Correspondencia Holográfica: Ejercicios

1. a) Al calcular amplitudes de dispersión perturbativamente, hay diagramas donde algunas de las partículas no interactúan con algunas otras; pero los más interesantes son aquellos donde todas se hablan entre sí, diagramas que llamamos *totalmente conexos*. Usando las reglas de Feynman de la teoría de un campo escalar real con interacción $-\lambda\phi^4/4!$, calcula la amplitud de dispersión (la parte totalmente conexa) de 2 partículas a 2 partículas a orden λ^1. Con este resultado en mano, tenemos una predicción teórica para la amplitud de dispersión, A_{teo}. Pero éste es un dato que podemos pedirle a un experimental que vaya y mida, arrojando un resultado A_{exp}. Resulta natural entonces *definir* la constante de acoplamiento *física* λ_{fis} para estas partículas a partir del resultado experimental para este proceso de dispersión, realizado a una cierta energía total de la colisión en el marco del centro de masa (p.ej., E_{cm}=125 Gev): $A_{exp} \equiv -i\lambda_{fis}$. Si la predicción teórica es correcta (a este nivel de aproximación), debemos tener $A_{teo} = A_{exp}$. ¿Qué relación guarda entonces (a este nivel de aproximación) λ_{fis} con la constante de acoplamiento desnuda λ que aparece en el lagrangiano? (Los experimentales no miden amplitudes de dispersión sino secciones eficaces, pero las primeras se puede inferir a partir de la segundas.)
b) Al empezar a incluir diagramas de 1 lazo en adelante, si mantenemos nuestra definición de λ_{fis} igual, ¿de dónde imaginas que saldría el hecho de que λ_{fis} dependerá de la energía a la cual nuestro amigo experimental mide la amplitud de dispersión (sección eficaz) que la define?
c) En QED, la constante de acoplamiento es la carga eléctrica e (p.ej. del electrón), y es habitual definir la constante de estructura fina $\alpha_{em} \equiv e^2/4\pi$, que para energías del orden de la masa del electrón, o más bajas, es $\sim 1/137$. Al tomar en cuenta correcciones cuánticas, se encuentra que este acoplamiento "corre" con la energía. Es decir, la carga física del electrón depende de que tan de cerca lo miremos, y el 1/137 usual es el resultado cuando lo miramos a distancias más grandes que su nube de partículas virtuales, cuyo tamaño no es otra cosa más que su longitud de onda de Compton). A energías más altas que la masa del electrón, la dependencia está dada por

$$\alpha_{em}(E) = \frac{\alpha_{em}(E_0)}{1 - \frac{2}{3\pi}\alpha_{em}(E_0)\ln(E/E_0)} ,$$

donde E_0 es simplemente una energía de referencia (p.ej., podemos tomar $\alpha_{em}(m_e) = 1/137$. Haz una gráfica esquemática de este comportamiento.
d) La derivada del acoplamiento con respecto a la energía se conoce como la *función beta* del acoplamiento en cuestión ($\beta_\alpha \equiv E\partial\alpha(E)/\partial E$ o $\beta_g \equiv E\partial g(E)/\partial E$). ¿Qué signo tiene la función beta en QED? ¿Qué significa esto físicamente?
e) En QCD, la fórmula para $\alpha_{YM}(E)$ es la misma, pero con signo cambiado en el denominador (y un coeficiente numérico distinto). ¿Qué signo tiene entonces la función beta en QCD?
f) Relaciona esta fórmula que acabas de escribir con la que yo puse en la transparencia 25, y deduce qué quiere decir entonces Λ_{QCD}.

2. a) Haz los conteos de potencias de N_c y g_{YM} (o N_c y λ) en los diagramas de las transparencias 39, 40 y 43 (yo en clase solo expliqué el primero).

