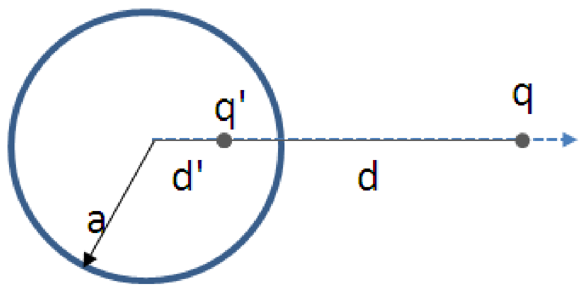
Electromagnetismo II

Soluciones a la Tarea 4

1.

La función de Green para una esfera de radio a se obtiene a partir del potencial de una carga puntual de magnitud uno en presencia de una esfera conectada a tierra (potencial cero) Si la carga está en $r > a$ se tiene la función de Green para el exterior de la esfera y si está en $r < a$ se tien para el exterior. Así se obtiene la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ correspondiente a condiciones de Dirichlet, que satisfce $G(r, r' = a) = 0$ en la frontera de la esfera. Recordemos que en la expresión $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, la variable $\mathbf{r}'$ se refiere a la localización P' de la fuentes de carga y $\mathbf{r}$ al punto P en el que se evalúa el potencial.



Usaremos el método de imágenes para obtener el potencial de una carga de magnitud unitaria frente a una esfera conductora, ya que para este problema,

$$\Phi(r = a) = 0. \tag{1}$$

Colocamos una carga virtual q' a una distancia d'. Para que se cumpla la condición 1, se requiere que

$$q' = -\frac{a}{d}q, \qquad \text{y} \qquad d' = \frac{a^2}{d}. \tag{2}$$

Para la región externa $r > a$, la posición de la carga real es $r' = d$, y la función de Green está dada por ($q = 1$),

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \ \cos \ \alpha)^{1/2}} - \frac{a/r'}{(r^2 + a^4/r'^2 - 2ra^2/r' \ \cos \ \alpha)^{1/2}} \tag{3}$$

donde α es el ángulo entre los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$, es decir,

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \theta' + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' \cos (\varphi - \varphi') \tag{4}$$

Para la región interna $r < a$, la posición de la carga real q es $r' = d'$, y la carga imagen es $q' = -qd/a = -qa/r'$ colocada en $d = a^2/d' = a^2/r'$. Entonces la función de Green resulta tener la misma forma,

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \ \cos \ \alpha)^{1/2}} - \frac{a/r'}{(r^2 + a^2/r'^2 - 2ra^2/r' \ \cos \ \alpha)^{1/2}} \tag{5}$$

Usamos la solución general para la ecuación de Poisson con valores dados del potencial sobre la superficie frontera,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \ d\mathbf{r}' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G}{\partial n'} \ da', \tag{6}$$

la cual se reduce al cálculo de la integral de superficie puesto que $\rho(r) = 0$. La coordenada normal a la superficie S es $+r$ para la región interna y $-r$ para la región externa. Por lo tanto,

$$\frac{\partial G}{\partial n'}\Big|_S = \pm\frac{\partial G}{\partial r'}\Big|_S = \mp\left[\frac{r \ \cos \alpha - r'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \ \cos \alpha)^{3/2}} - \frac{r\cos \alpha - r^2 r'/a^2}{(r^2 r'^2/a^2 + a^2 - 2rr'\cos \alpha)^{3/2}}\right]_{r'=a}$$
$$= \pm\frac{r^2/a - a}{(r^2 + a^2 - 2ra\cos \alpha)^{3/2}} \tag{7}$$

donde el signo superior es para $r < a$ y el inferior para $r > a$. Siendo que $da' = a^2\text{sen } \theta' \ d\theta' \ d\varphi'$, se obtiene

$$\Phi(\mathbf{r}) = \pm\frac{\Phi_0 a^3}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' \frac{(r^2/a^2 - 1)}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos \alpha)^{3/2}}\cos 3\theta'\text{sen}\theta' \tag{8}$$

la cual es una expresión que no puede integrarse en forma cerrada.

