

Regresando al caso escalar libre, sabemos que $\hat{\phi}(\vec{p})|0\rangle \propto |\vec{p}\rangle$,
y podemos encontrar una interpretación física directa para $\hat{\phi}(\vec{x})$
notando que

$$\hat{\phi}(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger) |0\rangle$$

$$\begin{aligned} \vec{p} \rightarrow -\vec{p} & \quad \text{combinación invariante de Lorentz} \\ & = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle \equiv |\vec{x}\rangle \end{aligned}$$

estados relativistas
con posición definidas
(tanto como es
posible)

sería $\simeq m$ en
caso no relativista

sería $\langle \vec{p} | \vec{x} \rangle$ en caso no relativista

Es decir, $\hat{\phi}(\vec{x})$ es un operador que crea (o destruye)
una partícula localizada en $\vec{x}$.

Pasando al cuadro de Heisenberg, se encuentra similarmente
que $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ crea/destruye una partícula en $\vec{x}$ al tiempo t ,

$$\hat{\phi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{+iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} |0\rangle \equiv |x\rangle.$$

Vale la pena destacar que la aparición de t en
 $|x\rangle \equiv |x^\mu\rangle = |t, \vec{x}\rangle$ no se debe a que estamos
hablando de un estado en el cuadro de Schrödinger:

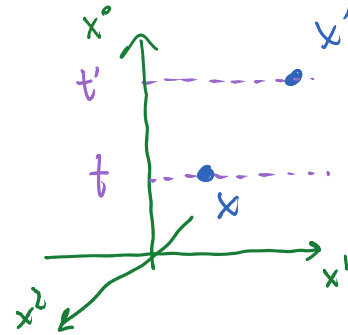
En el caso de un campo complejo, recordando (p.31) que $\hat{\Phi} \sim \hat{a} + \hat{b}^\dagger$ y $\hat{\Phi}^\dagger \sim \hat{a}^\dagger + \hat{b}$, el enunciado correspondiente es que

$\hat{\Phi}^\dagger(x)$ crea una antipartícula o crea una partícula :
 $\uparrow$ localizada en x $\rightarrow$

Habiendo entendido lo anterior, podemos ahora hacer la única pregunta física que nos falta explorar en esta teoría libre. Dado que las partículas no interactúan, lo único que pueden hacer es propagarse.

libremente de un sitio a otro. Es interesante entonces preguntarnos qué tan probable es que tal cosa ocurra.

Concretamente, si $t' > t$ y sabemos que la partícula está en $\vec{x}$ al tiempo t , ¿cuál es la amplitud de probabilidad de que la encontremos en $\vec{x}'$ al tiempo t' ?

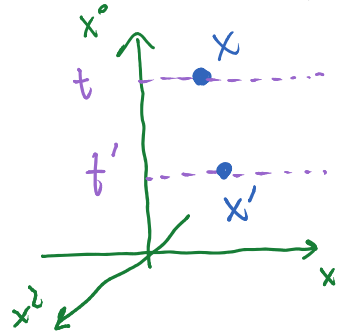


Sabiendo que el primer dato corresponde al estado $|x\rangle$ y el segundo a $|x'\rangle$ (en el axero de Heisenberg), la respuesta está dada simplemente por el traslate (producto interno) entre ambos estados,

$$\langle x' | x \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) | 0 \rangle .$$

↑ crea partícula en x
↓ aniquila partícula en x'

Si x fuera en cambio posterior a x' ($t > t'$), en el uso cotidiano del lenguaje nos interesaría la amplitud de propagación de x' a x (y no al revés),



$$\langle x | x' \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0 \rangle = \langle x' | x \rangle^* .$$

Es natural (y útil) definir entonces una amplitud de propagación que pueda referirse a cualquiera de las 2 opciones, según corresponda:

$$G(x', x) \equiv \langle x' | x \rangle \theta(x'^0 - x^0) + \langle x | x' \rangle \theta(x^0 - x'^0)$$

función escalón (de Heaviside)

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

$$= \langle 0 | (\hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) \theta(x'^0 - x^0) + \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \theta(x^0 - x'^0)) | 0 \rangle$$

$$\equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) \} | 0 \rangle$$

orden temporal: ordenar operadores de modo que el tiempo aumente de derecha a izquierda

Esta combinación se conoce como el propagador de Feynman, y es habitual representarlo como una línea que conecta a los eventos x y x' , ahora denotarlo solo esquemáticamente, como puntos que no hacen referencia a un diagrama espaciotemporal específico.



la línea no se refiere a una trayectoria definida: ¡la partícula es cuántica!!

La invariancia bajo transformaciones en el espaciotiempo implica que $G(x', x) = G(x - x')$.

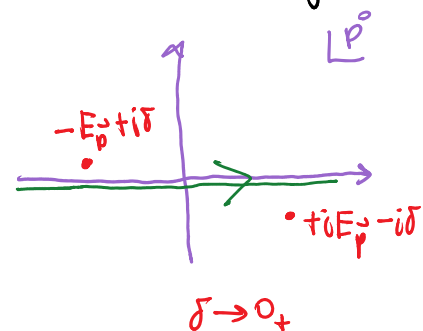
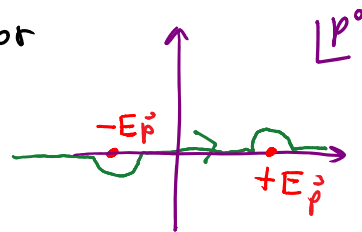
El cálculo de este propagador para nuestro campo libre

no presente ninguna dificultad conceptual (¡estamos lidiando solo con osciladores armónicos!); pero no nos detendremos a hacerlo (ver ejercicio 4). El resultado es sencillo y se puede escribir en una forma manifiestamente invariante bajo Lorentz:

$$G(x', x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2}$$

Propagador de Feynman
para campo escalar libre
(Klein-Gordon)

donde la novedosa integral sobre p^0 significa que los ondas planas que tenemos aquí están fuera de la capa de masa (off-shell), $p^0 \neq E_p$ ($p^2 \neq m^2$), y requiere una receta específica para lidiar con los polos simples que el integrando tiene en $p^0 = \pm E_p$, receta indicada en el diagrama de la derecha (esquivar los polos con breves excursiones en el plano complejo para la variable de integración p^0). Esto es equivalente a integrar sobre p^0 real pero desplazar los polos un poquito,



