 = m^2$), ¡¡justamente igual que una partícula relativista libre, con momento \vec{p} y masa m !!

Por esta razón llamamos a $| 0 \rangle$ ($\neq | \vec{0} \rangle$) el "Vacío" (= estado sin partículas), y a $| \vec{p} \rangle$ el estado con 1 partícula (de momento \vec{p}).

Ahora, hemos visto que $|\vec{p}\rangle$, el estado donde apenas 1 oscilador está en su primer nivel excitado, describe a 1 partícula, ¿pero que significan tienen los estados donde ese mismo oscilador está en un nivel más alto de excitación, o donde excitamos a más de 1 oscilador?

Si definimos " $1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots$ " ó " $1, 0, 0, \dots, 2, 0, \dots$ "

$$|\vec{p}, \vec{p}'\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \sqrt{2E_{\vec{p}'}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} |0\rangle \quad (= |\vec{p}', \vec{p}\rangle)$$

tenemos

↑ porque las \hat{a} 's conmutan

$$\begin{aligned} \hat{H} |\vec{p}, \vec{p}'\rangle &= \sqrt{2E_{\vec{p}}} \sqrt{2E_{\vec{p}'}} \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}''} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} |0\rangle \\ &\quad \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}}_{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}'' - \vec{p}) \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}} \\ &\quad \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}}_{\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}'' - \vec{p}') \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2E_{\vec{p}}} \sqrt{2E_{\vec{p}'}} \left(E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle + E_{\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} |0\rangle \right)$$

$$= (E_{\vec{p}} + E_{\vec{p}'}) |\vec{p}, \vec{p}'\rangle,$$

y en un cálculo idéntico, $\hat{P} |\vec{p}, \vec{p}'\rangle = (\vec{p} + \vec{p}') |\vec{p}, \vec{p}'\rangle$.

Es decir, $|\vec{p}, \vec{p}'\rangle$ es 1 estado con 2 partículas

relativistas libres (y en particular, desacopladas entre sí),

con masa m , cuyos momentos espaciales son \vec{p} y \vec{p}' .

Más en general, el punto es que el operador de número $\hat{N}_{\vec{p}} \equiv \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$ realmente calcula el nivel de excitación del modo de Fourier \vec{p} , y por ello se encuentra que

$|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle$ es un estado con n partículas idénticas

libres con masa m y momentos $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$, cuya energía y momento totales son

$$E = E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2} + \dots + E_{\vec{p}_n} \quad \text{y} \quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n.$$

Un punto que vale la pena resaltar es que nuestro campo/gelstrik cuántico nos da la posibilidad de hablar de un número cualquiera de partículas.

El espacio de Hilbert asociado,

$$H = |0\rangle \oplus \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ partícula} \\ |\vec{p}\rangle \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ partículas} \\ |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \end{array} \right\} \oplus \dots$$

se conoce por su estructura como "espacio de Fock".

En este contexto, los operadores de ascenso $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y descenso $\hat{a}_{\vec{p}}$ se conocen respectivamente como

operadores de creación y aniquilación, porque sirven precisamente para "crear" o "aniquilar" partículas:

$$\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \propto |\vec{p}, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle,$$

$$\hat{a}_{\vec{p}} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \propto |\vec{p}_1, \dots, \cancel{\vec{p}_i}, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad \text{si} \quad \vec{p} = \vec{p}_i.$$

En resumen, hemos encontrado que los espacios de Hilbert de 2 sistemas que a primera vista parecían muy diferentes, un campo escalar y una colección de un número arbitrario ($n=0,1,2,\dots$) de partículas sin espín, en realidad coinciden a la perfección.

El acuerdo incluye no solo a los números cuánticos que etiquetan a los estados (\vec{p} 's), sino también a las energías, y por tanto, a la evolución temporal. Los 2 sistemas resultan ser totalmente indistinguibles:

!! las partículas relativistas sin espín son en verdad pequeñas excitaciones cuánticas de un campo !!

