Electromagnetismo II
Soluciones a la tarea # 3

1. Para éste problema utilizaremos la ecuación de Laplace en cilíndricas:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{s}\partial_s(s\partial_s\phi) + \frac{1}{s^2}\partial^2_\varphi\phi + \partial^2_z\phi = 0.$$

Debido a que el cilindro es infinitamente largo, podemos asegurar que la variación en z es nula, por lo tanto, la parcial respecto de z vale cero. Esto lleva a la siguiente ecuación.

$$s\partial_s(s\partial_s\phi) + \partial^2_\varphi\phi = 0.$$

Si consideramos a ϕ como la multiplicación de dos funciones, $\phi = \Sigma(s)\Phi(\varphi)$, entonces,

$$\Phi(\varphi)s\partial_s(s\partial_s\Sigma(s)) + \Sigma(s)\partial^2_\varphi\Phi(\varphi) = 0,$$

dividiendo la ecuación por ϕ,

$$\frac{1}{\Sigma}s\partial_s(s\partial_s\Sigma) + \frac{1}{\Phi}\partial^2_\varphi\Phi = 0.$$

Teniendo en un término una función de s y en otro término una función de φ, necesariamente deben ser constantes para mantener la igualdad, esto las separa en dos ecuaciones de derivadas totales:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} &= -m^2\Phi,\\ s\frac{d}{ds}(s\frac{d}{ds}\Sigma) &= -m^2\Sigma.\end{aligned}$$

Para la primera, la solución corresponde a la misma del oscilador armónico. Las soluciones están dadas por

$$\Phi = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi.$$

Debido a que las soluciones deben ser periódicas en φ, i.e., $\phi(s,\varphi) = \phi(s,\varphi+2\pi)$, m sólo puede tomar valores enteros.

Para la ecuación radial, la solución es de la forma

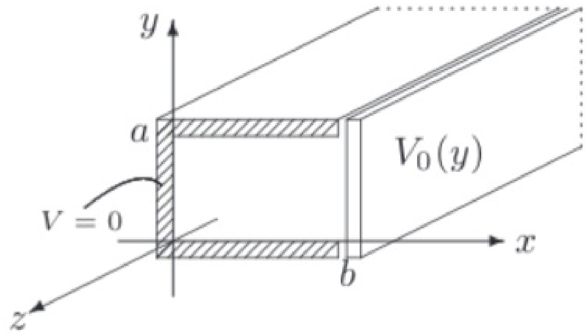
$$\Sigma(s) = Cs^m + Ds^{-m}.$$

Cabe mencionar que para $m = 0$ $\log s$ es también solución, pero como esta diverge para $s \to \infty$ no la consideramos. Por lo tanto,

$$\phi(s,\varphi) = \sum_m (C_m s^m + D_m s^{-m})(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi).$$

Otra vez, como para $s \to \infty$ el potencial debe anularse, lleva a que para $C_m = 0$. Por lo tanto, absorbiendo D_m en A_m y B_m,

$$\phi(s,\varphi) = \sum_m s^{-m}(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi).$$



h

Figura 1: Diagrama Laplace

Al evaluarla en $s = R$ queda una serie de Fourier ,

$$\phi(s = R, \varphi) = V_0 \cos\varphi = \sum_m R^{-m}(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$

Aquí podemos ver, dado que las funciones trigonométricas son ortogonales entre ellas, que la única manera en que el miembro izquierdo de la ecuación sea igual al derecho es cuando $m = 1$ y ademas que $B_m = 0$. Lo que queda nos lleva a que la constante A_1 es

$$A_1 = RV_0$$

Finalmente,

$$\phi(s, \varphi) = \frac{RV_0 \cos\varphi}{s}$$

2. (a) Encontrar el potencial eléctrico $\phi(x, y)$ de la solución de la ecuación de Laplace para el volumen dentro de un tubo de sección rectangular, infinito alineado con el eje z, cuyas cuatro paredes se mantienen a potencial constante (ver figura). Las caras $x = 0, y = 0$ y $y = a$ están conectadas a tierra ($\phi = 0$) mientras que la cara $x = b$ se pone a potencial $\phi = V_0$.

Lo primero que tenemos que notar es que en la coordenada z el tubo es infinito, por lo cual sin importar en que posición de z tomemos obtendremos el mismo comportamiento. Esto nos lleva a que el problema se reduce a un problema en dos dimensiones, por lo cual nos queda la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas.