Sin embargo, es posible proceder más adelante si se expresa la función de Green en términos de una expansión infinita en armónicos esféricos, basada en que su función generatriz es $(r^2 + r'^2 - 2rr' \ \cos \ \alpha)^{-1/2}$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{im}(\theta',\varphi')}{(2l+1)}\left(\frac{r^l_<}{r^{l+1}_>} - \frac{a^{2l+1}}{(rr')^{l+1}}\right), \quad r > a$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{im}(\theta',\varphi')}{(2l+1)}\left(\frac{r^l_<}{r^{l+1}_>} - \frac{(rr')^l}{a^{2l+1}}\right), \quad r < a$$

donde $r_<$ es el menor de r y r', y $r_>$ es el mayor de ellos. De esta manera, la condición de frontera se expresa como

$$\Phi_(r = a) = \Phi_0 \cos 3\theta = \Phi_0(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = \frac{2\sqrt{\pi}\Phi_0}{5}(\frac{8}{\sqrt{7}}Y_{30}(\theta,\varphi) - \sqrt{3}Y_{10}(\theta,\varphi))$$

y se puede aprovechar la ortogonalidad de los armónicos esféricos para hacer las integrales.

Al tomar la derivada para $r > a$, como la normal es $\hat{n}' = -\hat{r}'$, da

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_S = -\left.\frac{\partial G}{\partial r'}\right|_S = -\left[4\pi \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')}{(2l+1)}\left(\frac{lr'^{l-1}}{r^{l+1}} + \frac{(l+1)a^{2l+1}}{r'(rr')^{l+1}}\right)\right]_{r'=a}$$
$$= -4\pi \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\frac{a^{l-1}}{r^{l+1}}$$

Mientras que para $r < a$, la normal es $\hat{n}' = \hat{r}'$ y queda

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_S = \left.\frac{\partial G}{\partial r'}\right|_S = \left[4\pi \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')}{(2l+1)}\left(-(l+1)\frac{r^l}{r'^{l+2}} - \frac{lr^l r'^{l-1}}{a^{2l+1}}\right)\right]_{r'=a}$$
$$= -4\pi \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\frac{r^l}{a^{l+2}}$$

Entonces, al sustituir en (6) para la región $r > a$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 a^2 \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi)\frac{a^{l-1}}{r^{l+1}}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\frac{2}{5}\sqrt{\pi}(\frac{8Y_{30}(\theta',\varphi')}{\sqrt{7}} - \sqrt{3}Y_{10}(\theta',\varphi'))\mathrm{sen}\theta'$$

y usando la propiedad de ortonormalidad

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{1} d(\cos\theta')Y_{lm}(\theta',\varphi')Y^*_{l'm'}(\theta',\varphi') = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

quedan solo dos términos

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_0\frac{a^2}{5}\left(16\sqrt{\frac{\pi}{7}}Y_{30}\frac{a^2}{r^4} - \frac{2}{r^2}\sqrt{3\pi}Y_{10}\right)\\ &= \Phi_0\frac{a^2}{5}\left([20\cos^3\theta - 12\cos\theta]\frac{a^2}{r^4} - 3\cos\theta\frac{1}{r^2}\right), \quad r > a\end{aligned}$$

Finalmente, para la región $r < a$ queda

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 a^2 \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta,\varphi)\frac{r^l}{a^{l+2}}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' Y_{lm}(\theta',\varphi')\frac{2}{5}\sqrt{\pi}(\frac{8Y_{30}(\theta',\varphi')}{\sqrt{7}} - \sqrt{3}Y_{10}(\theta',\varphi'))\mathrm{sen}\theta'$$

que se reduce a

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_0\frac{a^2}{5}\left(16\sqrt{\frac{\pi}{7}}Y_{30}\frac{r^3}{a^5} - \frac{2r}{a^3}\sqrt{3\pi}Y_{10}\right)\\ &= \Phi_0\frac{a^2}{5}\left([20\cos^3\theta - 12\cos\theta]\frac{r^3}{a^5} - 3\cos\theta\frac{r}{a^3}\right), \quad r > a\end{aligned}$$

2.

