ELECTROMAGNETISMO II

Soluciones a la Tarea # 8

abril de 2025

1.- El campo magnético del alambre recto con corriente I es $B = 2I/cr$. Como la espira circuar está dada por la ecuación $z^2 = a^2 - (r-d)^2$, el flujo magnético a través de la espira está dado por

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_{d-a}^{d+a} \int_{-\sqrt{a^2-(r-d)^2}}^{\sqrt{a^2-(r-d)^2}} \frac{2I}{cr} dz dr = \frac{4I}{c} \int_{d-a}^{d+a} \frac{\sqrt{a^2-(r-d)^2}}{r} dr$$

Si denotamos esta integral como $\mathcal{I}(d)$ pues es función de la distancia al alambre d, tenemos que el flujo es $\Phi_B = 4I\mathcal{I}(d)/c$.

Al moverse la espira alejándose del alambre d cambia en el tiempo y la velocidad de la espira es $v = d(d)/dt$ la FEM inducida será

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{4I\mathcal{I}'}{c^2} v$$

Si la corriente del alambre es en dirección z positiva entonces la corriente induciida en la espira es en dirección horaria, que es la que se opone a la causa según la ley de Lenz.

Aunque $\mathcal{I}$ no es fácil de calcular se puede hacer (con Mathematica por ejemplo) y se obtiene $\mathcal{I}(d) = \pi(d - \sqrt{d^2 - a^2})$. Por lo tanto

$$\mathcal{E} = -\frac{4\pi I v}{c^2}\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2-a^2}}\right).$$

2.- (a) Si se hace la aproximación de que el campo eléctrico entre los electrodos es uniforme, la ley de Ohm $J = \sigma E$ indica que también la densidad de corriente es uniforme, así que la corriente total entre los electrodos será

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{a} = Jhl = \sigma E hl$$

Para campo E uniforme el voltaje entre los electrodos separados una distancia a es $V = Ea$, lo que da $V = (a/\sigma hl)I$. Como la resistencia es $R = V/I$ se obtiene

$$R = \frac{a}{\sigma hl}$$

(b) Como el fluido se mueve a velocidad v se induce una FEM de movimiento $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ entre lso electrodos que es

$$\mathcal{E} = \int_0^a \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{bB_d a}{c}$$

(c) Al conectar los electrodos por un alambre sin resistencia la única resistencia presente es la del líquido así que la corriente que circulará será

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\sigma h l v B_d}{c}$$

(d) Los valores numéricos de estas cantidades para $\sigma = 4/\Omega m, B_d = 5.5 \times 10^{-5} T, a = 5m, l = h = 0.5m$ son

$$R = 5\Omega, \quad \mathcal{E} = 82.5V, \quad I = 16.5A$$

3.- Primero se calcula el campo magnético producido por las N espiras que forman el toro cada una con corriente I. Se usa un circuito Amperiano que es el perímetro de un disco horizontal centrado en el eje del toro, de radio s. Entonces la ley de Ampere da

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi s = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 N I, \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s} \hat{\varphi}$$

esto es para puntos dentro de toro. Para el exterior del toro es cero pues C no encierra ninguna corriente neta. Entonces, el flujo magnético a través de la superficie vertical de una espira (que corta al toro) es

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\vec{a} = \int \frac{\mu_0 N I}{2\pi s} d\theta \rho d\rho$$

Aquí ρ y θ son las coordenadas polares centradas en el centro del círculo de la espira, la distancia desde el eje del toro se relaciona con las coordenadas ρ y θ por $s = b + \rho \cos\theta$. Como el toro consta de N espiras el flujo total es N veces el flujo de una espira

$$\Phi_B = N \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\mu_0 N I}{2\pi(b + \rho\cos\theta)} \rho d\rho d\theta = \mu_0 N^2 I \int_0^a \frac{\rho d\rho}{(b^2 - \rho^2)^{1/2}}$$

Con el cambio de variable $x = b^2 + \rho^2$ se tiene

$$\Phi_B = \mu_0 N^2 I \int_{b^2 - a^2}^{b^2} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \mu_0 N^2 I (b - \sqrt{b^2 - a^2})$$

(a) La autoinductancia L se define por $\Phi_B = LI$, por lo que está dada por

$$L = \mu_0 N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

(b) La energía magnética es $W_B = \frac{1}{2} L I^2$ así que queda

$$W_B = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2}) I^2.$$

4.- Primero calculamos la fuerza usando la fuerza de Lorentz. Para el campo magnético del alambre conduciendo una correinte I_a, $B = 2I_a/cr$ la fuerza de Lorentz sobre una sección de la espira llevando una corriente I_e es

$$\mathbf{F} = \frac{I_e}{c} \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Es calro que los dos lados de la espira que son perpendiculares al alambre van a producir fuerzas iguales y opuestas por lo que se van a cancelar. Así que sólo los dos lados paralelos al alambre contribuirán a la fuerza. El que está a una distancia d, cuya longitud es b siente la fuerza

