la redundancia (p. ej., en la "norma de Lorentz", $\partial_\mu A^\mu = 0$, identificamos cuáles estados son físicos exigiendo que $(\partial_\mu \hat{A}^\mu)_+ |0\rangle = 0$).

↑ parte de frecuencia positiva ($\sim \hat{a}$)

Un punto muy interesante es que, si tenemos un campo complejo $\Phi(x)$ y un campo de norma (≡ vectorial sin masa) $A_\mu(x)$, la simetría interna

$$\Phi(x) \to e^{i\theta} \Phi(x)$$

← transformación global (la rotación es la misma en todo el espaciotiempo)

grupo $U(1)$

puede agrandarse a un conjunto de rotaciones internas locales

$$\Phi(x) \to e^{i\theta(x)} \Phi(x), \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

← rotación distinta en cada lugar

con el simple truco de reemplazar en el término cinético a la derivada usual por una derivada covariante,

$$\boxed{D_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + i A_\mu)\Phi}$$

← $D_\mu \Phi$ transforma igual que Φ:
$\Phi \to e^{i\theta(x)}\Phi \Rightarrow D_\mu\Phi \to e^{i\theta(x)} D_\mu \Phi$

P.ej.

$$\mathcal{L} = \underbrace{(D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi}_{} - m^2 \Phi^* \Phi$$

para Klein-Gordon.

OJO

contiene $\partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi$ y términos de interacción $\sim A\Phi^*\Phi, A^2\Phi^*\Phi$

¡Y esta es LA manera en que el potencial electromagnético se acopla a los campos con carga eléctrica ("acoplamiento mínimo")!

El Modelo Estándar entero está basado en este principio de invariancia de norma, utilizando campos de norma matriciales $A^{\mu}_{IJ}(x)$ (1, …, N) asociados a la "simetría" local $\underbrace{SU(3)\times SU(2)}\times U(1)$

grupos no abelianos: Matrices no conmutan

en lugar del U(1) que tenemos en electro.

En un poco más de detalle: estos campos matriciales $A^{\mu}_{IJ}(x)$, en lugar de transformar como el potencial electromagnético,

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Theta(x)$$

$$= e^{-i\Theta(x)}\left(A_\mu(x) - i\partial_\mu\right)e^{i\Theta(x)},$$

"matrices" 1×1

cambian de acuerdo con

parámetros ($\alpha = 1, \dots, d$) "generadores" del grupo no abeliano p.ej. SU(N)

$$\boxed{A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = \exp\left(-i\Theta^\alpha(x) T_\alpha\right)\left(A_\mu(x) - i\,\mathbb{1}\,\partial_\mu\right)\exp\left(i\Theta^\beta(x) T_\beta\right)}$$

Matrices N×N

La intensidad de campo $F^{\mu\nu}_{IJ}(x)$ se define en este caso como

$$\boxed{F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\underbrace{\left[A_\mu, A_\nu\right]}_{\neq 0 \text{ en general}}}$$

$F_{\mu\nu}(x)$ No es invariante de norma, sino que transforma de acuerdo con

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \exp(-i\theta^\alpha(x)T_\alpha)\,F_{\mu\nu}(x)\exp(i\theta^\beta(x)T_\beta)\,.$$

La densidad lagrangiana es una generalización de la de Maxwell, ← incluye interacciones $\sim A^3, A^4$

$$\boxed{\mathcal{L}_{YM}(A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)) = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right].}$$

Lagrangiano de Yang-Mills

Un ejemplo de un campo de Yang-Mills es el campo gluónico (responsable de la interacción fuerte), asociado a transformaciones de norma con grupo $SU(3)$ (matrices complejas 3×3 unitarias y con determinante $=1$).

