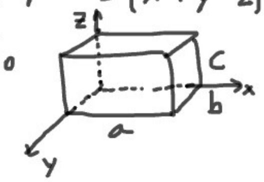
Electromagnetismo II
Soluciones a la tarea #1

1.- (a) Para la función $\vec{F}(\vec{r}) = x^2\hat{x} + y^2\hat{y} - z^2 z$ se tiene $\nabla\cdot\vec{F} = 2(x+y-z)$

así que la integral sobre el volumen del paralelepipedo



$$\int_V \nabla\cdot\vec{F}\, dv = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz\, 2(x+y-z) = a^2bc + ab^2c - abc^2$$
$$= abc(a+b-c)$$

Por otro lado $\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{a} = -\int_{x=0} F_x\, dydz + \int_{x=a} F_y\, dydz - \int_{y=0} F_y\, dxdz + \int_{y=b} F_y\, dxdz - \int_{z=0} F_z\, dxdy + \int_{z=c} F_z\, dxdy$

$$= 0 + \int_0^b\int_0^c a^2\, dydz - 0 + \int_0^a\int_0^c b^2\, dxdz - 0 + \int_0^a\int_0^b -c^2\, dxdy = abc(a+b-c)$$

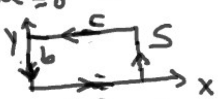
que coincide con lo anterior, por lo que se cumple que $\int_V \nabla\cdot\vec{F}\, dv = \oint_S \vec{F}\cdot d\vec{a}$

El teorema de Gauss.

(b) Ahora, para el teorema de Stokes $\int_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}$

se tiene que $\nabla\times\vec{F} = 0 \Rightarrow \int_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{a} = 0$

Y para cuando S es el rectángulo

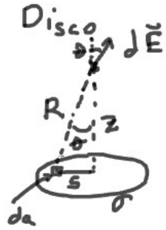


la curva C son los 4 lados

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{y=0} F_x\, dx - \int_{y=b} F_x\, dx - \int_{x=0} F_y\, dy + \int_{x=a} F_y\, dy = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{3} = 0$$

Por lo tanto sí se cumple.

2.- Disco



$R^2 = s^2 + z^2$

$\cos\theta = \frac{z}{R}$

$da = s\,ds\,d\varphi$

(a) Por la simetría las componentes horizontales de $d\vec{E}$ se cancelan al integrar sobre todo el disco y solo la vertical contribuye.

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \hat{z}\int dE_z = \hat{z}\int dE\cos\theta = \hat{z}\int \frac{k\sigma}{R^2}\, da\cos\theta$$

$$\vec{E}(z) = \hat{z}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a s\,ds\, \frac{k\sigma}{s^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{s^2+z^2}} = \hat{z}\,\pi\sigma z\int_0^M \frac{du}{u^{3/2}} \quad ; \; u = s^2+z^2, \; M = a^2+z^2$$

$$\vec{E}(z) = \hat{z}\,\pi\sigma z\left(\frac{2}{z} - \frac{2}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\hat{z}$$

De aquí se ve que si $z\to 0$ $\vec{E} = 2\pi\sigma\,\hat{z}$ que coincide con el campo de un plano infinito esto es de esperarse pues en un punto muy cercano a la superficie, el plano se "ve" como infinito.

Para $z\to\infty$ $E = 2\pi\sigma\left(1 - \left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right) \approx \frac{\pi a^2\sigma}{z^2} = \frac{Q}{z^2}$

que es el campo de una carga puntual $Q = \pi a^2\sigma$. Se ve que $E \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$ como se espera

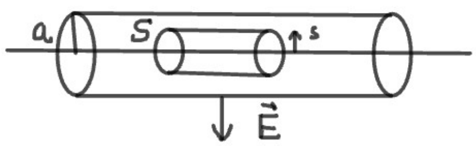
(b) El potencial eléctrico se puede obtener del campo eléctrico sobre el eje z, pues solo es función de z

$$\vec{E} = -\nabla\phi(z) = -\hat{z}\frac{d\phi(z)}{dz} \Rightarrow \phi(z) = -\int E(z)\,dz = -\int 2\pi\sigma\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)dz$$

$$\phi(z) = 2\pi\sigma\left(\sqrt{a+z^2} - z\right)$$

escogiendo la constante de integración tal que $\phi(z\to\infty) = 0$

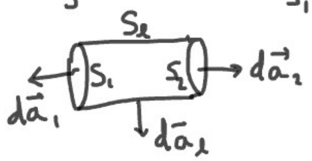
3.- La ley de Gauss en forma integral es $\oint_S \vec{E}\cdot da = 4\pi k\, Q_{enc}$



para un cilindro de longitud infinita de radio a se escoge la superficie gaussiana S como un cilindro de radio s donde s puede ser $< a$ o $> a$

La carga encerrada por S es $Q_{enc} = \int_V \rho(s)\, dV = \int_0^s \rho(s')\, 2\pi s'\, ds'\, L$ donde L es la longitud del cilindro gaussiano.

$$\oint_S \vec{E}(s)\cdot d\vec{a} = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_\ell} \vec{E}\cdot d\vec{a}$$



donde S_1 y S_2 son las superficies de las dos tapas del cilindro y S_ℓ es la superficie lateral. Pero en S_1 y S_2 los vectores de los elementos de área son perpendiculares al campo eléctrico, que es radial por lo que $\vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$ entonces solo queda la integral sobre S_ℓ en donde $d\vec{a}_\ell$ y $\vec{E}$ son paralelos. Así que

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_{S_\ell} E(s)\, da = E(s)\, S_\ell = E(s)\, 2\pi s\, L$$

Metiendo esto en la ley de Gauss queda

$$E(s) = \frac{4\pi k}{2\pi s} \int_0^s \rho(s')\, 2\pi s'\, ds' = \frac{4\pi k}{s} \int_0^s \rho(s')\, s'\, ds'$$

Como la densidad ρ es cero para $s > a$ quedan dos casos

$$E(s) = \frac{4\pi k}{s} \int_0^s \rho_0 \left(\frac{s'}{a}\right)^2 s'\, ds' = \pi k \rho_0 \frac{s^3}{a^2} \qquad s < a$$

$$E(s) = \frac{4\pi k}{s} \int_0^a \rho_0 \left(\frac{s'}{a}\right)^2 s'\, ds' = \pi k \rho_0 \frac{a^2}{s} \qquad s > a$$