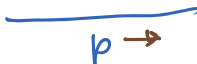
por lo que también es frecuente escribir

$$G(x', x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0_+ \\ (\epsilon \equiv 2E_p \delta)$$

Más fácil de recordar, e igualmente útil, es la transformada de Fourier

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad \text{ó} \quad \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Propagador de Feynman
en espacio de momento
(para Klein-Gordon)

que es habitual representar como 
 ← no se indican puntos inicial y final
 flecha optativa para indicar el sentido en el que fluye p^μ : $p \rightarrow = -p \leftarrow$

En el caso de un campo escalar complejo, definir

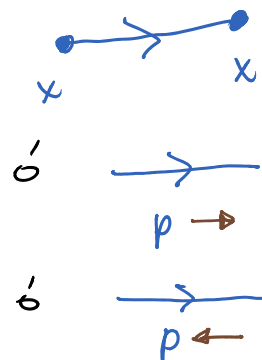
$$G(x', x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}(x') \hat{\Phi}^\dagger(x) \} | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \hat{\Phi}(x') \hat{\Phi}^\dagger(x) | 0 \rangle & \text{si } x' > x \\ \langle 0 | \hat{\Phi}^\dagger(x) \hat{\Phi}(x') | 0 \rangle & \text{si } x' < x \end{cases}$$

↑ crea partícula
↑ crea antipartícula

$$(\Leftrightarrow G^*(x', x) = \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}^\dagger(x') \hat{\Phi}(x) \} | 0 \rangle),$$

y es habitual denotarlo como una línea con flecha que

índice (por convención) la dirección en la que se propagará la partícula (opuesta a la dirección de propagación de la antipartícula).



El resultado para $G(x', x)$ del campo escalar complejo es el mismo que vimos ya para el campo real.

Recordando que nuestro campo tiene además otro que describe a un número arbitrario de partículas, podemos interesarnos también calcular la amplitud de probabilidad de empezar con algún número n de partículas en $x_1, \dots, x_n$ y terminar con otro número n' de partículas en $x'_1, \dots, x'_{n'}$. Esta amplitud está codificada en el correlador (o función de correlación, o función de Green) de N puntos

$$G_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x_N) \} | 0 \rangle$$

(con $N = n + n'$ y $x_{n+j} \equiv x'_j$).

← notar que $G(x', x) \equiv G_2(x', x)$

Pero en la teoría libre, las partículas no se crean una a otras, y el número de partículas no cambia ($n = n' \Rightarrow N$ debe ser par), así que conociendo la

amplitud de propagación de 1 partícula tenemos ya toda la información necesaria para el caso general. Usando el llamado "teorema de Wick" (ver ejercicio 5e), es posible mostrar que

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ es } \underline{\text{impar}} \\ G(x_1, x_2) G(x_3, x_4) \cdots G(x_{N-1}, x_N) \\ + G(x_1, x_3) G(x_2, x_4) \cdots & \text{si } N \text{ es } \underline{\text{par}} \\ + \text{todas las otras permutaciones} \end{cases}$$

que se puede visualizar con dibujitos:

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \underbrace{\begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} x_4 \\ \vdots \\ x_{N-1} \text{---} x_N \end{array}}_{\text{par}} + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} x_4 \\ \vdots \\ x_{N-1} \text{---} x_N \end{array} + \dots$$

todas las $\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!}$ opciones están en el mismo pie, porque las partículas son idénticas

$$= \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_3 \\ x_2 \text{---} x_4 \\ \vdots \\ x_{N-1} \text{---} x_N \end{array}$$

= Suma sobre todos los "Diagramas de Feynman"

con N puntos $x_1, \dots, x_N$ conectados por líneas
(donde la presencia de más de una línea
representa el producto de los G correspondientes)

Hasta ahora hemos hablado de un

campo libre $\longleftrightarrow \mathcal{L}$ cuadrático (ec. de mov. lineal)

$\longleftrightarrow$ Modos de Fourier desacoplados

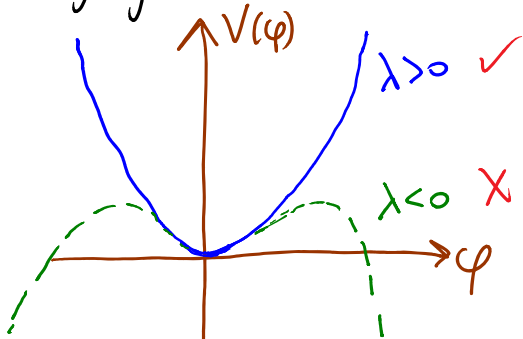
$\longleftrightarrow$ Partículas no interactuantes

Si agregamos a $\mathcal{L}$ términos cúbicos en φ o más altos, la ec. de mov. para φ ya no será lineal, y los modos de Fourier $\varphi(t, \vec{p})$ no estarán ya desacoplados ($\therefore$ no serán modos normales). La situación se vuelve bastante confusa porque este cambio no solo hace que las partículas interactúen entre sí, sino que modifica incluso la definición misma de lo que es una partícula $|\vec{p}\rangle$ (y $\therefore$ también del vacío $|0\rangle$). El punto clave es que al permitir que las viejas partículas ($\longleftrightarrow$ modos de Fourier) interactúen una con otra, inevitablemente acaban también interactuando conigo mismo.

La relación entre el campo y las partículas será mucho más sutil.

Para la teoría libre, descubrimos/entendimos la relación entre el campo $\tilde{\varphi}(x)$ y las partículas asociadas (sus "cuantos" básicos $\leftrightarrow$ excitaciones más pequeñas posibles) solo después de resolver de forma exacta la ecuación de Klein-Gordon. Y para el caso de un campo interactuante, no sabemos cómo de semejante prueba, porque la ecuación de movimiento es no lineal.

Para ser más concretos, consideremos la teoría de un campo escalar real con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2}_{\text{Término Cinético}} - \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv -V(\varphi) \text{ Energía Potencial}}$$


El parámetro λ , que determina la intensidad de las interacciones, se conoce como constante de acoplamiento.