La misma historia aplica para un campo escalar libre complejo $\Phi(x)$ (\leftrightarrow 2 campos reales con las mismas propiedades), salvo que, al no tener ya la restricción de realidad o hermiticidad del campo ($\Phi^\dagger \neq \Phi$), para cada \vec{p} obtendremos no 1 sino 2 parejas de operadores de creación y aniquilación:

$$\hat{\Phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}} = \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$\hat{\Phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

$$\text{con } [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger],$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}].$$

Las excitaciones de este campo son entonces de 2 tipos distintos, aunque corresponden a partículas con la misma masa m . En la p.17 vimos que, asociada a la simetría interna $U(1)$ $\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Phi(x)$, existe una carga conservada $Q = \int d^3x (\Phi^* \partial_t \Phi - \Phi \partial_t \Phi^*)$, que al acoplar a A_μ es ni más ni menos que la carga eléctrica. A nivel cuántico Q se convierte en el operador $\hat{Q} = \int d^3x (\hat{\Phi}^\dagger \partial_t \hat{\Phi} - \hat{\Phi} \partial_t \hat{\Phi}^\dagger)$, que en términos de operadores de creación/aniquilación toma la forma

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}}).$$

Con esto vemos que las partículas creadas por $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$, aunque tienen la misma masa, se distinguen porque tienen carga eléctrica opuestas (+1 y -1, respectivamente). Es decir, el campo escalar complejo tiene como excitaciones a partículas cargadas, ¡junto con sus antipartículas!

En el mundo real, ejemplar de partículas sin espín, asociadas por tanto a campos escalares, son el bosón de Higgs (partícula elemental?) y el pión (esteb ligado).

Similrmente, campos No escalares (aquellos que sí cambian de una cierta manera bajo rotaciones y empujones) dan lugar a partículas con espín (cuyo aspecto sí cambia de una manera específica cuando giramos la cabeza o paramos caminando):

- los fotones (espín 1) son excitaciones del campo electromagnético $A_{\mu}(x)$, un campo vectorial real.
- los electrones y antielectrones (espín $1/2$), son excitaciones del campo del electrón $\psi(x)$ un campo "espinorial" complejo.
 ← índice de espín oculto
- Cada una de las partículas restantes del Modelo Estándar, es igualmente una excitación en un campo correspondiente.

Así que, como prometimos desde el principio del curso, ¡nuestro universo en verdad está hecho no de partículas, sino de campos (¡elásticos)!!

Regresando al caso escalar libre, podemos encontrar una interpretación física directa para el operador de campo notando que

$$\hat{\phi}(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger) |0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}} |\vec{p}'\rangle \equiv |\vec{x}\rangle$$

$\vec{p}' = -\vec{p}$ \swarrow combinación invariante de Lorentz $\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |\vec{p}\rangle$

\leftarrow estados relativistas con posición definidas (tanto como es posible)

sería $\approx m$ en caso no relativista

sería $\langle \vec{p}' | \vec{x} \rangle$ en caso no relativista

Es decir, $\hat{\phi}(\vec{x})$ es un operador que crea (o destruye) una partícula localizada en \vec{x} .

Pasando al cuadro de Heisenberg, se encuentra similarmente que $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ crea/destruye una partícula en \vec{x} al tiempo t ,

$$\hat{\phi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |0\rangle \equiv |x\rangle$$

Vale la pena destacar que la aparición de t en $|x\rangle \equiv |x^\mu\rangle = |t, \vec{x}\rangle$ no se debe a que estemos hablando de un estado en el cuadro de Schrödinger:

$|x\rangle$ es por definición un estado en el cuadro de Heisenberg, que tiene la propiedad de que, si lo examinamos en t , encontraremos a la partícula en \vec{x} , y es por eso que t figura como parte del nombre del estado.

