ELECTROMAGNETISMO II

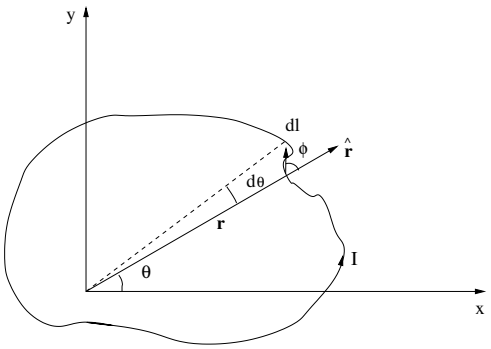
Soluciones a la Tarea # 7

abril de 2025

1.- (a) Para un circuito plano la ley de Biot-Savart da

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c}\oint_C \frac{d\vec{l'} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

El punto donde se calcula el campo se toma como el origen de coordenadas así que el vector que define a la curva C es el corresponde a $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ según se ve en la figura



Llamando $\mathbf{r}$ a este vector se tiene la equivalencia $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \to -\mathbf{r}$; y llamando φ al ángulo entre $\mathbf{r}$ y $d\vec{l}$, se tiene que $\hat{r} \times d\vec{l} = \hat{n} dl \sin\varphi$, donde $\hat{n}$ es un vector unitario normal al plano del circuito. Por lo tanto

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{I}{c}\oint_C \frac{-d\vec{l'} \times \hat{r}}{r^2} = \hat{n}\frac{I}{c}\oint_C \frac{\sin\varphi dl}{r^2}$$

pero de la figura se puede ver que el elemento de arco diferencial $rd\theta$ en la curva es $rd\theta = \sin\varphi dl$. Así que finalmente la magnitud del campo queda

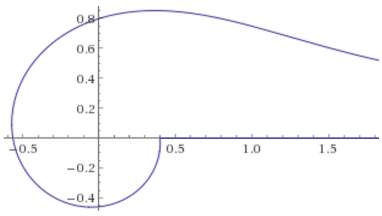
$$B(0) = \frac{I}{c}\oint \frac{d\theta}{r},$$

para la curva descrita por $r(\theta)$.

(b) Se puede aplicar esta ecuación para obtener el campo de una espira circular en su centro. En este caso $r(\theta) = R$ con radio constante R. La integral se reduce simplemente a $\oint d\theta = 2\pi$, y queda

$$B(0) = \frac{I}{cR}\oint d\theta = \frac{2\pi I}{cR}.$$

Esto coincide con el valor conocido cuando $z = 0$.



(c) La espiral de lituus $r(\theta) = a/\sqrt{\theta}$ es una curva que tiende a infinito cuando $\theta \to 0$ y tiene el valor $r = 0.399a$ en $\theta = 2\pi$. Su forma se muestra en la figura siguiente para $a = 1$:

Como se ve, es una curva abierta pero puede cerrarse en infinito con una recta a lo largo del eje horizontal (x), como se muestra, y con esto se tiene un circuito al cual se le aplica la fórmula de la parte (a). Como la recta agregada tiene $\theta = 0$ entonces $d\theta = 0$ y no contribuye a la integral. Por lo tanto se tiene

$$B(0) = \frac{I}{ca}\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta} d\theta = \frac{2I}{3ca}(2\pi)^{3/2}.$$

(d) Ahora, para una cónica con foco en el origen

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

que corresponde a una elipse si la excentricidad $e < 1$, una parábola si $e = 1$, a una hipérbola si $e > 1$ y a un círculo si $e = 0$, el campo en el foco sería

$$B = \frac{I}{cp}\int_0^{2\pi} (1 + e\cos\theta) d\theta = \frac{2\pi I}{cp}$$

pues la integral del coseno es cero. Se ve que no depende de la excentricidad lo que indica que no importa de que tipo de cónica se trate, el campo es siempre el mismo en el foco.

2.- (a) Para el solenoide, dado que sólo nos dan las corrientes libres, podemos calcular directamente $\mathbf{H}$ por ley de Ampère, esto lleva a que

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} nI\hat{\mathbf{z}}.$$

Por la relación constitutiva, sabemos que $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, por lo tanto,

$$\mathbf{M} = \frac{4\pi}{c}\chi_m nI\hat{\mathbf{z}}.$$

El campo magnético, $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = (1 + 4\pi\chi_m)\mathbf{H}$,

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(1 + 4\pi\chi_m) nI\hat{\mathbf{z}}.$$

(b) Las corrientes inducidas en el material están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_m &= \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}, \\ \mathbf{J}_m &= \nabla \times \mathbf{M}. \end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{M}$ es constante directamente podemos deducir que $\mathbf{J}_m = 0$; para la corriente sobre la superficie tenemos que

$$\mathbf{K}_m = \frac{4\pi}{c}\chi_m n I \hat{\phi}.$$

Si el medio es paramagnético, entonces $\chi_M > 0$, por lo tanto la magnetización es paralela al campo de inducción y el campo magnético aumenta de intensidad conforme más suceptible es. Si el medio es diamagnético, entonces $\chi_M < 0$, la magnetización irá en contra del campo generado por el solenoide y asimismo $\mathbf{B}$ disminuirá y hasta podría anularse (como en un superconductor).