La receta para acoplar un campo de Yang-Mills a campos de materia es la misma que antes. Necesitamos que el campo de materia tenga para empezar una simetría global bajo el grupo de norma en cuestión. P.ej., N campos escalares complejos $\Phi_I(x)$ ← $1,\dots,N$ que transforman de acuerdo con

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) = e^{i\theta^\alpha T_\alpha}\,\Phi(x)\,.$$ ← misma rotación $\forall\, x$

↑ los N campos empaquetados en una columna

Tal como en el caso electromagnético (p.68), si definimos la derivada covariante

$$\boxed{D_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + i A_\mu)\Phi}$$

y reemplazamos en el lagrangiano de Φ a $\partial_\mu \Phi$ por $D_\mu \Phi$ (p.ej., $\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi$ en Klein-Gordon), entonces la simetría global que teníamos se convierte en una simetría local,

$$\Phi(x) \to \exp(i\Theta^\alpha(x) T_\alpha)\Phi(x)$$

(y $D\Phi(x) \to \exp(i\Theta^\alpha(x) T_\alpha) D\Phi(x)$).

- Para describir a partículas de espín ½, como el electrón, usamos un campo espinorial

$\longleftarrow$ un espinor de Dirac (= 2 espinores de Weyl) en cada punto

$$\boxed{\psi_a(x)}$$

a $\leftarrow$ = 1,2,3,4 índice que normalmente no se muestra explícitamente

Bajo $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + c^\mu$, $\psi_a(x) \to \psi'_a(x') = M_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$

Para que esto tenga sentido, debe ser cierto que

$M(\Lambda_2) M(\Lambda_1) = M(\Lambda_2 \Lambda_1)$, pues de otro modo obtendríamos un distinto resultado para el nuevo espinor ψ'_a dependiendo de si hacemos una transformación de Lorentz de un jalón o por pasos.

Para decir con total precisión qué es un espinor, necesitamos entonces especificar quiénes son las $M(\Lambda)$, es decir, dar una regla para asociar a cada transformación de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ una matriz compleja 4×4 $M_{ab}(\Lambda)$, de tal modo que las M's satisfagan la "misma tabla de multiplicación" que las Λ's. Matemáticamente, esto significa que las M's deben formar una representación del grupo de Lorentz.

Nos conviene entonces recordar primero un poco más sobre la estructura del grupo de Lorentz. Las $\Lambda^\mu{}_\nu$ (que en sí mismas forman la representación vectorial del grupo de Lorentz) se definen como todas aquellas matrices reales 4×4 tales que

$$(\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu \eta_{\lambda\rho} \doteq (\Lambda^{-1\,T})_\mu{}^\lambda \eta_{\lambda\rho} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = \eta_{\mu\nu} ,$$

es decir,

grupo $O(3,1)$ grupo $O(3)$

$$\boxed{\Lambda^T \eta \Lambda = \eta} \quad (\text{cf. rotaciones: } R^T \mathbb{1} R = \mathbb{1}) .$$

Además de las transformaciones discretas

$$\mathbb{P} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ Paridad (inversión espacial),

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{1}$$

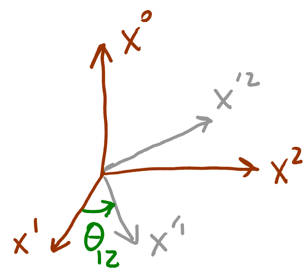
$$\mathbb{T} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Inversión temporal,

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{1}, \quad \mathbb{P}\mathbb{T} = \mathbb{T}\mathbb{P}$$

las Λ's incluyen 6 transformaciones continuas independientes:

- Rotaciones en el plano 1-2 (ó 1-3, ó 2-3):

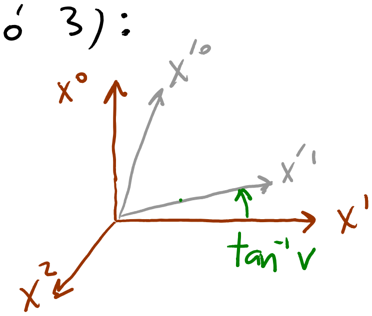
$$\underset{0 \le \theta_{12} < 2\pi}{{}^{(12)}\Lambda(\theta_{12})} \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{12} & \operatorname{sen}\theta_{12} & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$



(Estas 3 rotaciones y sus productos forman el subgrupo más familiar $SO(3) \subset SO^+(3,1) \subset SO(3,1) \subset O(3,1)$.)