En el caso de un campo complejo, recordando (p.31) que $\hat{\Phi} \sim \hat{a} + \hat{b}^\dagger$ y $\hat{\Phi}^\dagger \sim \hat{a}^\dagger + \hat{b}$, el enunciado correspondiente es que

$\hat{\Phi}(x)$ destruye una partícula o crea una antipartícula
localizada en x

$\hat{\Phi}^\dagger(x)$ crea una antipartícula o destruye una partícula :
localizada en x

$$\hat{\Phi}^\dagger(x) |0\rangle \equiv |x, n\rangle, \quad \hat{\Phi}(x) |0\rangle \equiv |x, \bar{n}\rangle.$$

\uparrow nombre de partícula
 (p.ej. π^+)

\uparrow antipartícula
 correspondiente
 (p.ej. π^-)

Habiendo entendido lo anterior, podemos ahora hacer la única pregunta física que nos falta explorar en esta teoría libre. Dado que las partículas no interactúan, lo único que pueden hacer es propagarse.

libremente de un sitio a otro. Es interesante entonces preguntarnos qué tan probable es que tal cosa ocurra.

Concretamente, si $t' > t$ y sabemos que la partícula está en \vec{x} al tiempo t , ¿cuál es la amplitud de probabilidad de que la encontremos en \vec{x}' al tiempo t' ?

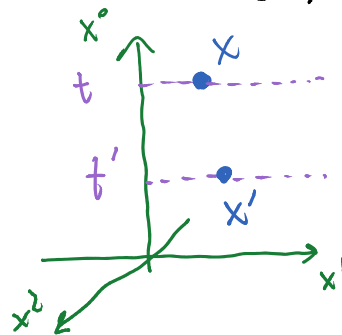
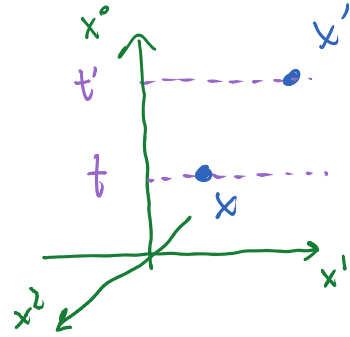
Sabiendo que el primer dato corresponde al estado $|x\rangle$ y el segundo a $|x'\rangle$ (en el axera de Heisenberg), la respuesta está dada simplemente por el traslate (producto interno) entre ambos estados,

$$\langle x' | x \rangle = \langle 0 | \hat{\varphi}(x') \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle .$$

↑ crea partícula en x
↓ aniquila partícula en x'

Si x fuera en cambio posterior a x' ($t > t'$), en el uso cotidiano del lenguaje nos interesaría la amplitud de propagación de x' a x (y no al revés),

$$\langle x | x' \rangle = \langle 0 | \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') | 0 \rangle = \langle x' | x \rangle^* .$$



Es natural (y útil) definir entonces una amplitud de propagación que pueda referirse a cualquiera de las 2 opciones, según corresponda:

$$G(x', x) \equiv \langle x' | x \rangle \theta(x'^0 - x^0) + \langle x | x' \rangle \theta(x^0 - x'^0)$$

$$= \langle 0 | (\hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) \theta(x'^0 - x^0) + \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \theta(x^0 - x'^0)) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) \} | 0 \rangle$$

↑ orden temporal: ordenar operadores de modo que el tiempo aumente de derecha a izquierda

función escalón (de Heaviside)

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Esta combinación se conoce como el propagador de Feynman, y es habitual representarlo como una línea que conecta a los eventos x y x' , ahora denotarlo solo esquemáticamente, como puntos que no hacen referencia a un diagrama espaciotemporal específico.



la línea no se refiere a una trayectoria definida: ¡la partícula es cuántica!!

La invariancia bajo transformaciones

en el espaciotiempo implica que $G(x', x) = G(x - x')$.