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Una vez con esto comencemos estableciendo las condiciones de frontera:

$$\left.\begin{array}{r} \phi(x = 0) = 0 \\ \phi(x = b) = V_0 \\ \phi(y = 0) = 0 \\ \phi(y = a) = 0 \end{array}\right\}$$

Ahora para resolver la ecuación de Laplace usaremos el método usal de separación de variables. Proponemos $\phi = X(x)Y(y)$.

$$0 = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial y^2} = X''Y + Y''X$$

Dividimos entre XY

$$0 = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$$

Aquí notamos que la única forma que la suma de dos funciones de variables independientes sea igual a cero es que ambas sean constantes. Aquí nosotros podemos escoger el signo de cada una, lo cual nos determinará si la solución son funciones trigonometricas o funciones exponenciales. En este caso, dado que tenemos una condición de frontera no nula sobre X es conveniente que la constante positiva este sobre X.

Entonces hacemos que se cumpla la ecuación de Laplace de la siguiente

$$\frac{X''}{X} = \alpha^2 \qquad\qquad \frac{Y''}{Y} = -\alpha^2$$

Una vez dicho esto obtenemos que las soluciones son:

$$Y(y) = A\text{sen}(\alpha y) + B\cos(\alpha y) \tag{1}$$

y

$$X(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} \tag{2}$$

Utilizaremos las condiciones de frontera sobre la ecuación 1 para encontrar las constantes y α. Primero tomemos que cuando y=0 entonces el potencial es nulo.

$$0 = A\text{sen}(\alpha 0) + B\cos(\alpha 0) = 0 + B$$

De aquí tenemos que $B = 0$ y que A es una variable libre. Ahora usemos que cuando $y = a$ el potencial tambien es cero.

$$0 = A\text{sen}(\alpha a)$$

Si ignoramos la solución trivial de que $A = 0$, entonces tenemos que pedir que $\alpha a = n\pi$ con n un entero. De aquí se obtiene que $\alpha = \frac{n\pi}{a}$

Entonces nuestra solución queda hasta ahora:

$$Y(y) = Asin(\frac{n\pi}{a}y) \tag{3}$$

Ahora continuemos trabajando con la ecuación 2. En $x = 0$ el potencial es 0, de aquí tenemos:

$$0 = Ce^0 + De^{-0} = C + D$$

De aqui se deduce que $C = -D$. Con esto la solución se nos trasnforma en:

$$X(x) = C(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) = C(2\text{senh}(\alpha x)) = 2Crmsenh(\frac{n\pi}{a}x)$$

Con esto la solución general nos quedama como la suma de todos los valores posibles que puede tomar n, por lo cual

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n C_n \text{senh}(\frac{n\pi}{a}x)\text{sin}(\frac{n\pi}{a}y)$$

donde si nombramos $K_n = 2A_n C_n$ nos queda que:

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \text{senh}(\frac{n\pi}{a}x)\text{sen}(\frac{n\pi}{a}y)$$

Ahora, sin perdida de generalidad tenemos que si tomamos un elemento cualquiera de la suma y obtenemos la constante K_n está será valida para cualquier n. Aquí basados en la propiedad de ortogonalidad de las funciones trigonométricas y usando la condición de frontera en $x = b$, multiplicamos $\phi(x = b, y) = V_0$ por $sin(\frac{n'\pi}{a}y)$ e integramos de 0 a a respecto a y. Esto nos queda:

$$V_0 \int_0^a \text{sen}(\frac{n'\pi}{a}y)dy = K_n \text{senh}(\frac{n\pi}{a}b) \int_0^a \text{sen}(\frac{n\pi}{a}y)\text{sen}(\frac{n'\pi}{a}y)dy$$