3. a) Considera un espacio anti-de Sitter (AdS) 5-dimensional con radio de curvatura L, en coordenadas de Poincaré, usando la coordenada radial invertida z (en lugar de la radial $r = L^2/z$). ¿En qué valor de z se encuentra la frontera del espacio?
b) Calcula la distancia propia para una trayectoria puramente radial (es decir, a lo largo de z) que se extiende desde z_1 hasta z_2.
c) ¿Cómo se comporta esa distancia si $z_1 \to 0$ ($r_1 \to \infty$)? ¿Y si $z_2 \to \infty$ ($r_2 \to 0$)?
d) Para un rayo de luz viajando a lo largo de una trayectoria puramente radial, calcula el tiempo total, en términos de la coordenada t, que toma en llegar desde z_1 hasta z_2. Muestra que ese tiempo es finito aún si z_1 se ubica en la frontera de AdS.
e) Considera ahora una cuerda abierta gigantesca, que se extiende (no necesariamente con un perfil puramente radial) desde z_0 hasta $z \to \infty$. Conviene parametrizarla eligiendo $\tau = t$ y $\sigma = z$ (elección que es un ejemplo particular de lo que se conoce como la norma estática), y describiendo su posición en las coordenadas $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ usando las funciones de encaje $\vec{X}(t, z)$. Escribe la acción de Nambu-Goto para esta cuerda, que es completamente análoga a una cuerda de violín infinita, solo que vive en AdS en lugar de en Minkowski.
f) Calcula la ecuación de movimiento para la cuerda.
g) En el caso particular donde la cuerda es puramente radial (solo se extiende a lo largo de z) y está permanentemente en reposo en el punto $\vec{x} = \vec{x}_0$, ¿qué forma toma $\vec{X}(t, z)$? Muestra que esta es una solución de la ecuación de Nambu-Goto que obtuviste antes.
h) Calcula la energía E (con respecto a t) del segmento de esta cuerda que se extiende desde z_1 hasta z_2. ¿Cómo se comporta E si $z_2 \to \infty$? ¿Y si $z_1 \to 0$?

4. a) Considera la métrica de AdS_5 en coordenadas de Poincaré, usando z como coordenada radial. Para que las simetrías de SYM $\mathcal{N} = 4$ y Cuerdas IIB empaten, debe ocurrir en particular que por cada transformación del grupo conforme en la teoría de campos (que en $3 + 1$ dimensiones es $SO(4, 2)$), existe una isometría (es decir, un cambio de coordenadas que deja la métrica invariante) en AdS. Sabiendo que el diccionario de la correspondencia traduce $x^\mu_{CFT} = x^\mu_{AdS}$, para cada transformación conforme solo nos faltaría averiguar cómo transforma la coordenada radial z. Considera primero las transformaciones de Poincaré en SYM, $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + c^\mu$. Muestra que esta transformación por si sola, sin cambio alguno en z, es una isometría de AdS.
b) Los reescalamientos (o dilataciones) $x^\mu \to x'^\mu = s x^\mu$ (con $s \neq 0$ un parámetro real) también son una simetría de SYM $\mathcal{N} = 4$ (o cualquier CFT). Muestra que es posible cambiar z de una cierta manera para lograr que esta transformación quede implementada como isometría en AdS.
c) Explica por qué tu resultado anterior muestra que z transforma bajo reescalamien-

tos tal como una distancia de la teoría de norma, y su inverso $r \equiv L^2/z$ reescala como una *energía*. Como mencioné en clase, con el diccionario de la correspondencia r de la teoría gravitacional se traduce en la escala energética a la cual elegimos examinar la CFT—inversamente relacionada a la resolución espacial de nuestros aparatos de medición, la cual corresponde entonces a z.
d) De lo anterior (y lo que dije en clase) concluimos entonces que lo que ocurre en la correspondencia es que, al pasar de la descripción sin gravedad a la descripción con gravedad, la información del comportamiento de la teoría de norma a distintas escalas energéticas (o, equivalentemente, distintas escalas de resolución espacial) queda depositada en rebanadas horizontales a distintas profundidades (distintos valores de z) en mis dibujos de AdS. Ahora bien, AdS puro (AdS sin distorsionar) corresponde específicamente al estado de menor energía de nuestra CFT: el vacío. Has mostrado en el inciso b) que el cambio de una rebanada a otra (aumentando z) es una isometría de AdS, lo cual corresponde a decir que el vacío en SYM $\mathcal{N} = 4$ luce igual a cualquier escala energética. AdS es de hecho el único espacio con esta propiedad (grupo de isometría $SO(4,2)$), así que necesariamente nos dará la descripción dual del vacío de *cualquier* CFT, no solo SYM $\mathcal{N} = 4$. Explica por qué el fondo involucrado no podrá ser ya AdS puro cuando queremos describir cualquiera de 2 situaciones: i) mantenernos en la misma teoría conforme, pero en un estado que no sea el vacío (es decir, que tenga alguna excitación), ii) cambiamos al vacío (o algún estado excitado) de otra teoría de campos, que no sea ya conforme.