- Empujones en la dirección 1 (ó 2 ó 3):

$${}^{(01)}\Lambda(\alpha_1) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\alpha_1 & -\operatorname{senh}\alpha_1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh}\alpha_1 & \cosh\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



"rapidez" $\;-\infty < \alpha_1 < \infty$

$$\begin{cases} \cosh\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}} \equiv \gamma \\ \operatorname{senh}\alpha_1 = \gamma v \end{cases} \qquad (-1 \le v \le 1)$$

(Los 3 empujones y sus productos no forman un subgrupo.)

Cualquier transformación de Lorentz ($\Lambda \in O(3,1)$) puede entenderse como una combinación de rotaciones y empujones ($\Lambda \in SO^+(3,1)$, el llamado grupo de Lorentz restringido) con (posiblemente) P y/o T.

Es posible entender a $SO^+(3,1)$ con base en transformaciones que difieren sólo infinitesimalmente de la identidad:

$$\Lambda = \mathbb{1} + \omega \quad \longleftrightarrow \quad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}, \quad \text{con } |\omega^{\mu}{}_{\nu}| \ll 1.$$

El punto es que haciendo muchas transformaciones infinitesimales sucesivas obtendríamos una transformación finita. En el caso infinitesimal, la condición $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ implica que

$$\underbrace{(\delta^{\mu}{}_{\lambda} + \omega^{\mu}{}_{\lambda})\,\eta_{\mu\nu}\,(\delta^{\nu}{}_{\rho} + \omega^{\nu}{}_{\rho})} = \eta_{\lambda\rho}$$

$$\eta_{\lambda\rho} + \omega_{\rho\lambda} + \omega_{\lambda\rho} + \mathcal{O}(\omega^2) = \eta_{\lambda\rho}$$

es decir, $\boxed{\omega_{\rho\lambda} = -\omega_{\lambda\rho}}$.

Una matriz 4×4 real y antisimétrica tiene 6 componentes independientes, justo el número de parámetros continuos

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot & \cdot \\ & & 0 & \cdot \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

independientes que antes dijimos que especifican una transformación de Lorentz general: 3 ángulos de rotación θ_{ij} + 3 parámetros de rapidez α_i.

De hecho, podemos ver la propiedad de antisimetría directamente en las matrices de rotaciones ${}^{(ij)}\Lambda(\theta_{ij})$ y empujones ${}^{(0i)}\Lambda(\alpha_i)$ si tomamos $\theta_{ij}, \alpha_i \ll 1$.

Encontramos, p. ej., ${}^{(12)}\Lambda(\theta_{12}) = \mathbb{1} + {}^{(12)}\omega(\theta_{12})$, con

$$
{}^{(12)}\omega \equiv \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{12}-1 & \operatorname{sen}\theta_{12} & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta_{12} & \cos\theta_{12}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}_{\theta_{12}\ll 1}
$$

(índices ${}^{\mu}{}_{\nu}$)

$$
= \theta_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \equiv \theta_{12}\, iJ^{(12)} \equiv \underbrace{-\theta_{12}}_{\theta_{21}}\, iJ^{(21)},
$$

Especifica magnitud de transformación

Especifica tipo de transformación

Generador de rotación en el plano 1-2 (índices ${}^{\mu}{}_{\nu}$)

y de manera similar, ${}^{(01)}\Lambda(\alpha_1) = \mathbb{1} + {}^{(01)}\omega(\alpha_1)$, con

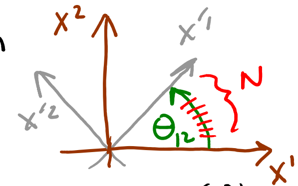
$$
{}^{(01)}\omega = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \alpha_1\, iJ^{(01)} \equiv -\alpha_1\, iJ^{(10)}.
$$

Generador de empujón en la dirección 1

El resultado general es

$$
iJ^{(\rho\lambda)}_{\mu\nu} = -\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\nu} + \delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\lambda}_{\mu}.
$$