Donde notamos que $\int_0^a \text{sen}(\frac{n\pi}{a}y)\text{sen}(\frac{n'\pi}{a}y)dy = \frac{a}{2}\delta_{n,n'}$ y que

$$\int_0^a \text{sen}(\frac{n'\pi}{a}y)dy = -\frac{a}{n'\pi}\cos(\frac{n'\pi}{a}y)|_0^a = -\frac{a}{n'\pi}(\cos(n'\pi) - \cos(0)) = -\frac{a}{n'\pi}((-1)^{n'} - 1)$$

de aquí se deduce que n' es impar para evitar soluciones triviales. Por lo cual, finalmente nos queda que $\int_0^a \text{sen}(\frac{n'\pi}{a}y)dy = 2\frac{a}{n'\pi}$. Con esto simplemente nos queda que,

$$V_0 2\frac{a}{n'\pi} = K_n \text{senh}(\frac{n\pi}{a}b)\frac{a}{2}\delta_{n,n'} = K_{n'}\text{senh}(\frac{n'\pi b}{a})\frac{a}{2}$$

De donde concluimos que

$$K_{n'} = \frac{4V_0}{n'\pi \text{senh}(\frac{n'\pi b}{a})}$$

Y que como n' es una variable muda, podemos regresarla a ser n mientras se mantenga impar. Con esto finalmente la solución nos queda:

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1(impar)}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi \text{senh}(\frac{n\pi b}{a})} \text{senh}(\frac{n\pi}{a}x)\text{sen}(\frac{n\pi}{a}y)$$

(b) A partir de la solución encontrar la densidad superficial de carga en las 4 caras usando el hecho de que en la superficie de un conductor el campo eléctrico es normal y vale $E_n = 4\pi k\sigma$.

Para cada cara del tubo tendremos distintos vectores normales. Para la cara en $x = 0$ el vector normal es $-\hat{x}$ y en $x = b$ es $\hat{x}$, para el caso de $y = 0$ es $-\hat{y}$ y en $y = a$ es $\hat{y}$.

Luego sabemos que $\nabla\phi = -\vec{E}$, pero para esto solo deberemos considerar la dirrección normal, es decir, para x solo nos interesa la derivada en x y para y solo en y.

Al derivar el resultado para ϕ:

$$\begin{aligned}
\pm 4\pi k\sigma &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{4V_0}{n\pi \mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\mathrm{senh}(\frac{n\pi}{a}x)\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}y) \\
&= \sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{4V_0}{a\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\cosh(\frac{n\pi}{a}x)\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}y) \qquad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pm 4\pi k\sigma &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{4V_0}{n\pi \mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\mathrm{senh}(\frac{n\pi}{a}x)\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}y) \\
&= \sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{-4V_0}{a\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\mathrm{senh}(\frac{n\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{a}y) \qquad (5)
\end{aligned}$$

Entonces la solución nos queda para las caras en x:
$x = 0$

$$\sigma_x = \frac{1}{4\pi k}\sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{4V_0}{a\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}cosh(\frac{n\pi}{a}0)\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}y) = \sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{V_0}{a\pi k\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}y)$$

$x = b$

$$\sigma_x = -\frac{1}{4\pi k}\sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{4V_0}{a\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\cosh(\frac{n\pi}{a}b)\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}y) = -\sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{V_0}{a\pi k\tanh(\frac{n\pi b}{a})}\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}y)$$

Y para las caras en y:
$y = 0$

$$\sigma_y = -\frac{1}{4\pi k}\sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{-4V_0 a}{\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\mathrm{senh}(\frac{n\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{a}0) = \sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{V_0}{k\pi a\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\mathrm{senh}(\frac{n\pi}{a}x)$$

$y = a$

$$\sigma_y = \frac{1}{4\pi k}\sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{-4V_0 a}{\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\mathrm{senh}(\frac{n\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{a}a) = \sum_{n=1(impar)}^{\infty}\frac{V_0}{k\pi a\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\mathrm{senh}(\frac{n\pi}{a}x)$$

3. Como el problema tiene simetría azimutal usamos la solución de la ecuación de Laplace en términos de la expansión general en polinomios de Legendre,

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}] P_\ell(\cos\,\theta) \tag{6}$$

Fuera de la esfera, $r > a$, el potencial debe cumplir que

$$\Phi(r \to \infty) \to 0.$$

Consecuentemente hay que tomar $A_\ell = 0$ y el potencial se reduce a,

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\,\theta) \tag{7}$$

Los coeficientes están dados por la expresión,

$$B_\ell = \frac{2\ell+1}{2} a^{\ell+1} \int_0^\pi \Phi(r=a,\theta)\; P_\ell(\cos\,\theta)\text{ sen }\theta\; d\theta \tag{8}$$

de acuerdo a la relación de ortogonalidad de los polinomios de Legendre. En este caso

$$\Phi(r=a,\theta) = \begin{cases} V_0, & \text{en } 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \text{en } \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