El momento canónico conjugado a $\varphi(x)$ sigue siendo

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x), \quad \text{y el proceso}$$

de cuantización involucrará por supuesto el reemplazo

$$\varphi(x), \pi(x) \longrightarrow \hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x) \quad (\text{en el cuadro de Heisenberg})$$

con las reglas de conmutación usuales

$$[\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \underbrace{\hat{\pi}(t, \vec{x}')}_{\dot{\hat{\varphi}}(t, \vec{x}')}] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'),$$

$$[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] = 0 = [\hat{\pi}, \hat{\pi}].$$

Pero la ec. de Heisenberg para $\hat{\varphi}(x)$ (que coincide con la ec. de mpv. clásica)

$$(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi}(x) = -\frac{\lambda}{3!}\hat{\varphi}^3(x)$$

es No lineal, y $\therefore \hat{\varphi}(x)$ No puede ya expresarse como una combinación lineal de ondas planas con coeficientes

$$\hat{a}_p \text{ y } \hat{a}_p^\dagger.$$

Por otro lado, si las interacciones son débiles ($\Leftrightarrow \lambda \ll 1$), $\equiv$ teoría débilmente acoplada, esperaríamos que la dinámica del campo se pueda aproximar con una expansión perturbativa en potencias de λ , que tengamos como punto de partida al campo libre ($\lambda=0 \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kb}}$).

Notando que podemos separar el Hamiltoniano

$$H = \underbrace{\int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right]}_{\equiv H_0 \leftarrow \text{libre}} + \underbrace{\int d^3x \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv H_{\text{int}} \leftarrow \text{interacción}},$$

nos conviene definir un cuadro en donde el operador de campo (y todos los operadores) evolucionen no con $\hat{H}$ sino con $\hat{H}_0$.

Es decir, en lugar del cuadro de Schrödinger,

$$\hat{O}_S, \quad |\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S,$$

o el de Heisenberg,

$$\hat{O}_H(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t}, \quad |\psi\rangle_H \equiv e^{i\hat{H}t} |\psi(t)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_S,$$

usaremos el llamado cuadro de interacción (o de Dyson, o de Tomonaga)

$$\hat{O}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0^S t} = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} \hat{O}_H(t) e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}_0^S t},$$

$$|\psi(t)\rangle_I \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} |\psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_H.$$

En este cuadro tenemos, por construcción, que la ec. de evolución para los operadores involucra solo al Hamiltoniano libre,

$$i\partial_t \hat{O}_I(t) = [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^S] \quad (+ i\partial_t \hat{O}_I(t))$$

$$= [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^I]$$

↑ si hay dependencia explícita de t

(donde para la segunda igualdad hemos usado el hecho de que

$$\hat{H}_0^I \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_0^S e^{-i\hat{H}_0^S t} = \hat{H}_0^S = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}_I^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\phi}_I)^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}_I^2 \right]).$$

Esto es cierto en particular para $\hat{\phi}_I(x)$, que satisface

entonces la ec. de mov. libre,

$$(\partial^2 + m^2) \hat{\phi}_I(x) = 0$$

Klein-Gordon.

Podemos entonces desarrollar como antes

$$\hat{\phi}_{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \right) \Big|_{\substack{\text{independientes de } t \\ \mathbf{p}^0 = E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}}$$

y las relaciones de conmutación implican nuevamente que

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] = 0.$$

Además, tenemos evidentemente que

$$:\hat{H}_0^{\mathbf{I}}: = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}}.$$

Todo esto resulta muy reconfortante, ¡pero hasta ahora, parece que solo estamos jugando a olvidarnos de $\hat{H}_{\text{int}}$!

Como habíamos dicho, el efecto de las interacciones se ve ahora en la evolución de los estados, $\hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_{\mathbf{I}} &= e^{i\hat{H}_0^{\mathbf{I}}t} |\psi(t)\rangle_{\mathbf{S}} = e^{i\hat{H}_0^{\mathbf{I}}t} e^{-i\hat{H}(t-t')} |\psi(t')\rangle_{\mathbf{S}} \\ &= e^{i\hat{H}_0^{\mathbf{I}}t} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^{\mathbf{I}}t'} |\psi(t')\rangle_{\mathbf{I}} \\ &\equiv \hat{U}_{\mathbf{I}}(t, t') \quad \text{Operador de evolución} \end{aligned}$$

(en el cuadro de interacción)

Felizmente, este objeto aparentemente horrendo puede ser reescrito puramente en términos de $\hat{\phi}_{\mathbf{I}}(\mathbf{x})$:

orden temporal (p.37)
 definida por Taylor
 Hamiltoniano de interacción,
 en el cuadro de interacción

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_I(t, t') &= T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^t d\tau \hat{H}_{int}^I(\tau) \right] \right\} \\
 &= T \left\{ \exp \left[-\frac{i\lambda}{4!} \int_{t'}^t d^4y \hat{\phi}_I^4(y) \right] \right\} \\
 &\quad \uparrow \sim \hat{a} + \hat{a}^\dagger \\
 &= T \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int_{t'}^t d^4y \hat{\phi}_I^4(y) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \int_{t'}^t d^4y_1 \hat{\phi}_I^4(y_1) \int_{t'}^t d^4y_2 \hat{\phi}_I^4(y_2) + \dots \right\} \\
 &\quad \uparrow \text{serie de Taylor en } \lambda, \text{ tal como describimos}
 \end{aligned}$$

Ahora, ¿qué queríamos calcular? No es nada claro, porque la jugada ha cambiado por completo:

- El estado $|0\rangle$ tal que $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$
No es (no tendríamos por qué ser) el vacío,
 el estado de menor energía en la teoría,
 que denotaremos $|\Omega\rangle$.
- El estado $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$ No es el estado de
1 partícula, que seguiremos denotando $|\vec{p}\rangle$.
- la masa de las partículas asociadas al campo
 ya No es m . No tiene por qué serlo:

La conexión que encontramos entre $m^2 \equiv \partial_\phi^2 V(\phi)$ y la masa de las partículas la descubrimos como resultado (inesperado) de un cálculo en el caso espectral del campo libre.

• El operador $\hat{\phi}$ ya no solo crea 1 partícula:

$$\hat{\phi}(\vec{p})|\Omega\rangle \sim f_1|\vec{p}\rangle + \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^{3-1} 2E_{\vec{p}'}} f_2(\vec{p}')|\vec{p}-\vec{p}', \vec{p}'\rangle + \dots$$

Ante esta falta de claridad, como paso intermedio podemos primero identificar cantidades que estén nítidamente definidas a nivel del lenguaje de la teoría, y después preocuparnos de cómo extraer física de ellas.