Las matrices de rotaciones/empujones se pueden reconstruir a partir de estos generadores:



$$\text{p.ej.,}\quad {}^{(12)}\Lambda(\theta_{12}) = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1} + i\frac{\theta_{12}}{N}J^{(12)}\right)^N \equiv \exp(i\theta_{12}J^{(12)}),$$

no infinitesimal

y más en general,

antisimétrica en λ,ρ antisimétrica en λ,ρ

generadores del grupo de Lorentz

$$\Lambda(\omega) = \lim_{N\to\infty}\left[\mathbb{1} + \frac{1}{N}\left(-\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho}J^{(\lambda\rho)}\right)\right]^N = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho}J^{(\lambda\rho)}\right).$$

cualquier matriz 4×4 $\omega_{\lambda\rho}$ antisimétrica

porque hay 2 términos iguales

Claramente las propiedades de las Λ's provienen enteramente de las propiedades de las J's. En particular, la tabla de multiplicación de las Λ's resulta estar completamente codificada en las relaciones de conmutación de las J's,

$$\boxed{[J^{(\mu\nu)}, J^{(\rho\sigma)}] = i\left(\eta^{\mu\sigma}J^{(\nu\rho)} + \eta^{\nu\rho}J^{(\mu\sigma)} - \eta^{\mu\rho}J^{(\nu\sigma)} - \eta^{\nu\sigma}J^{(\mu\rho)}\right)}$$

Álgebra de Lorentz (las Λ's forman lo que se conoce como un "grupo de Lie"; las J's son una base para el "álgebra de Lie" correspondiente).

Habiendo entendido lo anterior, vemos que la tarea que tenemos pendiente para definir un espinor, especificar

← infinitas opciones

matrices $M_{ab}(\Lambda)$ que satisfagan la misma tabla de multiplicación que las Λ's, se reduce a especificar

6 matrices que satisfagan las mismas reglas de conmutación que las 6 J's.

Lo que descubrió Dirac (y Cartan, 15 años antes) es que esto puede lograrse definiendo la llamada

representación espinorial

$$M(\Lambda) \equiv \exp\left(\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \quad \leftarrow \text{rep del grupo } SO^+(3,1)$$

↑ caracterizada por ω ↑ matriz $N\times N$ (con N que depende de la dimensión del espaciotiempo)

con

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad \leftarrow \text{rep del álgebra } so(3,1)$$

↑ matriz $N\times N$ $\quad [S^{\mu\nu}, S^{\lambda\rho}] = i(\eta^{\nu\rho}S^{\mu\lambda} + \ldots)$

donde las matrices de Dirac $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ son 4 matrices $N\times N$ que satisfacen

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}}$$

↑ anticonmutador

Álgebra de Clifford (o de Dirac)

o, más explícitamente

$$\sum_{b=1}^{N}\left((\gamma^\mu)_{ab}(\gamma^\nu)_{bc} + (\gamma^\nu)_{ab}(\gamma^\mu)_{bc}\right) = 2\eta^{\mu\nu}\delta_{ac}\,.$$

Si la dimensión del espaciotiempo es 4, se puede mostrar que $N=4$: las matrices γ^μ, $S^{\mu\nu}$, M son matrices complejas 4×4.

(En D dimensiones espaciotemporales, con D par, $N=2^{D/2}$.
Si D es impar, basta con tener $N=2^{(D-1)/2}$, usando las $\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^{D-2}$ que se construirían para dimensión $D-1$, junto con

$\gamma^{D-1} \equiv (i)^{\frac{D-1}{2}} \gamma^0\gamma^1 \ldots \gamma^{D-2}$, que, según se puede mostrar, tiene las propiedades deseadas $\{\gamma^{D-1}, \gamma^{0,1,\ldots,D-2}\}=0, (\gamma^{D-1})^2=-1$.)

Lo único que nos resta entonces es construir 4 matrices 4×4 $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ que satisfagan $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, lo que es lo mismo

$$\boxed{(\gamma^0)^2 = +\mathbb{1}, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -\mathbb{1}, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu \quad \text{si } \mu\neq\nu}.$$

Aquí se las presento:

$$\boxed{\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},}$$

con $\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ las matrices de Pauli (que satisfacen $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij}\mathbb{1} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$), es decir,

$$\boxed{\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } \sigma^\mu \equiv (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \text{ y } \bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) = \sigma_\mu.}$$

Por supuesto, dadas estas γ^μ, ustedes pueden encontrar otras mediante un <u>cambio de base</u>: $\gamma^\mu \to \gamma'^\mu = B\gamma^\mu B^{-1}$

$$\Longrightarrow \{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}.$$

La elección de base no cambia nada sustancial, pero algunos aspectos pueden ser más fáciles de ver en una base que en otra. Nos quedaremos con la elección indicada arriba, que se conoce como la base de Weyl.