5. a) Cuando expliqué el análisis que hizo 't Hooft de las teorías no abelianas (incluyendo a QCD) con N_c grande, vimos que si solo hay gluones (o campos que son matrices $N_c \times N_c$ igual que ellos), la descripción en términos de superficies involucra solo a cuerdas cerradas, y agregar quarks (o campos que son columnas con N_c entradas) corresponden a agregar cuerdas abiertas. En la correspondencia ocurre exactamente eso, y en particular, la cuerda que examinaste en el ejercicio 3, que se extiende desde la frontera de AdS $z = 0$ hasta $z \to \infty$, resulta ser dual a un *quark* infinitamente pesado. Para darle una masa grande pero finita, le permitimos a la cuerda abierta no extenderse hasta la frontera, sino terminar en $z = z_m$ (donde necesariamente debe existir entonces una D-brana). Directamente a partir de tu resultado para el inciso 3h), puedes deducir la energía de tal cuerda cuando está en reposo, es decir, la masa m del quark dual (que dependerá del valor de z_m).
b) Un antiquark aislado y estático es una cuerda igual que la anterior, pero con orientación opuesta. Si ponemos a un quark y un antiquark (cada uno con masa m muy grande) y los mantenemos fijos a una distancia d (p.ej., el quark en $x^1 = -d/2$ y el antiquark en $x^1 = d/2$), esperamos que interactúen a través del campo gluónico, y tengamos entonces una configuración con menor energía que cuando los teníamos por separado. El potencial del par, $V(d)$, se define como la energía del sistema conjunto menos la de un quark y un antiquark aislados. En la descripción gravitacional, esto corresponde a tener una sola cuerda con *ambos* extremos en $z = z_m$, cuya configuración estática de mínima energía tiene forma de U y se encuentra resolviendo la

misma ecuación de movimiento que escribiste en el problema 3 (solo que ahora tenemos condiciones de frontera distintas). Calcula el potencial $V(d)$, en el límite donde los quarks se vuelven infinitamente pesados, $m \to \infty$. Si necesitas ayuda, puedes apoyarte en la sección 4 del artículo hep-th/9803002 de Maldacena. Como verás, es una cuenta fácil. Lo que vale las más de 1200 citas que tiene el artículo es la conexión entre el lenguaje de cuerdas y el lenguaje de la teoría de norma.
c) Si nuestra teoría de norma confina, para separaciones grandes entre el quark y el antiquark debemos obtener un potencial lineal, $V(d) = \sigma d$, donde σ es la tensión del tubo de flujo (o 'cuerda de QCD') correspondiente, es decir, su energía por unidad de longitud. El primer fondo gravitacional dual a una teoría que confina fue descrito por Witten en el artículo hep-th/9803131, pero probablemente te será más fácil vislumbrarlo en la ecuación (3.1) del artículo hep-th/0311270 de Sakai y Sugimoto (quienes le agregaron quarks a la teoría confinante de Witten, obteniendo así algo que se parece ya mucho más a QCD). En esa fórmula, U es la coordenada radial, y lo que ocurre al repetir la cuenta del potencial quark-antiquark es que la cuerda no puede descender en el fondo más allá de $U = U_{KK}$. La razón por la cual el potencial es lineal es entonces simplemente que el fondo tiene una especie de piso donde la cuerda se sigue y sigue estirando conforme separamos sus extremos. Por esta razn, la tensión σ del tubo de flujo no es otra cosa que la tensión de una cuerda que en la descripción gravitacional se encuentra a profundidad $U = U_{KK}$ y se extiende puramente a lo largo de x^1. Usando la métrica mencionada, calcula σ.

6. a) Escribe la acción de Nambu-Goto para una cuerda que (como en el problema 3) es infinita, pero ahora vive en el fondo Schwarzschild-AdS en lugar de AdS puro. (La métrica la puedes encontrar en la sección del curso donde hablamos de la correspondencia a temperatura finita y posibles conexiones con el plasma de quarks y gluones.) Muestra que la cuerda estática y puramente radial (vertical en mis dibujos) es una solución. Esto corresponde a un quark en reposo dentro de un plasma de gluones y materia exótica.
b) Si arrastramos al quark a través de este plasma con velocidad constante v, esperamos que el plasma resista el movimiento, ejerciendo una fuerza de arrastre $F_{arrastre}$ sobre el quark. El cálculo para determinar esta fuerza fue hecho por primera vez en la sección 3 (basada en la 2) del artículo hep-th/0605182 de Gubser, obteniendo el resultado (14). Reproduce ese cálculo (que fue hecho simultánemente en la sección 3.3 de hep-th/0605158, que quizás encuentres más amigable). Como podrás ver, es una cuenta en verdad muy corta y sencilla, ¡y a pesar de ello su importancia fue tal que el artículo tiene más de 450 citas!