

Electromagnetismo II
Soluciones a la Tarea #2

1. En coordenadas cilíndricas (s, ϕ, z) , cuando el potencial solo depende de la variable radial s el laplaciano es

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) = 0$$

la solución de la ecuación es $s \partial \varphi / \partial s = K$ una constante y al integrar queda

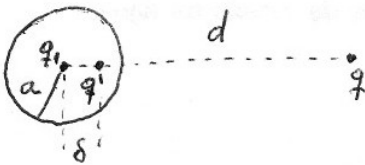
$$\varphi(s) = \int \frac{K}{s} ds = K \log(s) + k$$

que es la solución general para el potencial con K y k constantes.

2.

- El potencial de una carga puntual sobre la superficie de una esfera centrada en la carga es constante $\phi(r=a) = \frac{q_1}{a}$

Así que nos conviene colocar una carga en el centro de la esfera conductora para que el potencial en la superficie sea $\phi(r=a) = V_0$. La carga debe ser $q_1 = V_0 a$



Se había encontrado en clase que la carga imagen debe ser $q' = -\frac{a}{d} q$ a distancia $s = \frac{a^2}{d}$

El potencial total será el producido por las 3 cargas

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{q}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q_1}{r} \\ &= \frac{q}{r} \left[\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta)^{1/2}} - \frac{1}{(d^2 r^2 / a^2 + a^2 - 2dr \cos \theta)^{1/2}} \right] + V_0 \frac{a}{r} \end{aligned}$$

(b) La fuerza de atracción es la misma que ejercen q' y q_1 sobre q

$$F = \frac{q' q}{(d-s)^2} + \frac{q_1 q}{d^2} = -\frac{da q^2}{(d^2 - a^2)^2} + q V_0 \frac{a}{d^2}$$

(c) La carga total es la suma de q_1 y q' que son las que se encuentran dentro de la esfera

$$Q_{\text{inducida}} = -q \frac{a}{d} + V_0 a = a \left(V_0 - \frac{q}{d} \right)$$

3-

- Al cargar el capacitor a una diferencia de potencial $\Delta\phi$ adquiere una carga $Q = C \Delta\phi$ para una $C = \frac{A}{4\pi d}$

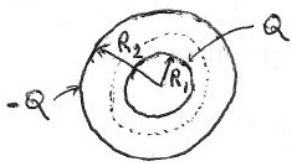
Al desconectarlo de la batería la Q se va conservar cuando d aumenta a αd . Entonces la energía inicial

$$W_i = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_i} \quad \text{cambia a} \quad W_f = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_f} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A/4\pi\alpha d} = \alpha W_i$$

El cambio de energía es $\Delta W = W_f - W_i = (\alpha - 1) W_i > 0$ pues $\alpha > 1$

Por lo tanto la energía aumenta, esto se debe a que se hace trabajo para separar las placas, pues éstas tienden a atraerse al tener cargas opuestas

4.-



Para una superficie gaussiana esférica contenida entre las dos esferas, la carga contenida es Q por lo que el campo eléctrico en esta región solo depende de la esfera interior $E = \frac{Q}{r^2}$ $R_1 < r < R_2$

(a)

$$\text{El potencial es } \phi = -\int_1^2 E dr = Q \left[\frac{1}{r} \right]_1^2 = Q \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

La diferencia de ϕ entre las dos esferas será $\Delta\phi = Q \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$

$$\text{La capacitancia es } C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

(b) El campo E sobre la esfera interna es

$$E_1 = \frac{Q}{R_1^2}$$

Al variar R_1

Se quiere mantener $\Delta\phi$ constante; esto se puede lograr

(i) manteniendo Q fija y variando R_2

(ii) manteniendo R_2 fijo y variando Q

Si por ejemplo fijamos R_2 , la Q necesaria es $Q = \frac{\Delta\phi R_1 R_2}{R_2 - R_1}$
así que $E_1 = \frac{\Delta\phi}{R_2 - R_1} \frac{R_2}{R_1}$

El mínimo de E_1 se obtiene (con R_2 fijo) $\frac{dE_1}{dR_1} = \frac{\Delta\phi R_2}{R_1^2} \left[\frac{-1}{R_2 - R_1} + \frac{R_1}{(R_2 - R_1)^2} \right] = 0$
 $\Rightarrow R_1 = R_2 - R_1 \Rightarrow R_1 = R_2/2$

Lo mismo se obtiene usando (i)

El campo mínimo es $E_1 \Big|_{\min} = \frac{\Delta\phi}{R_2 - R_2/2} \frac{R_2}{R_2/2} = \frac{4\Delta\phi}{R_2}$