Juntando todo lo anterior, entendemos por fin que

un espinor de Dirac no es ni más ni menos que un paquete de 4 números complejos ψ_a $(a=1,\ldots,4)$ tales bajo una transformación de Lorentz $\Lambda = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho}J^{(\lambda\rho)}\right)$ se mezclan de acuerdo con $\psi \to \psi' = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho}S^{\lambda\rho}\right)\psi$, es decir,

$$\psi_a \to \psi'_a = \left[\exp\left(\tfrac{i}{2}\omega_{\lambda\rho}S^{\lambda\rho}\right)\right]_{ab}\psi_b$$

suma implícita

con $S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$, $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$.

Y un campo de Dirac es simplemente una función que asigna un espinor de Dirac a cada punto, $\psi(x)$.

Índice espinorial a casi siempre queda implícito (como en $x \equiv x^\mu$)

En la base de Weyl, los generadores de Lorentz toman la forma

$$S^{ij} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2 \end{pmatrix}$$

para rotaciones y

$$S^{0i} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -\sigma^i - \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i + \sigma^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^i/2 & 0 \\ 0 & i\sigma^i/2 \end{pmatrix}$$

para empujones.

Podemos notar que las matrices S^{ij} son hermitianas, mientras que las S^{0i} son antihermitianas.

Y vemos, además, que la rep de Dirac es, en cuanto al grupo de Lorentz restringido $SO^+(3,1)$, una rep reducible: los generadores $S^{\mu\nu}$ (y ∴ también los elementos del grupo, $M(\underset{\sim}{\Lambda}) = \exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu})$) son diagonales por bloques, de tal manera que ψ_1 y ψ_2 NO se mezclan con ψ_3 y ψ_4. (Esto es cierto a pesar de que las matrices 4×4 γ^μ sí constituían una rep irreducible del álgebra de Clifford.) En la base de Weyl podemos descomponer entonces a los espinores de Dirac ψ en 2 subpaquetes $\psi_I \equiv \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}$, $\psi_D \equiv \begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix}$

conocidos como espinores de Weyl:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{espinor izquierdo (= de 'quiralidad' negativa)} \\ \leftarrow \text{espinor derecho (= de 'quiralidad' positiva)}, \end{matrix}$$

que transforman por separado bajo Lorentz, con generadores

$$S_I^{ij} \equiv \epsilon^{ijk} \sigma^k/2 \ , \quad S_I^{0i} \equiv -i\, \sigma^i/2 \ , \quad \text{y}$$

$$S_D^{ij} \equiv \epsilon^{ijk} \sigma^k/2 \ , \quad S_D^{0i} \equiv +i\, \sigma^i/2 \ , \quad \text{respectivamente.}$$

sobre todo al hablar de "supersimetría"

Otra notación común para los espinores de Weyl es

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \psi_I \\ \leftarrow \psi_D \end{matrix}$$

con $\alpha = 1,2$, conocida como notación de van der Waerden.

La razón por la cual muchas veces empaquetamos a los espinores de Weyl ψ_I y ψ_D en un solo espinor de Dirac ψ, en lugar de considerarlos por separado, es que la transformación de paridad, $P \notin SO^+(3,1)$,

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{inversión espacial}$$

se implementa con $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$:

bajo $x'^\mu = P^\mu{}_\nu x^\nu$ se tiene $\psi' = \gamma^0 \psi$,

y esto intercambia $\psi_I \leftrightarrow \psi_D$.

(otra razón es que cuando consideramos partículas de espín $1/2$ con masa, el término de masa es del tipo $\sim m\, \psi_I^\dagger \psi_D$.)