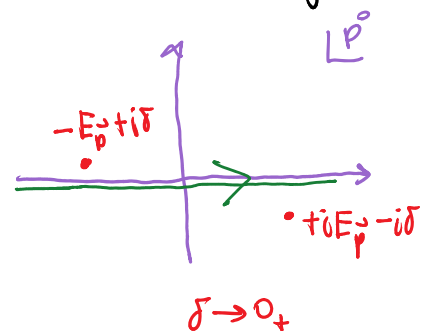
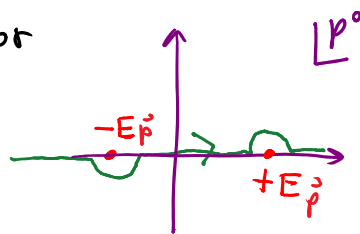
El cálculo de este propagador para nuestro campo libre

no presenta ninguna dificultad conceptual (¡estamos lidiando solo con oscilaciones armónicas!); pero no nos detendremos a hacerlo (ver ejercicio 4). El resultado es sencillo y se puede escribir en una forma manifiestamente invariante bajo Lorentz:

$$G(x', x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2}$$

Propagador de Feynman para campo escalar libre (Klein-Gordon)

donde la novedosa integral sobre p^0 significa que los orden planes que tenemos aquí están fuera de la capa de masa (off-shell), $p^0 \neq E_p$ ($p^2 \neq m^2$), y requiere una receta específica para lidiar con los polos simples que el integrando tiene en $p^0 = \pm E_p$, receta indicada en el diagrama de la derecha (evitar los polos en breves excursiones en el plano complejo para la variable de integración p^0). Esto es equivalente a integrar sobre p^0 real pero desplazar los polos un poquito,



por lo que también es frecuente escribir

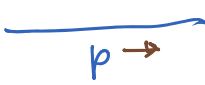
$$G(x', x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0_+$$

($\epsilon \equiv 2E_p \delta$)

Más fácil de recordar, e igualmente útil, es la transformada de Fourier

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad \text{ó} \quad \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Propiedad de Feynman
en espacio de momento
(para Klein-Gordon)

que es habitual representar como  $p \rightarrow$ ↖ no se indican puntos inicial y final

flecha optativa para indicar el sentido en el que fluye p^M : $p \rightarrow = -p \leftarrow$

En el caso de un campo escalar complejo, definir

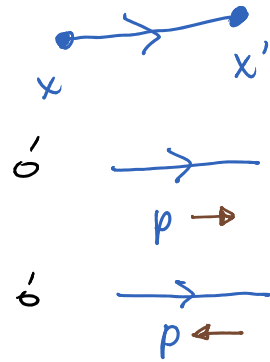
$$G(x', x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}(x') \hat{\Phi}^\dagger(x) \} | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \hat{\Phi}(x') \hat{\Phi}^\dagger(x) | 0 \rangle & \text{si } x' > x \\ \langle 0 | \hat{\Phi}^\dagger(x) \hat{\Phi}(x') | 0 \rangle & \text{si } x' < x \end{cases}$$

↑ crea partícula
↑ crea antipartícula

$$\left(\leftrightarrow G^*(x', x) = \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}^\dagger(x') \hat{\Phi}(x) \} | 0 \rangle \right),$$

y es habitual denotarlo como una línea con flecha que

indica (por convención) la dirección en la que se propagará la partícula (opuesta a la dirección de propagación de la antipartícula).



El resultado para $G(x', x)$ del campo escalar complejo es el mismo que vimos ya para el campo real.

Recordando que nuestro campo tiene también sentido que describa a un número arbitrario de partículas, podemos interesarnos también calcular la amplitud de probabilidad de empezar con algún número n de partículas en x_1, \dots, x_n y terminar con otro número n' de partículas en $x'_1, \dots, x'_{n'}$. Esta amplitud está codificada en el correlador (o función de correlación, o función de Green) de N puntos

$$G_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x_N) \} | 0 \rangle$$

(con $N = n + n'$ y $x_{n+j} \equiv x'_j$).