Una elección que resulta muy útil es plantearnos la meta de determinar los correladores (o funciones de correlación, o funciones de Green) de N puntos:

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

orden
temporal

operador en
campo de Heisenberg

vacío verdadero
(con dependencia
temporal completa)

que en el caso libre eran directamente amplitudes de propagación (pp. 40-41), y aquí más o menos las

podemos pensar como algo similar; aunque lo que exploran directamente es el patrón de correlaciones entre los valores del campo en los distintos puntos $x_1, \dots, x_N$, en el vacío $|\Omega\rangle$. (Justo como para un oscilador armónico los estados $|n\rangle$ con energía definida no tienen valor definido para $\hat{x}$, en un campo (incluso si es libre), los estados con energía definida, incluso en particular el vacío $|\Omega\rangle$, no tienen valor definido para $\hat{\phi}$.)

Aunque no evoluciona, resulta resultando ser el caso que toda la información física de cualquier teoría de campos se puede extraer de las correlaciones $G_N(x_1, \dots, x_N) \forall N$.

¡Así que la meta en la vida de cualquier campista es poder calcular estas funciones!

Afortunadamente, usando la conexión entre el cuadro de Heisenberg y el cuadro de interacción se puede mostrar que

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_I(x_1) \dots \hat{\phi}_I(x_N) \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}.$$

Recordando que $\int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t) = -\frac{\lambda}{4!} \int_{-T}^T d^4y \hat{\phi}_I^4(y)$, ¡veremos que esta fórmula reduce el cálculo de cada correlador

L3
(+20 min)

G_N de la teoría interactuante al cálculo de correladores para un campo libre, $G_N^{(0)}$ (fundamentalmente $N' \geq N$)!

Y estas últimas de hecho mencionamos en la p. 41 que son muy fáciles de calcular: son simplet sumas de productos de propagadores libres $G_2^{(0)}(x, x') = G(x, x')$ (pp. 38-39)

que pueden resumirse con diagramas de Feynman. P.ej.

$$G_4^{(0)}(x_1, \dots, x_4) = \text{diagrama con 4 puntos y un círculo sombreado} = \text{diagrama con 4 puntos y 2 líneas} + \text{diagrama con 4 puntos y 2 líneas} + \text{diagrama con 4 puntos y 2 líneas}$$

$\uparrow \equiv \text{suma sobre todas las maneras de conectar los 4 puntos con líneas } (\leftrightarrow \text{ propagadores})$

"pase por atrás"

$$= G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) + G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) + G(x_1, x_4)G(x_2, x_3).$$

La novedad en la teoría interactuante es que, por la presencia de

$$T \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4 y_1 \hat{\phi}_{\mp}^4(y_1) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4 y_1 \hat{\phi}_{\mp}^4(y_1) \int d^4 y_2 \hat{\phi}_{\mp}^4(y_2) + \dots \right\},$$

tendremos que calcular términos como

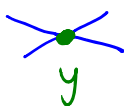
$$\langle 0 | T \left\{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4) \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 y_1 \hat{\phi}_{\mp}^4(y_1) \right\} | 0 \rangle,$$

donde 4 inserciones de $\hat{\phi}_{\mp}$ coinciden en el mismo punto

y , que además (a diferencia de $x_1, \dots, x_4$) no está fijo, sino que se integra sobre todo el espaciotiempo.

En los diagramas correspondientes, el punto y , donde se produce el efecto de la interacción será un sitio donde 4 líneas confluyan, un vértice de 4 pines,

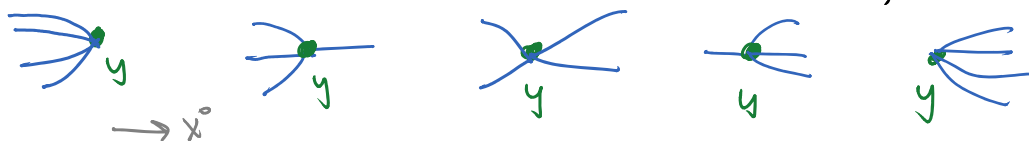
que es entonces un nuevo ingrediente para nuestro

repertorio gráfico:  $\equiv -i\lambda \int d^4y$ (el factor de 4! se cancela)

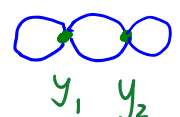
Físicamente, el efecto de la interacción

$$\hat{\phi}_I^4(x) \sim (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4 \sim \hat{a}^4 + 4\hat{a}^3\hat{a}^\dagger + 6\hat{a}^2\hat{a}^\dagger^2 + 4\hat{a}\hat{a}^\dagger^3 + \hat{a}^\dagger^4$$

es permitir pasar donde el número de partículas cambia de 4 a 0, de 3 a 1, de 2 a 2, de 1 a 3, o de 0 a 4



Usando líneas y estos vértices, se arman combinaciones

como , que sí están conectados en los puntos externos ($\leftrightarrow$ argumento de G_N), y como , que no lo están.

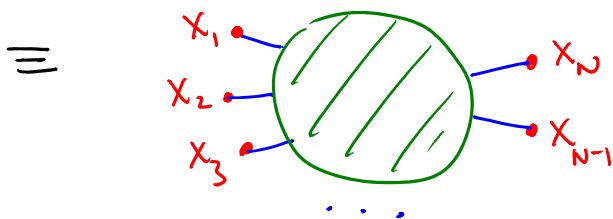
Los primeros describen correcciones a la amplitud de propagación de las partículas; los segundos, conocidos como "burbujas de vacío", describen correcciones a la definición del vacío (de $|0\rangle$ a $|\Omega\rangle$). En ambos

En ambos casos, los diagramas de Feynman tienen una utilidad doble (si $\lambda \ll 1$). Por una parte, nos permiten visualizar el efecto de las interacciones como procesos donde se crean y/o aniquilan partículas (en grupos de 4 por GeV^4).