Conviene definir a la matriz de quiralidad

$$\boxed{\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}$$

que satisface

$$(\gamma^5)^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = +\mathbb{1} \,,$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = i(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = 0$$

$$(\Rightarrow [\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0) \,.$$

En la base de Weyl se encuentra que γ^5 es diagonal,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \,,$$

así que $\left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} \psi_I \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_D \end{pmatrix} \end{matrix} \right.$ tienen quiralidad $\left\{ \begin{matrix} \text{negativa} \\ \text{positiva} \end{matrix} \right.$.

De hecho, dado un espinor de Dirac <u>en cualquier base</u>, podemos definir

relevante para el sector SU(2) del Modelo Estándar

$$\psi_I \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)\psi \,, \quad \psi_D \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)\psi$$

y tendremos entonces la descomposición $\psi = \psi_I + \psi_D$

con $\gamma^5\psi_I = \frac{1}{2}(\gamma^5 - \mathbb{1})\psi = -\psi_I \,,$

$$\gamma^5\psi_D = \frac{1}{2}(\gamma^5 + \mathbb{1})\psi = +\psi_D \,.$$

Dado un espinor de Dirac $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ $\left(\psi \xrightarrow{\Lambda} M(\Lambda)\psi \right)$,

puede mostrarse que su conjugado de Dirac

$$\boxed{\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0}$$

transforma como $\bar{\psi} \to \bar{\psi} M^{-1}$

$(\psi_1^* \; \psi_2^* \; \psi_3^* \; \psi_4)$

así que $\bar{\psi}\psi = \psi_a^* \gamma^0_{ab} \psi_b$ (o más en general, $\bar{\chi}\psi$) es un escalar.

Puede mostrarse también que

$\underbrace{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{\psi_a^* \gamma^0_{ab} \gamma^\mu_{bc} \psi_c}$ es un vector, $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$ un tensor (2,0), etc.

Con esta información entendemos de inmediato que el lagrangiano natural para un campo de Dirac libre es

$$\boxed{\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi}$$

Lagrangiano de Dirac

necesaria para que la acción sea real

$$= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$$

$\not{\partial} \equiv \gamma^\mu\partial_\mu$ operador (diferencial) de Dirac

Conviene considerar a ψ y $\bar{\psi}$ (en lugar de $\psi^\dagger$) como nuestras variables independientes, es decir,

$$\mathcal{L}_D(\psi, \partial_\mu\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu\bar{\psi}) = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi .$$

Al calcular la ecuación de Euler-Lagrange para $\bar{\psi}$, claramente obtenemos como ecuación de movimiento

$$\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0}$$

Ecuación de Dirac

$m\mathbb{1}$

(y la ec. de E-L para ψ arroja $-i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0$, que no es otra cosa que la versión conjugada de la ec. de Dirac).

Podemos ver ahora que si actuamos sobre la ec. de Dirac con el operador diferencial $(-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)$ desde la izquierda, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ &= (\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi \\ &= (\tfrac{1}{2}\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi \\ &= (\eta^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi , \\ &= (\partial^2 + m^2)\psi \end{aligned}$$

¡Klein-Gordon!

Así que las soluciones a la ecuación de Dirac son en automático también soluciones a la ecuación de Klein-Gordon (tal como esperamos para dar lugar a las ondas planas que estarán asociadas a partículas libres con masa m);

$\gamma^\mu \partial_\mu$ $\quad$ $\psi_I(x) = \frac{i}{m}\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu \psi_D(x)$

pero satisfacen además $(i\not\partial - M)\psi(x) = 0$ como restricción adicional: éstas son 4 condiciones impuestas sobre los 4 números complejos ($\leftrightarrow$ 8 reales) que tenemos en cada lugar, de modo que el número de grados de libertad se reduce a la mitad.

Esto es importante físicamente: el campo de Dirac para p.ej. el electrón debe describir 4 grados de libertad = 2 estados de espín para el electrón + 2 para el antielectrón, no 8. (Notar que esta eliminación de variables es impuesta en automático por la ec. de movimiento, y es por tanto cualitativamente distinta a la redundancia que teníamos para campos de norma A_μ como el potencial electromagnético — pp. 66–68.)