← notar que $G(x', x) \equiv G_2(x', x)$

Pero en la teoría libre, las partículas no se interactúan unas a otras, y el número de partículas no cambia ($n = n' \Rightarrow N$ debe ser par), así que conociendo la

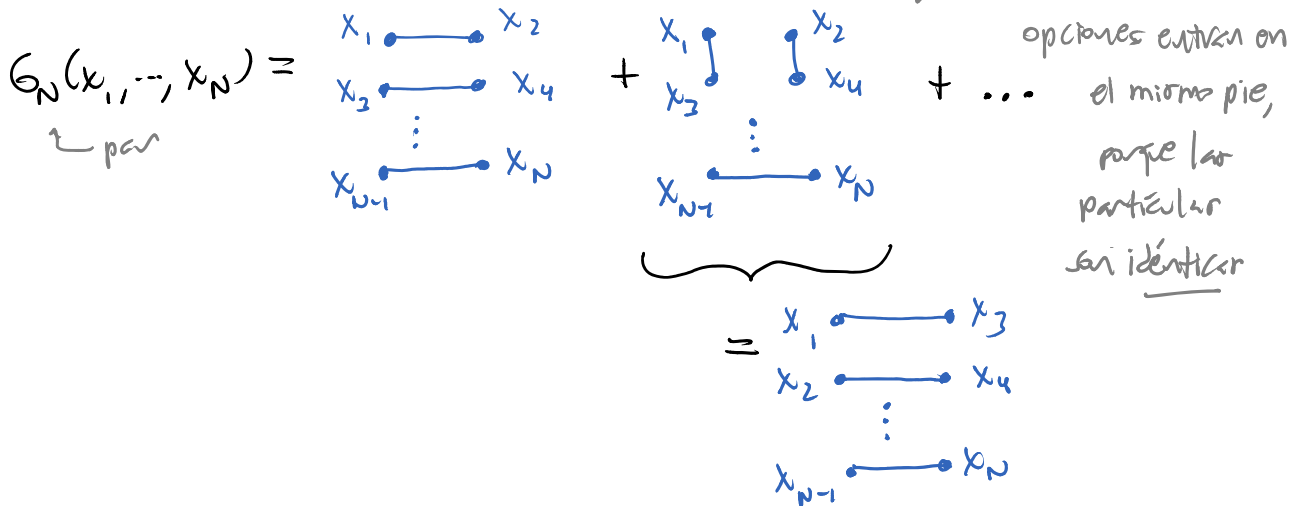
amplitud de propagación de 1 partícula tenemos ya toda la información necesaria para el caso general.

Es fácil mostrar que (en el caso libre)

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ es impar} \\ G(x_1, x_2) G(x_3, x_4) \dots G(x_{N-1}, x_N) \\ + G(x_1, x_3) G(x_2, x_4) \dots & \text{si } N \text{ es par} \\ + \text{ todas las otras permutaciones} \end{cases}$$

que se puede visualizar con dibujitos:

← todas las $\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!}$



= Suma sobre todos los diagramas con N puntos x_1, \dots, x_N conectados por líneas (donde la presencia de más de una línea representa el producto de los G correspondientes)

Hasta ahora hemos hablado de un

campo libre $\leftrightarrow \mathcal{L}$ cuadrático (ec. de mov. lineal)

\leftrightarrow Modos de Fourier desacoplados

\leftrightarrow Partículas no interactuantes

Si agregamos a \mathcal{L} términos cúbicos en φ o más altos, la ec. de mov. para φ ya no será lineal, y los modos de Fourier $\varphi(t, \vec{p})$ no estarán ya desacoplados (\therefore no serán modos normales). La situación se vuelve bastante

confusa porque este cambio no solo hace que las partículas interactúen entre sí, sino que modifica incluso la definición misma de lo que es una partícula

$|\vec{p}\rangle$ (y \therefore también del vacío $|0\rangle$). P.ej., en este nuevo

contexto se encuentra que $\hat{\varphi}$ no solo crea 1 partícula:

$$\hat{\varphi}(\vec{p})|0\rangle \sim f_1|\vec{p}\rangle + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3-1} 2E_{\vec{p}'}} f_2(\vec{p}')|\vec{p}-\vec{p}', \vec{p}'\rangle + \dots$$