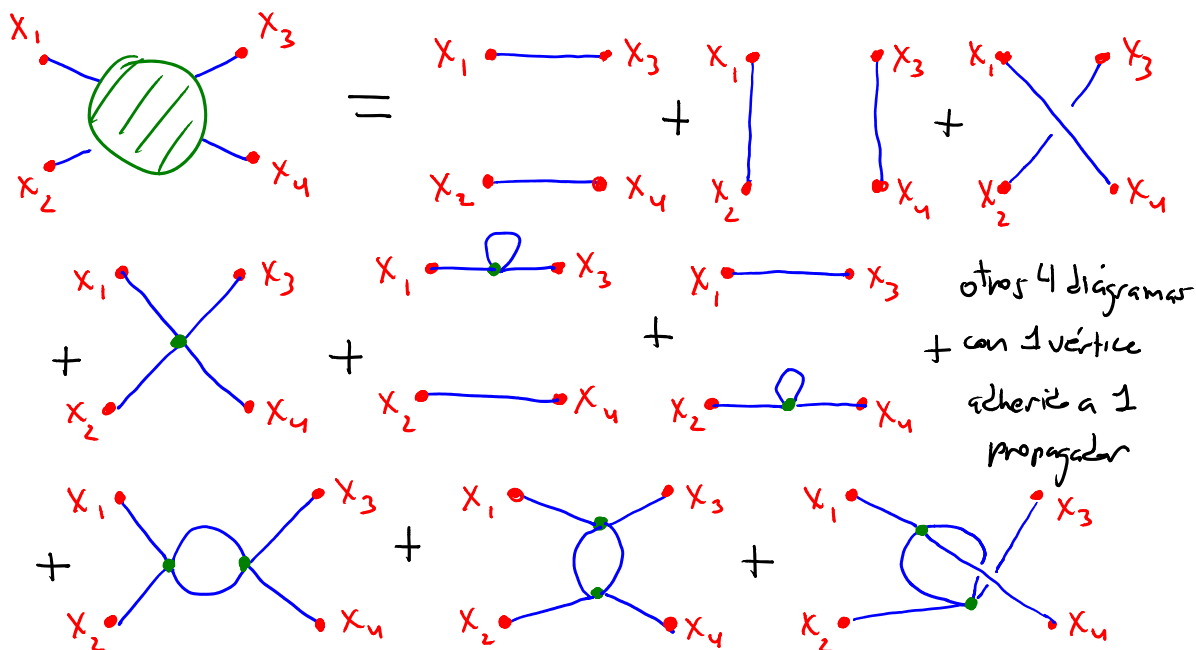
Las que existen solo efímeramente, entre procesos sucesivos de interacción, se conocen como partículas virtuales ($\leftrightarrow p^2 \neq m^2$).

Por otra parte, los diagramas son una herramienta eficiente para hacer cálculos, gracias a las instrucciones explícitas que nos permiten convertir cada diagrama en una fórmula, instrucciones conocidas como reglas de Feynman. Cuando uno mira los detalles, se encuentra que

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \text{Suma sobre todos los diagramas } \underline{\text{conexos}} \text{ (es decir, } \underline{\text{sin}} \text{ burbujas de vacío) topológicamente distintos con } N \text{ puntos externos } x_1, \dots, x_N$$



P.ej., la función de 4 puntos $G_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ está dada por



Resumiendo lo que hemos aprendido, y omitiendo desde ahora en adelante los colores que habíamos usado para distinguir entre puntos externos e internos, las reglas de Feynman para calcular funciones de correlación en la teoría φ^4 en espacio de posición son:

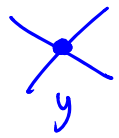
0) Dibujar todos los diagramas conexos con N puntos externos, usando propagadores libres y vértices de 4 patas.

1) Por cada propagador, asignar un factor de

$$\text{Diagram of a propagator (line between } x \text{ and } x') \equiv G(x, x')$$

(amplitud de probabilidad de propagación libre).

2) Por cada vértice, asignar un factor de



$$\equiv -i\lambda \int d^4y$$

(amplitud de probabilidad de que 1 partícula se convierta en 3, ó 2 en 2, ó 3 en 1, ó 0 en 4, ó 4 en 0).

3) Por cada punto externo, asignar un factor de



$$\equiv 1$$

(~amplitud de probabilidad de que la partícula que está en x esté en x).

4) Multiplicar los factores asociados a todas las partes.

5) Dividir entre el "factor de simetría", un numerito que depende de las propiedades del diagrama, y evita sobrecontar procesos (no hace falta tal corrección en p.ej. QED o QCD).

Frecuentemente es más fácil trabajar en espacio de momento, cosa que es natural en particular si queremos calcular los propios correladores en espacio de momento,

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_N) \equiv \int d^3x_1 \dots d^3x_N e^{ip_1 x_1} \dots e^{ip_N x_N} G_N(x_1, \dots, x_N).$$

En este caso los diagramas no tienen puntos externos asociados a las posiciones x_n , sino puntos externos asociados a los momentos p_n .

Las reglas de Feynman correspondientes son:

0) Dibujar todos los diagramas conexos con N patas externas, usando propagadores libres y vértices de 4 patas

1) Por cada propagador, asignar un factor de

$$\text{---}\overrightarrow{p}\text{---} \equiv \tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{amplitud de probabilidad de propagación libre}).$$

2) Por cada vértice, asignar un factor de

$$\text{X} \equiv -i\lambda, \quad \text{imponiendo a mano la conservación del cuadrimomento que fluye a través del vértice}$$

(amplitud de probabilidad de que ocurra un proceso con $0 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, \text{ ó } 4 \rightarrow 0$ partículas).

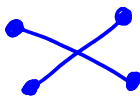
3) Por cada parte externa, asignar un factor de

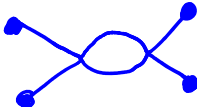
$$\text{---}\overleftarrow{p}\text{---} \equiv 1$$

4) Multiplicar los factores asociados a todas las partes de cada diagrama, e integrar $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$ sobre los momentos que quedan indeterminados:

$$\left(\begin{array}{c} \# \text{ de} \\ \text{integrales} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \# \text{ de} \\ \text{propagadores} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \# \text{ de} \\ \text{vértices} \end{array} \right)$$

$$= \binom{\# \text{ de puntos}}{\text{externos}} + \binom{\# \text{ de } \text{lazos}}{\text{}} - 1$$

(P.ej.,  $\Rightarrow 4 - 1 = 3 = 4 + 0 - 1$, ✓)

 $\Rightarrow 6 - 2 = 4 = 4 + 1 - 1$, ✓

 $\Rightarrow 5 - 2 = 3 = 2 + 2 - 1$. ✓)

5) Dividir entre el factor de simetría del diagrama (si lo hay).