Así que la ecuación 8 se convierte en,

$$B_\ell = \frac{2\ell+1}{2} a^{\ell+1} V_0 \int_0^{\pi/2} P_\ell(\cos\,\theta)\text{ sen }\theta d\theta, \tag{9}$$

La integral se encuentra que es

$$\int_0^{\pi/2} P_\ell(\cos\theta)\text{sen}\theta d\theta = \int_0^1 P_\ell(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{para } \ell \text{ par} \\ 1 & \text{para } \ell = 0 \\ \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(n+1)}\binom{2n}{n} & \text{para } \ell = 2n+1 \text{ impar} \end{cases} \tag{10}$$

donde $\binom{2n}{n}$ es el coeficiente binomial.

El potencial fuera de la esfera es:

$$\Phi(r,\theta) = \frac{aV_0}{2}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(2n+1)+1)(-1)^n a^{2n+1}}{2^{2n+1}(n+1)} \binom{2n}{n} \frac{P_{2n+1}(\cos\theta)}{r^{2n+2}}\right). \tag{11}$$

4. Se tiene que encontrar la solución de la ecuación de Lapalce $\nabla^2\phi = 0$ en coordenadas cartesianas en dos dimensiones. Podemos usar el método del teorema del valor medio que dice

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S \phi(x',y')da'$$

donde S es una superficie esférica de radio R centrada en (x,y). Cuando se va a resolver numéricamente el problema se discretiza el espacio x, y y la función potencial toma valores sobre la malla discretizada $\phi(x_i, y_j) \equiv \phi_{i,j}$. Entonces el promedio representado por la integral sobre S se convierte en un promedio sobre los 8 puntos que rodean al punto (x_i, y_j), es decir

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{8}(\phi_{i-1,j-1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{1+1,j+1}). \quad (1)$$

Este algoritmo se aplica a cada punto que no sea parte de la frontera rectangular partiendo de una condición inicial arbitraria. Para la frontera se fija la condición dada que es: en los bordes $x = 0$ y $x = a$, $\phi = 0$ y en los bordes $y = 0$ y $y = a$, $\phi = 10$. Específicamente, en términos de las coordenadas de la malla (x_m, y_n),

$$\phi(m = 1, n) = 0, \quad \phi(m = m_{max}, n) = 0, \quad \phi(m, n = 1) = 10, \quad \phi(m, n = n_{max}) = 10$$

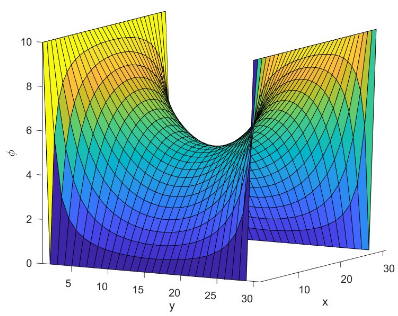
Como condicion inicial se toma $\phi = 0$ en el interior del rectángulo. El método consiste en aplicar el promedio (1) partiendo de esta condición y repetirlo iterativamente hasta que los valores $\phi_{i,j}$ ya prácticamente no cambien.

Por ejemplo, para $m_{max} = n_{max} = 30$ la implementación en Matlab sería:

```
fi=zeros(30,30);
fi1=zeros(30,30);
% boundary conditions
fi(1,:)=0;
fi(30,:)=0;
fi(:,1)=10;
fi(:,30)=10;
dif=1;
while dif>0.001
   for i=2:29
      for j=2:29

fi1(i,j)=(fi(i-1,j)+fi(i+1,j)+fi(i,j-1)+fi(i,j+1)+fi(i+1,j+1)+fi(i-1,j-1)
              +fi(i-1,j+1)+fi(i+1,j-1))/8;
      end
   end
   fi1(1,:)=fi(1,:);
   fi1(30,:)=fi(30,:);
   fi1(:,1)=fi(:,1);
   fi1(:,30)=fi(:,30);
   dif=norm(fi1-fi);
   fi=fi1;
end
surface(fi)
```

El resultado para el potencial cuando ya converge se representa en la gráfica



10
8
6
4
2
0
ϕ
5
10
15
20
25
30
y
10
20
30
x