3.- (a) La fuerza eléctrica ente las cargas q de los dipolos separados una distancia d es

$$F_E = \frac{q^2}{d^2}$$

La fuerza magnética ente dipolos magnéticos m paralelos y alineados sobre su eje y separados la misma distancia d es

$$F_B = m\frac{d}{dz}B_z = m\frac{d}{dz}\frac{2m}{z^3} = -\frac{6m^2}{z^4}|_{z=d}$$

Una es atractiva otra repulsiva. Igualando las magnitudes se $F_E = F_B$ se obtiene la separación de equilibrio.

$$d = \frac{\sqrt{6}m}{q} \qquad [d = \frac{\sqrt{6}m}{qc} \text{ en SI}].$$

(b) Para dos electrones, cada uno tiene carga $q = e = 4.8 \times 10^{-10}$ statcoulomb y $m = 9.2848 \times 10^{-21}$ erg/G. Al sustituir queda $d = 4.73 \times 10^{-11}$ cm.

(c) Para que pueda haber un estado ligado estable la separación tiene que ser mayor que la longitud de onda de Compton del electrón $\lambda_C = h/mc = 2.426 \times 10^{-10}$ cm, pues por debajo de ella las posiciones de los electrones no están bien definidas. Para este caso $d < \lambda_C$ por lo que no es posible tener el estado ligado.

4.- Como no hay corrientes libres, se puede usar el potencial escalar magnético ϕ_m que satisface la ecuación de Laplace. El campo $\mathbf{H}$ queda dado por $\mathbf{H} = -\nabla\phi_m$. En coordenadas esféricas con simetría en φ, la solución general es del tipo

$$\phi_m = \sum_\ell (a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-\ell-1}) P_\ell(\cos\theta)$$

Pero como en infinito el campo es uniforme en dirección z el potencial debe ser $\phi_m = -H_0 r\cos\theta$ que corresponde al $P_1(\cos\theta)$. Por lo tanto solo los términos con $\ell = 1$ permanecen.

El potencial en las 3 regiones se denotan por 1 en $r > b$ por 2 en $a < r < b$ y por 3 en $r < a$. En 3 no puede haber un término inverso en r por lo que sólo es,

$$\phi_{m3} = a_3 r \cos\theta$$

En 1, para que se datisfaga la condición en infinito,

$$\phi_{m1} = -H_0 r \cos\theta + \frac{b_1}{r^2}\cos\theta$$

mientras que en 2 se conservan los 2 términos indeterminados,

$$\phi_{m2} = a_2 r \cos\theta + \frac{b_2}{r^2}\cos\theta.$$

Las condiciones de frontera $B_{n1}(r = a) = B_{n2}(r = a)$, $B_{n3}(r = b) = B_{n2}(r = b)$ y $\phi_{m1}(r = a) = \phi_{m2}(r = a)$, $\phi_{m3}(r = b) = \phi_{m2}(r = b)$ dan las relaciones,

$$-\mu_0 H_0 - \mu_0 \frac{2b_1}{b^3} = \mu(a_2 - \frac{2b_2}{b^3}), \quad -bH_0 + \frac{b_1}{b^2} = ba_2 + \frac{b_2}{b^2}$$

$$\mu(a_2 - \frac{2b_2}{a^3}) = \mu_0 a_3, \quad aa_2 + \frac{b_2}{a^2} = aa_3$$

Se pueden resolver para encontrar las 4 constantes,

$$a_3 = \frac{3H_0\mu_0\mu}{(2\mu+\mu_0)(\mu-2\mu_0) - 2(\mu^2-\mu_0^2)a^3/b^3}$$

$$b_2 = \frac{H_0\mu_0 a^3(\mu-\mu_0)}{(2\mu+\mu_0)(\mu-2\mu_0) - 2(\mu^2-\mu_0^2)a^3/b^3}$$

$$a_2 = \frac{H_0\mu_0(2\mu+\mu_0)}{(2\mu+\mu_0)(\mu-2\mu_0) - 2(\mu^2-\mu_0^2)a^3/b^3}$$

$$b_1 = \frac{H_0(2\mu+\mu_0)(\mu-\mu_0)(b^3-a^3)}{(2\mu+\mu_0)(\mu-2\mu_0) - 2(\mu^2-\mu_0^2)a^3/b^3}$$

lo que da el campo H en todo el espacio.