Perfecto: ya tenemos una receta completamente sistemática para cumplir con la aspiración en k vida de los campistas: calcular los correladores G_N ó $\tilde{G}_N \forall N$.
Ahora, ¿eso para qué nos sirve?

Bueno, antes de contestar eso, debemos primero poder visualizar de algún modo el comportamiento de nuestro campo interactuante. Hasta ahora, la única conexión que conocemos entre una teoría cuántica y una colección de partículas se refiere a estados $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N\rangle$ donde las partículas individuales se identifican / etiquetan por sus momentos $\vec{p}_n$ y tienen energía $E_{\vec{p}_n} = \sqrt{\vec{p}_n^2 + m^2}$ (porque eso es lo que llamamos una partícula) ; pero la energía total es $E = E_{\vec{p}_1} + \dots + E_{\vec{p}_N}$, lo cual parece restringirnos fuertemente a partículas libres.

¿Cómo podríamos encontrar entre los estados cuánticos de nuestro campo interactuante partículas que conserven suficiente individualidad como para que podamos identificarlos como tales, pero al mismo tiempo sí interactúan?

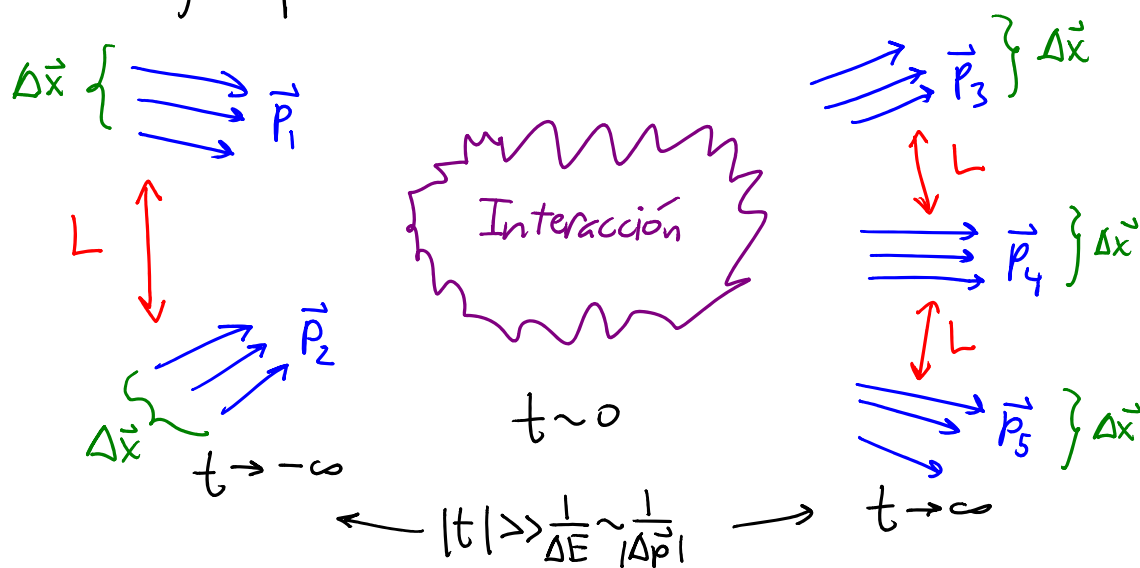
Una pista proviene del hecho de que, si bien es cierto

que en el mundo real las partículas en general no son libres, la situación experimental usual se refiere a un proceso de dispersión, donde un cierto número de partículas se encuentran inicialmente (en " $t \rightarrow -\infty$ ") separadas entre sí por distancias macroscópicas, luego se aproximan e interactúan (en " $t \sim 0$ "), para finalmente separarse de nuevo (cuando " $t \rightarrow +\infty$ "). Si las interacciones entre las partículas son (al menos aproximadamente) locales, entonces disminuyen en intensidad con la distancia, así que cuando " $t \rightarrow \pm\infty$ " tenemos un estado inicial/final en el que las partículas son aproximadamente libres. Son estas partículas las que queremos describir con los estados multipartículas que recién construiremos. Esto pudiera sonar confuso, porque las partículas de las que hablamos tienen un momento $\vec{p}$ completamente definido, y por tanto una posición $\vec{x}$ completamente incierta, con lo cual no queda claro en qué sentido podemos separarlas unas de otras...

Lo que en realidad queremos decir es que cuando

$t \rightarrow \pm\infty$ tenemos paquetes de onda de tamaño $|\Delta\vec{x}|$ mucho mayor que la longitud de onda asociada al momento promedio $|\vec{p}|$ del paquete, $|\Delta\vec{x}| \gg \lambda_{\text{de Broglie}} \sim \frac{1}{|\vec{p}|}$,

pero con una separación L entre paquetes que es aún mucho mayor que este tamaño:



De esta manera satisfacemos por un lado $|\vec{p}| \gg |\Delta\vec{p}|$, así que las partículas se pueden aproximar por ondas planas con momento definido, y por otro lado $L \gg |\Delta\vec{x}|$, así que las partículas se pueden considerar no interactuantes.

Podemos definir entonces un estado entrante / saliente

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N; \pm\rangle$$

asintótico

como que está en el cuadro de Heisenberg en el cual se detectarán las partículas indicadas si se realiza una medición al tiempo $t \rightarrow \mp \infty$.

Para comparar con resultados experimentales, nuestro objetivo principal será entonces calcular los traslapes entre los estados entrantes y los salientes,

$$\langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n ; - | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n ; + \rangle \equiv S_{p' \dots, p \dots} \equiv S_{\mp' \mp}$$

que representan la amplitud de probabilidad de que ocurran los procesos de dispersión señalados, y se conocen como amplitudes de dispersión o (todo junto) la matriz S (o matriz de dispersión).

Estas amplitudes están muy directamente relacionadas con las cantidades que los físicos experimentales miden directamente: "sección eficaz" y "taxa de decaimiento".

Ahora que entendemos dónde buscar la información física, tiene por fin sentido preguntarnos cómo extraer física a partir de las cantidades teóricas que ya sabemos calcular, las funciones de correlación.