Al cuantizar el campo de Dirac, estas restricciones (visibles p.ej. en el hecho de que $\pi_{\bar\psi} \equiv \partial\mathcal{L}_D/\partial\dot{\bar\psi} = 0$) implican una pequeña modificación del procedimiento de cuantización canónica (debemos promover a conmutadores no a los paréntesis de Poisson, sino a los "paréntesis de Dirac").

Pero la principal novedad es que, después de descomponer en ondas planas y obtener los operadores de creación/aniquilación

$s=1,2$ etiqueta estado de espín

operador,

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\sum_{s=1}^{2}\left(\hat{a}^s_{\vec{p}}\, u^s(p)\, e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^{s\dagger}_{\vec{p}}\, v^s(p)\, e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}},\\ \hat{\bar{\psi}}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\sum_{s=1}^{2}\left(\hat{a}^{s\dagger}_{\vec{p}}\, \bar{u}^s(p)\, e^{ip\cdot x} + \hat{b}^{s}_{\vec{p}}\, \bar{v}^s(p)\, e^{-ip\cdot x}\right)\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}}\end{aligned}}$$

espinores solución de Dirac

con $\hat{a}^{s\dagger}_{\vec{p}}$, $\hat{b}^{s\dagger}_{\vec{p}}$ respectivamente operadores de creación de partícula (p.ej. electrón) y antipartícula (antielectrón), uno descubre que existen estados con energía arbitrariamente negativa, a menos de que uno efectúe la cuantización canónica imponiendo relaciones de anticonmutación en lugar de conmutación,

$$\boxed{\begin{aligned}&\{\hat{\psi}(\vec{x},t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}',t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\,\mathbb{1},\\ &\{\hat{\psi}(\vec{x},t), \hat{\psi}(\vec{x}',t)\} = 0\\ \longleftrightarrow\quad &\{\hat{a}^s_{\vec{p}}, \hat{a}^{s'\dagger}_{\vec{p}'}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta^{ss'} = \{\hat{b}^s_{\vec{p}}, \hat{b}^{s'\dagger}_{\vec{p}'}\},\\ &\{\hat{a}^s_{\vec{p}}, \hat{a}^{s'}_{\vec{p}'}\} = \{\hat{a}^s_{\vec{p}}, \hat{b}^{s'}_{\vec{p}'}\} = 0 = \{\hat{a}^s_{\vec{p}}, \hat{b}^{s'\dagger}_{\vec{p}'}\} = \{\hat{b}^s_{\vec{p}}, \hat{b}^{s'}_{\vec{p}'}\}.\end{aligned}}$$

Es decir, descubrimos que las partículas de espín $1/2$ ($\leftrightarrow$ propiedad de transformación bajo Lorentz) deben ser necesariamente fermiones ($\leftrightarrow$ $\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle = -\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle$), y con ello explicamos el principio de exclusión de Pauli ($\{\hat{a}^\dagger_{\vec{p}s}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}s}\} = (\hat{a}^\dagger_{\vec{p}s})^2 = 0 \Rightarrow \hat{a}^\dagger_{\vec{p}s} |\vec{p}s\rangle = 0$).

Con todo lo anterior, tenemos ya suficientes elementos para acoplar campos de norma (Maxwell o Yang-Mills) a a campos de Dirac, y con ello entender en particular a la electrodinámica cuántica (QED),

$$\boxed{\mathcal{L}_{QED} \equiv \mathcal{L}_{Maxwell}(\partial_\mu A_\nu) + \mathcal{L}_{Dirac}(\Psi, D_\mu \Psi, \bar{\Psi})}$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iA_\mu$$

$\Rightarrow$ invariancia local $U(1)$

y vislumbrar la cromodinámica cuántica (QCD)

$$\boxed{\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{Y-M}(A_{\mu\, IJ}, \partial_\mu A_{\nu\, IJ}) + \mathcal{L}_{Dirac}(\Psi_I, (D_\mu \Psi)_I, \bar{\Psi}_I)}$$

$$\partial_\mu + i A_{\mu\, IJ}$$

$\Rightarrow$ invariancia local $SU(3)$