(a) La definición del momento monopolar está dada por

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}')d\tau',$$

y la del momento dipolar es

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')d\tau'.$$

Si sucede que $Q \neq 0$, entonces mediante un cambio de coordenadas de $\mathbf{r}' \to \mathbf{r}' - \mathbf{a}$, el momento dipolar se reescribirá

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \int (\mathbf{r}' - \mathbf{a})\rho(\mathbf{r}' - \mathbf{a})d\tau' \\ &= \int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}' - \mathbf{a})d\tau' - Q\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Es evidente, que se puede escoger al vector $\mathbf{a}$ de tal manera que $\mathbf{p}'$ se anule. Para que esto ocurra es necesario que se cumpla la condición:

$$\mathbf{a}Q = \int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')d\tau' = \mathbf{p},$$

por lo tanto, $\mathbf{a}$ es llamado el centro de carga de una distribución,

$$\mathbf{a} = \frac{1}{Q}\int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')d\tau' = \frac{\mathbf{p}}{Q}.$$

(b) El momento monopolar de esta distribución se obtiene de sumar directamente todas las cargas de la configuración,

$$-3q - 2q - q + q + 2q + 3q + 4q + 5q = 9q = Q.$$

El momento dipolar se obtiene de la suma pesada de los vectores de las posiciones de las cargas, i.e.,

$$\begin{array}{cccc} & (0, & 0, & 0) \\ & (-2, & 0, & 0) \\ & (-1, & -1, & 0) \\ & (0, & 1, & 0) \\ + & (0, & 2, & 2) \\ & (3, & 3, & 3) \\ & (4, & 0, & 4) \\ & (0, & 0, & 5) \\ = & (4, & 5, & 14) \end{array}$$

Por lo tanto, el momento dipolar es,

$$\mathbf{p} = qa(4, 5, 14).$$

El momento cuadrupolar se define de la siguiente manera,

$$Q_{ij} = \int \left[3r_i'r_j' - r'^2\delta_{ij}\right]\rho(\mathbf{r}')d\tau'.$$

Por ejemplo, el primer elemento se calcula de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \sum_i \left[3(x^{(i)})^2 - (r^{(i)})^2\right] q^{(i)} \\
&= -3qa^2(0) - 2qa^2(3-1) - qa^2(3-2) + qa^2(0-1) \\
&\quad +2qa^2(0-2) + 3qa^2(3-3) + 4qa^2(3-2) + 5qa^2(-1) \\
&= -4qa^2 - qa^2 - qa^2 - 4qa^2 + 4qa^2 - 5qa^2 \\
&= -11qa^2
\end{aligned}$$

Un procedimeinto análogo sigue para los demás términos. Expresado como una matriz, el momento cuadrupolar será finalmente,

$$\mathbf{Q} = qa^2 \begin{pmatrix} -11 & 6 & 21 \\ 6 & -8 & 15 \\ 21 & 15 & 19 \end{pmatrix}.$$

(c) El centro de carga está dado por

$$\mathbf{a} = \frac{1}{Q}\mathbf{p} = \frac{a}{9}\,(4, 5, 14)\,.$$

3. Partiendo de la expansión multipolar para el potencial,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{r^{\ell+1}}\int (r')^\ell P_\ell(\cos\,\theta')\rho(\mathbf{r}')d^3r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{P_\ell(\cos\,\theta)}{r^{\ell+1}}\int_{-a}^{a}(z')^\ell\lambda(z')dz' \tag{9}$$

(a) Sustituyendo la expresión dada $\lambda(z) = \lambda_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)$, para evaluar los momentos multipolares,

$$I_\ell = \int_{-a}^{a} z^\ell \lambda(z)\ dz \tag{10}$$

se obtiene,

$$\begin{aligned}
Q \equiv I_0 = \lambda_0 \int_{-a}^{a} \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\ dz &= \lambda_0 \left[\frac{2\pi}{a}\text{sen}\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{2a\lambda_0}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{4a\lambda_0}{\pi},
\end{aligned} \tag{11}$$

es decir,

$$\Phi(r,\theta) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{4a\lambda_0}{\pi}\right)\frac{1}{r} \quad \text{(Monopolo)} \tag{12}$$

mientras que $p \equiv I_1 = \int_{-a}^{a} z\lambda(z)\ dz = 0$.