Y la buena noticia es que hay una relación estrecha entre los conectores en espacio de momentos, $\tilde{G}_N(p_1, \dots, p_N)$ y las amplitudes de dispersión.

SIN invocar la expansión perturbativa (y sin restringir por tanto a la región de acoplamiento fuerte), se pueden demostrar 2 resultados generales:

I) Mientras que en una teoría libre encontramos que

$$\tilde{G}_2^{(0)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}, \quad \text{en } m^2 \equiv \partial_\phi^2 V(0),$$

en una teoría interactuante se encuentra que, por cada partícula que exista (estados asintóticos $|\vec{p}\rangle$ asociados en alguna medida a algún operador de campo, $\hat{O}|\Omega\rangle \sim |\vec{p}\rangle + \dots$), ↖ en credo de Heisenberg

↖ no necesariamente un $\hat{\phi}$ lógico (puede ser un operador compuesto como p.ej. $\hat{\phi}^2$)

se tiene

$$\tilde{G}_2(p) = \frac{i Z_0}{p^2 - M^2} + \dots$$

↖ $\equiv |\langle \vec{p} | \hat{O}(0) | \Omega \rangle|^2$ "cte. de renormalización del campo"

↖ Fourier de $\langle \Omega | T \{ \hat{O} \hat{O} \} | \Omega \rangle$

↖ masa física (o renormalizada) de la partícula: $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2} \Leftrightarrow p^2 = M^2 \neq m^2$ "masa desnuda"

(Esto es parte de lo que se conoce como la "representación espectral" de Källén-Lehmann.)

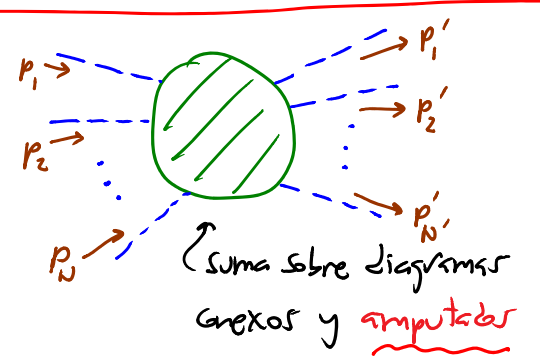
II) Más en general, las partículas (de a de vezas) se detectan siempre como polos en los $\tilde{G}_N$, y las amplitudes de dispersión son básicamente el residuo del polo múltiple asociado a tener las partículas involucradas:

$$\langle p'_1 \dots p'_N; - | p_1 \dots p_N; + \rangle = \lim_{\substack{p_n'^2 \rightarrow M_n^2 \\ p_n^2 \rightarrow M_n^2}} (\sqrt{E})^{-(N'+N)} \frac{p_1'^2 - M_1^2}{i} \dots \frac{p_N'^2 - M_N^2}{i} \frac{p_1^2 - M_1^2}{i} \dots \frac{p_N^2 - M_N^2}{i} \tilde{G}_{N'+N}(p'_1, \dots, p'_N, -p_1, \dots, -p_N)$$

↑
todas las energías $p_n^0, p_n'^0 > 0$

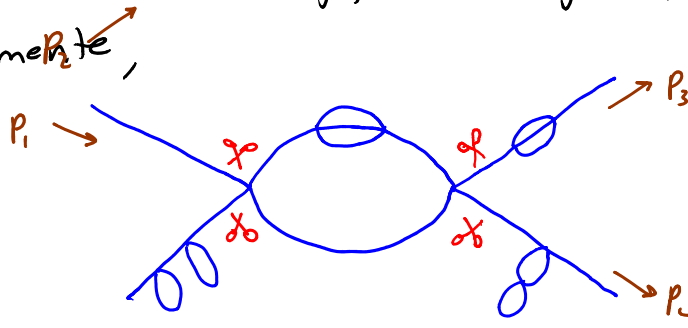
Esto es lo llamado "fórmula de reducción" de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ).

Si nos restringimos de nuevo a teorías débilmente acopladas, sabemos calcular $\tilde{G}_N$ usando diagramas de Feynman, y al implementar a ese nivel la fórmula de LSZ, se acaba encontrando que

$$\langle p'_1 p'_2 \dots p'_N ; - | p_1 p_2 \dots p_N ; + \rangle =$$


suma sobre diagramas conexos y amputados

donde "amputar" un diagrama significa eliminar las patas externas, cortando cada una de ellas en el lugar más interno posible. P.ej., en el diagrama que vimos recientemente,



habría que cortar en donde aparecen las tijeras: empezando en la punta de cada pata y caminando hacia el centro del diagrama, encontrar el último lugar donde la pata se desconecta del diagrama al converger 1 sola línea, y cortar precisamente ahí, descartando incluso el propagador libre asociado a esa última línea (que por esta razón denotaremos por ahora como puntada), y reemplazándolo por un factor de $\sqrt{Z}$ (= 1 a orden más bajo en la

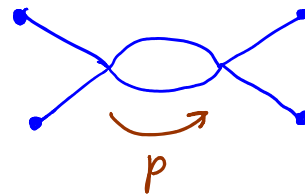
expansión partitiva).

Al hacer cuentas en la práctica, siempre es relativamente fácil obtener resultados explícitos para los diagramas "a nivel árbol" ($\equiv$ sin lazos, como p.ej. ) , pero más allá de eso nos encontramos genéricamente con 2 problemas:

1) En un diagrama con 1 ó más lazos, la(s) integral(es)

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{ sobre los momentos}$$

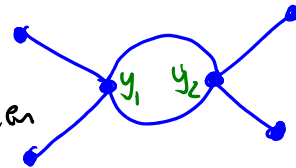
indeterminados (uno por cada lazo)



en general No convergen para p 's grandes, $p^\mu \rightarrow \pm\infty$

En espacio de posiciones, estas

"divergencias ultravioleta" ($\equiv$ UV) provienen



del límite de distancias pequeñas donde 2 ó más vértices coinciden en el espaciotiempo, $y_1^\mu \rightarrow y_2^\mu$.

Si la teoría tiene la propiedad de ser "renormalizable",

estas divergencias UV se pueden eliminar ajustando un número finito de parámetros (cuyos valores deducimos de los datos experimentales). Este procedimiento

se conoce como renormalización, y tiene perfecto sentido

físico: no es más que un cambio de lenguaje, para

reportar nuestros resultados no en términos de los parámetros "desnudar" que figuran en $\mathcal{L}$ ($m, \lambda, \dots$), sino de parámetros físicos ($M, \Lambda, \dots$), relacionados con cantidades medibles.

