

## Electromagnetismo II

### Soluciones a la Tarea # 6

Marzo, 2025

1. El campo magnético de un alambre infinito con corriente  $I$  a lo largo del eje  $z$  es, en unidades gaussianas (las correspondientes expresiones en unidades SI se dan entre paréntesis)

$$\mathbf{B} = \frac{2I}{cr} \hat{\varphi} \quad \left[ = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi} \right]$$

en coordenadas cilíndricas. La partícula cargada se mueve en este campo.

(a) La ecuación de movimiento es

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \left[ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right]$$

al tomar el producto escalar con  $\mathbf{v}$  se tiene

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

así que la energía cinética  $K = mv^2/2$  es constante ya que las fuerzas magnéticas no hacen trabajo.

(b) La fuerza sobre la partícula (fuerza de Lorentz) es,

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \hat{\varphi} \frac{2I}{cr} \quad \left[ = q \mathbf{v} \times \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi cr} \right]$$

Para la velocidad  $\mathbf{v} = v_r \hat{r} + v_\varphi \hat{\varphi} + v_z \hat{z}$  se reduce a

$$\mathbf{F} = \frac{2qI}{c^2 r} (v_r \hat{z} - v_z \hat{r}) \quad \left[ = \frac{\mu_0 q I}{2\pi r} (v_r \hat{z} - v_z \hat{r}) \right]$$

(c) Las ecuaciones de movimiento se separan en las direcciones  $r, \varphi$  y  $z$  aceleración en coordenadas cilíndricas

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \hat{\varphi} + \ddot{z} \hat{z}$$

Y con la fuerza del inciso (b) las tres ecuaciones para cada componente son

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{2qI}{c^2 mr} \dot{z} \quad \left[ = -\frac{\mu_0 q I}{2\pi mr} \dot{z} \right] \quad (1)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{z} = \frac{2qI}{c^2 mr} \dot{r} \quad \left[ = \frac{\mu_0 q I}{2\pi mr} \dot{r} \right] \quad (3)$$

(d) Las ecuaciones se pueden resolver para el caso particular en que la velocidad en dirección  $z$  es constante:  $\dot{z} = v_{z0}$ . En este caso, como  $\ddot{z} = 0$ , la ecuación (3) implica que

$\dot{r} = 0$ , así que el movimiento se da a un radio fijo  $r = R_0$ . Entonces  $\ddot{r} = 0$  y de la ecuación (1) se tiene

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2qI}{c^2 m r^2} \dot{z} = \frac{2qI}{c^2 m R_0^2} v_{z0} \quad \left[ = \frac{\mu_0 q I}{2\pi m R_0^2} v_{z0} \right]$$

así que la velocidad angular de la partícula es constante. Entonces el movimiento es tal que la velocidad es constante

$$\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2qI v_{z0}/m}}{c} \hat{\varphi} + v_{z0} \hat{z}$$

sin componente radial. La trayectoria es una hélice sobre un cilindro de radio  $R_0$ .

2. Se había obtenido en clase que el campo magnético de un alambre recto de longitud finita en un punto cualquiera es

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$$

donde  $z$  es la distancia mínima del punto a la recta y  $\alpha_1, \alpha_2$  son los ángulos entre la normal a la recta y las líneas que unen el punto con los dos extremos de la recta.

(a) Para un cuadrado, el campo en el centro es la suma de las contribuciones de cada lado, por el principio de superposición, y para cada segmento se usa la expresión anterior con  $z = R$  y  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$ , donde cada lado tiene longitud  $2R$ . Así se tiene

$$B(0) = 4 \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi R} 2 \sin(\pi/4) \right) = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi R}$$

y la dirección es perpendicular al plano del cuadrado.

(b) Ahora, para un polígono de  $n$  lados se hace lo mismo pero  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/n$  por lo que el campo es

$$B(0) = n \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \sin(\pi/n) \right)$$

(c) En el límite  $n \rightarrow \infty$  será

$$B_\infty(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin(\pi/n)) \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

como en este límite el ángulo tiende a cero se puede usar que  $\sin x \approx x$  y entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin(\pi/n)) = n \frac{\pi}{n} = \pi$$

Con esto el campo queda

$$B_\infty(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

que es el mismo que el de una espira circular.