(b) De manera similar, para $\lambda = \lambda_0 \sin(\pi z/a)$

$$Q = I_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} p = I_1 = \lambda_0 \int_{-a}^{a} z\text{sen}\left(\frac{\pi z}{a}\right)\ dz &= \lambda_0 \left\{ \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{\pi z}{a}\right) - \frac{a^3}{\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \right\}_{-a}^{a} \\ &= \lambda_0 \left\{ \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 [\text{sen}\pi - \text{sen}(-\pi)] - \frac{a^2}{\pi}\cos\pi - \frac{a^2}{\pi}\cos(-\pi) \right\} = \lambda_0 \frac{2a^2}{\pi} \end{aligned} \tag{13}$$

y el término dominante en el potencial es,

$$\Phi(r,\theta) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2a^2\lambda_0}{\pi}\frac{1}{r^2}\cos\theta\right) \qquad \text{(Dipolo)} \tag{14}$$

4. El campo eléctrico de la carga puntual en el origen es, como es bien sabido,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{r} \tag{15}$$

(a) Dentro de este campo, al colocar un dipolo puntual de momento dipolar $\mathbf{p}$ en la posición $\mathbf{r}$, tendrá una energía $W = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$ la cual se escribe

$$W(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$$

(b) y sentirá una torca dada por $\tau = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$, que es

$$\tau(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{p}\times\mathbf{r}$$

(c) La fuerza que siente está dada por $F = p\cdot\nabla E$ lo que en coordenadas esféricas se convierte en

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{p}\cdot\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\hat{r}}{r^2} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\hat{r}}{r^2} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\hat{r}}{r^2}\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-2\mathbf{p}\cdot\hat{r}\frac{\hat{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\theta}}{r^3}\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} + \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\phi}}{r^3\sin\theta}\frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\right) \end{aligned}$$

Las derivadas del vector unitario $\hat{r}$ son

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \sin\theta\hat{\phi}$$

Así que la fuerza sobre el dipolo se reduce a

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[-2(\mathbf{p}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\mathbf{p}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta} + (\mathbf{p}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi}\right]$$

que también puede escrbirse como

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\mathbf{p} - 3(\mathbf{p}\cdot\hat{r})\hat{r}\right]$$

5.

(a) La esfera tiene polarización $\vec{P} = k\vec{r}$ por lo que la densidad de carga de polarización es: en el volumen $\rho_p = -\nabla\cdot P = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 k r) = -3k$
y en la superficie $\sigma_p = \hat{n}\cdot\vec{P}\Big|_{sup} = \hat{r}\cdot\vec{P}\Big|_{r=a} = ka$

b) El campo eléctrico fuera de la esfera está dado en términos del potencial $\phi(\vec{r}) = \oint_S \frac{\sigma_p}{R}\, da' + \int_V \frac{\rho_p}{R}\, dV' = \sigma_p \oint_S \frac{da'}{|r-r'|} + \rho_p \int_V \frac{dV'}{|r-r'|}$ pues ρ_p y σ_p son constantes

como $\oint_S \frac{da'}{|r-r'|} = \frac{4\pi a^2}{r}$ y $\int_V \frac{dV'}{|r-r'|} = \frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{r}$ para la esfera de radio a

entonces $\vec{E} = -\nabla\phi = -\nabla\left[\frac{4\pi a^2}{r}(ka) + \frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{r}(-3k)\right] = 0$

también puede obtenerse el resultado a partir de la solución de la ecuación de Laplace, pues fuera de la esfera $\rho = 0$.
En coordenadas esféricas la solución para $r > a$ es

$$\phi_{ext}(r) = \sum_n A_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta)$$

que debe cumplir la condición de frontera $E_{\perp ext} - E_{\perp int} = +4\pi\sigma_p$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\phi_{ext}}{\partial r}\Big|_{r=a} - \frac{\partial \phi_{int}}{\partial r}\Big|_{r=a} = -4\pi k a$$

Necesitamos la solución en el interior ϕ_{int}.

Para ello usamos la ley de Gauss para una superficie esférica con $r<a$

$$\oint_S \vec{E}_{int}\cdot d\vec{a} = 4\pi\int_V \rho_p\, dV = 4\pi\,(-3k)\,\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E_{int}\,(4\pi r^2) = -(4\pi)^2 k r^3 \quad \Rightarrow \quad E_{int} = -4\pi k r$$

entonces $\phi_{int} = -\int \vec{E}_{int}\cdot d\vec{r} = 2\pi k r^2$

y la condición de frontera da: $\sum_n A_n(n+1)a^{-n-2}P_n(\cos\theta) + 4\pi k a = 4\pi k a$

Como los dos últimos terminos son iguales, se debe tener que $A_n = 0 \ \forall n$ lo que implica que $\phi_{ext} = 0$ como se había obtenido antes.