[En teorías con partículas sin masa, como QED, por los propagadores $\propto \frac{i}{p^2 + i\epsilon}$ pueden aparecer además "divergencias infrarrojas" ($\equiv IR$), que corresponden a bajas energías, $p^\mu \rightarrow 0$, o lo que es lo mismo, distancias grandes, $|y_1^\mu - y_2^\mu| \rightarrow \infty$.]

2) El número de diagramas que se obtienen a $\mathcal{O}(\lambda^n)$ crece muy rápidamente — típicamente $\sim n!$ —, de tal manera que $G_n^{(n)} \sim \lambda^n n!$ y $\therefore$ la serie perturbativa NO converge.

Esta es una señal clara de que el método perturbativo NO contiene toda la física: existen efectos NO perturbativos (típicamente $\sim \exp(-1/\lambda)$: no desarrollables en Taylor), que son pequeños si el acoplamiento es débil.

Con lo anterior tenemos ya completo el paquete teórico de ideas para un campo escalar débilmente acoplado. Debemos tener siempre presente que cuando el acoplamiento es fuerte ($\lambda \sim 1$, o peor aún, $\lambda \gg 1$), la expansión perturbativa es completamente inútil: ¡no nos sirve ni como método de cálculo ni de visualización!

Para entender a y hacer cálculos en campos no escalares, las ideas y herramientas básicas son las mismas, aunque en cada caso surgen novedades interesantes.

Algunos comentarios:

- Para describir partículas en espín 1, se utiliza un campo vectorial $A_\mu(x)$: una colección de 4 números en cada lugar, que bajo transformaciones de Poincaré (= Lorentz + traslaciones),

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + c^\mu,$$

↪ matriz 4×4 tal que $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

se mezclan de acuerdo con

$$A'^{\mu}(x') = A^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x)$$

↑ nuevo nombre del punto
↑ nueva función característica

En el caso de un campo vectorial No masivo, como es el caso del potencial electromagnético, hay una novedad importante: la existencia de "transformaciones de norma" (gauge). En el caso de electro, tenemos la forma

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\Theta(x)$$

en $\Theta(x)$ una función arbitraria, y tienen la peculiaridad de que no producen ningún cambio en el sistema físico: las configuraciones $A_{\mu}(x)$ y $A'_{\mu}(x)$ son completamente equivalentes: $A'_{\mu}(x) \simeq A_{\mu}(x) \quad \forall \Theta(x)$! Es decir, no solo es que la ecuación de Maxwell

$$S[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{con } F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

no cambia (como es el caso para una simetría), sino que los propios estados físicos no cambian:

$|A_{\mu}(x)\rangle$ y $|A'_{\mu}(x)\rangle$ son el mismo vector en el espacio de Hilbert.

En otras palabras, la invariancia de norma (más llamada simetría de norma) nos indica que nuestra descripción es redundante: tenemos más variables que grado de libertad físico.

En el caso familiar de electrodinámica en realidad nos debería de resultar obvio: $A_\mu(x)$ tiene 4 componentes, pero los fotones (o las ondas electromagnéticas clásicas) tienen solo 2 estados de polarización independientes.

Esta redundancia complica un poco el proceso de cuantización, y sobramos teniendo básicamente 2 opciones:

- 1) Eliminar la redundancia ("fijar la norma") por completo ANTES de cuantizar, pero solo promover las variables físicas a operadores (p.ej., podemos usar la "norma de Coulomb" $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, $A_0 = 0$, donde únicamente $\vec{A}_\perp \rightarrow \hat{\vec{A}}_\perp$.) $\leftarrow$ no invariante bajo Lorentz
- 2) Cuantizar PRIMERO, $A_\mu \rightarrow \hat{A}_\mu$, obteniendo una descripción cuántica redundante, donde el espacio de Hilbert es demasiado grande (existen estados que no son físicos), y DESPUÉS eliminar

la redundancia (p.ej., en la "norma de Lorentz",
 $\partial_\mu A^\mu = 0$, identificamos cuáles estados son físicos
 exigiendo que $(\partial_\mu \hat{A}^\mu)_+ |0\rangle = 0$).

↑ parte de frecuencia positiva ($\sim \hat{a}$)

Un punto muy interesante es que, si tenemos
 un campo complejo $\Phi(x)$ y un campo de norma
 ($\equiv$ vectorial sin masa) $A_\mu(x)$, la simetría interna (global)

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Phi(x)$$

↖ grupo $U(1)$

puede generalizarse a un conjunto de rotaciones internas
locales $\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} \Phi(x)$, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$

con el simple truco de reemplazar en el término
 cinético a la derivada usual por una derivada covariante,

$$D_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + i A_\mu) \Phi : \text{p.ej.}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^\dagger \Phi \quad \text{para Klein-Gordon.}$$

↖ contiene $\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi$ y

términos de interacción $\sim A \Phi^\dagger \Phi, A^2 \Phi^\dagger \Phi$

Y está en LA manera en que el potencial
 electromagnético se acopla a los campos con carga eléctrica.

El Modelo Estándar entero está basado en este principio de invariancia de norma, utilizando a campos de norma matriciales $A_{IJ}^M(x)$ asociar a la "simetría" local $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ en lugar de $U(1)$.

- Para describir a partículas de espín $1/2$, como el electrón, usamos un campo espinorial

↖ un espinor de Dirac en cada punto

$$\boxed{\psi_a(x)}$$

↖ $a = 1, 2, 3, 4$ índice que normalmente no se muestra explícitamente

Bajo $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + c^{\mu}$, $\psi_a(x) \rightarrow \psi'_a(x') = U_{ab}(\Lambda) \psi_b(x)$

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

↖ matrices 4×4 : $\gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}_{ab}$

↗ representación espinorial del grupo de Lorentz

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \rightarrow \{\gamma^5, \gamma^{\mu}\} = 0$$

$$(\gamma^5)^2 = 1$$

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma^0 \quad \text{conjugado de Dirac}$$

$\bar{\psi}\psi$ es un escalar, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ un vector, etc.

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i \underbrace{\gamma^\mu \partial_\mu}_{\equiv \not{\partial}} - m) \psi$$