3. Para un cilindro infinitamente largo de radio  $a$  hay simetría en las variables  $z$  y  $\varphi$  por lo que el problema solo depende de la variable radial  $s$ . Debido a las simetrías

se puede aplicar la ley de Ampere para calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$ . La densidad de corriente está dada por  $\mathbf{J}(s) = KIs^3\hat{z}$  y se quiere saber cuánto vale  $K$  para que  $I$  sea la corriente total que fluye por el cilindro. Entonces debe cumplirse

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^a J(s)2\pi s ds = 2\pi KI \int_0^a s^4 ds = \frac{2\pi KIa^5}{5}$$

Así que debe tenerse que  $K = 5/2\pi a^5$ .

(a) Ahora, para esta corriente, se usa la ley de Ampere aplicándola a un circuito amperiano circular  $C$  centrado en el eje del cilindro de radio  $s$ . Esto es

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I(s)$$

donde  $I(s)$  es la corriente encerrada dentro del círculo de radio  $s$ . Por la simetría  $\mathbf{B}$  es constante a lo largo del circuito  $C$  y por lo tanto sale de la integral quedando solo la integral sobre la circunferencia que vale  $2\pi s$ . Entonces el campo es

$$B(s) = \frac{\mu_0}{2\pi s} I(s).$$

Para el interior del cilindro ( $s < a$ )

$$I(s) = \int_0^s J(s)2\pi s ds = 2\pi KI \int_0^s s^4 ds = I \frac{s^5}{a^5}$$

mientras que para el exterior ( $s > a$ ) la corriente encerrada es siempre  $I$ . Entonces

$$\mathbf{B}(s) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I s^4}{2\pi a^5} \hat{\varphi}, & s < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\varphi}, & s > a \end{cases}$$

(b) Como se tiene una conductividad  $\sigma = 2 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$  el campo eléctrico axial que produce la corriente está dado por la ley de Ohm  $J = \sigma E$  y a su vez se tiene que la densidad de corriente es  $J = 5Is^3/2\pi a^5$  así que el campo eléctrico para una corriente de  $I = 1 \text{ kA} = 10^3 \text{ A}$  en  $s = a = 10 \text{ cm}$  es

$$E(r = a) = \frac{J(r = a)}{\sigma} = \frac{5I}{2\pi a^2 \sigma} = \frac{5 \times 10^3 A}{2\pi (0.1m)^2 2 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}} = 4 \times 10^{-3} V/m$$

Por otro lado, el valor del campo magnético obtenido arriba en el borde del cilindro es

$$B(r = a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{4\pi 10^{-7} Tm/A 10^3 A}{2\pi 0.1m} = 2 \times 10^{-3} T = 20 \text{ Gauss}$$

4. El campo de un dipolo magnético colocado en el origen de coordenadas,  $\mathbf{m}_2$ , en un punto  $\mathbf{r}$  del espacio es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{m}_2}{r^3}$$

(a) así que la torca que siente un dipolo  $m_1$  debida a este campo, que es  $\tau = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{B}$ , cuando está a una distancia  $\mathbf{r}$  de  $\mathbf{m}_2$  es

$$\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{r})\mathbf{m}_1 \times \hat{r} - \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2}{r^3}$$

(b) Para dos dipolos perpendiculares el primer término es cero y en el segundo  $|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2| = m_1 m_2$  así que para una separación de  $1 \text{ \AA}$  y  $m_1 = m_2 = 1$  magnetón de Bohr,

$$|\tau|_m = (\mu_0/4\pi)(eh/4\pi m_e)^2/(10^{-10}m)^3 = 8.6 \times 10^{-24} Nm$$

Por otro lado, para dos dipolos eléctricos  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  la torca es similar, dada por

$$\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{r})\mathbf{p}_1 \times \hat{r} - \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2}{r^3}$$

y su magnitud para  $p_1 = p_2 = e \times 0.1 \text{ \AA}$  será,

$$|\tau|_e = (1/4\pi\epsilon_0)(e10^{-11}m)^2/(10^{-10}m)^3 = 2.3 \times 10^{-20} Nm$$

que es 4 ordenes de magnitud mayor que la magnética.