Electromagnetismo II

Soluciones a la Tarea # 5

Marzo, 2025

1. Cuando el capacitor está conectado a la batería con potencial $\Delta\phi_0$, la carga de las placas es $Q = C\Delta\phi_0$, donde la capacitancia con vacío entre las placas es $C = \frac{L^2}{4\pi d}$ (unidades gaussianas) y cuando está lleno con dieléctrico es $C = \frac{\epsilon L^2}{4\pi d}$. [En unidades SI $C = \frac{\epsilon L^2}{d} = \frac{\epsilon_0 \kappa_e L^2}{d}$] Al introducir sólo una parte del dieléctrico la capacitancia es,

$$C_x = \frac{L[L + x(\epsilon - 1)]}{4\pi d}$$

donde x es la longitud ocupada por el dieléctrico en la dirección de L (o sea que $L - x$ es la extensión de la región sin dieléctrico). Al mantener $\Delta\phi_0$ constante la carga Q va cambiando y al llegar a la mitad, $x = L/2$ el valor final de la carga es,

$$Q_f = C_x \Delta\phi_0 = \frac{L[L + L/2(\epsilon - 1)]}{4\pi d}\Delta\phi_0 = \frac{L^2(1+\epsilon)}{8\pi d}\Delta\phi_0.$$

Luego la batería se desconecta, con lo que Q_f se mantiene fija, y se introduce todo el dieléctrico; la diferencia de potencial final será,

$$\Delta\phi_f = \frac{Q_f}{C_{x=L}} = \frac{Q_f}{L^2\epsilon/4\pi d} = \frac{1+\epsilon}{2\epsilon}\Delta\phi_0.$$

[En SI es $\Delta\phi_f = \frac{1+\kappa_e}{2\kappa_e}\Delta\phi_0$]

El campo eléctrico final es, $E_f = \frac{\Delta\phi_f}{d} = \frac{1+\epsilon}{2\epsilon d}\Delta\phi_0$

2. (a) Tomando una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud L, la ley de Gauss, para $a < r < c$, en unidades gaussianas da

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = 4\pi Q \quad \rightarrow \quad 2\pi r L D = 4\pi Q$$

y en unidades SI es $2\pi r L D = Q$. Entonces

$$D = \frac{2Q}{rL} \quad \left[= \frac{Q}{2\pi r L},\ \text{en SI}\right]$$

El campo eléctrico en el vacío es $E = D$ [$E = D/\epsilon_0$ en SI] por lo que la diferencia de potencial entre los cilindros es

$$\Delta\phi = \int_a^c E dr = \int_a^c \frac{2Q dr}{rL} = \frac{2Q}{L}\log(c/a) \quad \left[= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\log(c/a),\ \text{en SI}\right]$$

y la capacitancia por unidad de longitud es

$$\frac{C}{L} = \frac{Q/L}{\Delta\phi} = \frac{1}{2\log(c/a)} \quad \left[= \frac{2\pi\epsilon_0}{\log(c/a)},\ \text{en SI}\right]$$

(b)Cuando se tiene un dieléctrico de permeabilidad ϵ en la región $a < r < b$ el campo de desplazamiento eléctrico D sigue siendo el mismo pero el campo E es $E = D/\epsilon$. Así que la diferencia de potencial es

$$\Delta\phi = \int_a^c E dr = \int_a^b \frac{2Qdr}{\epsilon r L} + \int_b^c \frac{2Qdr}{rL} = \frac{2Q}{L}[\frac{1}{\epsilon}\log(b/a) + \log(c/b)]$$

y la capacitancia por unidad de longitud es

$$\frac{C}{L} = \frac{Q/L}{\Delta\phi} = \frac{1}{2(\log(b/a)^{1/\epsilon} + \log(c/b))} = \frac{1}{2\log[(b/a)^{1/\epsilon}(c/b)]}$$

$$\left[= \frac{2\pi\epsilon_0}{\log[(b/a)^{\epsilon_0/\epsilon}(c/b)]},\ \text{en SI}\right]$$

3. Para un gas a 100^o C, $T = 373^o$ K y a presión atmosférica $p = 10^5$ N/m^2, la densidad de partículas es

$$n = \frac{p_{at}}{kT} = \frac{10^5 N/m^2}{(1.38 \times 10^{-23} J)373K} = 2 \times 10^{25} part/m^3$$

El momento dipolar eléctrico de una sol amolécula es

$$p_m = 6.2 \times 10^{-30} C - m$$

La máxima polarización se alcanza cuando todas las moléculas tienen el momento dipolar p_m. Entonces

$$P_{max} = np_m = (2 \times 10^{25} m^{-3})(6.2 \times 10^{-30} C - m) = 1.24 \times 10^{-4} C/m^2.$$

4. La fuerza vertical que experimenta el líquido dieléctrico se debe a que la energía electrostática dentro del capacitor es menor cuando el dieléctrico está adentro que cuando está afuera y por ende la fuerza tiende a empujarlo hacia adentro. En términos de la energía, a fuerza vertical para cuando la carga de las placas se mantien constante es

$$F_z = -\left.\frac{dW}{dz}\right|_Q = -\frac{d}{dz}\int_V \frac{ED}{8\pi} dV$$

y la integral es sobre el volumen entre las placas del capacitor. El campo eléctrico E producido por las placas es el mismo en todo el volumen, lo que cambia es $D = \epsilon E$ en donde hay dieléctrico. Podemos escribir la diferencial del volumen respecto a variaciones de la altura z como $dV = Adz$ donde $A = Ld$ es el área de la superficie del líquido contenida entre las placas. Como el campo eléctrico en el capacitor es constante tenemos

$$F_z = -\frac{E^2}{8\pi}\frac{d}{dz}\int_0^L \epsilon A dz = -\frac{E^2 A}{8\pi}(\epsilon(L) - \epsilon(0))$$

como en la parte alta hay vacío $\epsilon(L) = 1$ y en la parte sumergida $\epsilon(0) = \epsilon$

$$F_z = \frac{E^2 A}{8\pi}(\epsilon - 1)$$

Esta fuerza es contrarrestada por la fuerza de gravedad sobre la masa del fluido que sube

$$F_g = \rho_l g V = \rho_l g A h$$

igualando las fuerzas se llega a que la altura que sube el fluido es

$$h = \frac{E^2}{8\pi}\frac{\epsilon - 1}{\rho_l g} = \frac{2\pi\sigma^2(\epsilon - 1)}{\rho_l g},$$

donde se usó que el campo eléctrico en el capacitor es $E = 4\pi\sigma$. Si se expresa la densidad de carga de las placas como $\sigma = Q/L^2$ se llega finalmente a

$$h = \frac{2\pi Q^2(\epsilon - 1)}{\rho_l g L^4}.$$