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{2I_a I_e b}{c^2 d}\hat{r}$$

mientras que el que está a una distancia $d+a$ siente la fuerza

$$\mathbf{F}_2 = \frac{2I_a I_e b}{c^2 (d+a)}\hat{r}$$

así que la fuerza total es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{2I_a I_e b}{c^2}\hat{r}\left(\frac{1}{d+a} - \frac{1}{d}\right) = -\hat{r}\frac{2I_a I_e ba}{c^2 d(d+a)}$$

Ahora, usando el otro método para calcular la fuerza, primero se obtiene la energía magnética del sistema (en unidades gaussianas)

$$W_m = \frac{1}{2c}L_a I_a + \frac{1}{c}M I_a I_e + \frac{1}{2c}L_e I_e$$

donde L_a y L_e son las autoinductancias del alambre y la espira y M es la inductancia mútua. La fuerza $\mathbf{F} = (\nabla W_m)_I$ calculada manteniendo las corrientes constantes considera desplazamientos entre la espira y el alambre, por lo que las autoinductancias se mantienen constantes y solo la M varía, así que

$$\mathbf{F} = \frac{I_a I_e}{c}\nabla M$$

La inductancia mútua se obtiene calculando el flujo magnético a través de la espira debido al campo del alambre

$$\Phi_{Be} = \int_0^b dx \int_d^{d+a} dr \frac{2I_a}{cr} = \frac{2I_a b}{c}\ln\frac{d+a}{d}$$

Como $\Phi_{Be} = MI_a$ entonces $M = (2b/c)\ln(1+a/d)$. La fuerza estará dada variando la distancia radial $r \to d$

$$\mathbf{F} = \frac{I_a I_e}{c}\frac{dM}{dr}\hat{r} = \frac{2bI_a I_e}{c^2}\frac{d}{d(d)}\ln(1-\frac{a}{d})\hat{r} = -\hat{r}\frac{2I_a I_e ba}{c^2 d(d+a)}$$

que coincide con el cálculo anterior, como debería ser.

5.- La corriente superficial $\mathbf{K}$ lleva cargas en dirección del origen, que se van acumulando en el punto central ($r=0$). Esto se comporta como una carga puntual en $r=0$ cuya magnitud aumenta en el tiempo $dq/dt = I = \int_C K dl$ donde C es un círculo sobre el plano xy centrado en el origen de radio s_0. Así $I = 2\pi s_0 K$, lo que implica que para que la corriente sea constante la densidad superficial de corriente tiene que decrecer como $K \sim 1/s_0$. (a) Entonces, el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

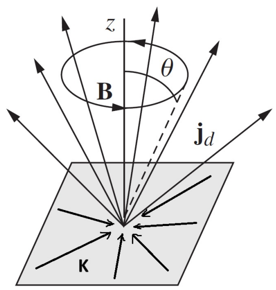
y la corriente de desplazamiento para cualquier punto en el espacio es radial:

$$\mathbf{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{dq}{dt} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{2} K s_0 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

(b) Ahora, para calcular el campo magnético se usa la ley de Ampere-Maxwell

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_c + I_d)_{enc} \tag{1}$$

donde I_c es la corriente de conducción y $I_d = \int \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{a}$ es la corriente de desplazamiento. Por la simetría radial del problema se puede deducir que $\mathbf{K}$ no produce campo magnético pues cada contribución de $\mathbf{K}$ a $\mathbf{B}$ a una distancia s del origen se cancela con otra igual en el otro lado a distancia $-s$ del origen. Así que solo I_d contriubye.



Usamos el circuito Amperiano C de la figura cuyo radio es $r\text{sen}\,\theta$. Arriba del plano $z = 0$ las líneas de campo magnético son círculos centrados en el eje z con dirección $\mathbf{B}(z > 0) = B(r, \theta)\hat{\varphi}$. Abajo del plano $z = 0$ también son círculos pero en dirección $-\hat{\varphi}$. Para calcular I_d se usa una superficie delimitada por C que es un casquete de esfera, de modo que $d\mathbf{a} = \hat{r} r^2 d\Omega$. Así que la Ec. (1) da

$$2\pi r\text{sen}\,\theta B(r, \theta) = \mu_0 2\pi r^2 J_d \int_0^\theta \text{sen}\,\theta' d\theta' = \mu_0 K \pi s_0 (1 - \cos\theta)$$

Esto es para $z > 0$, pero para $z < 0$ el cono de integración está centrado en $\theta = \pi$ así que

$$-2\pi r\text{sen}\,\theta B(r, \theta) = \mu_0 2\pi r^2 J_d \int_\pi^\theta \text{sen}\,\theta' d\theta' = -\mu_0 K \pi s_0 (1 + \cos\theta)$$

Por lo tanto el campo magnético es

$$B(r, \theta) = \frac{\mu_0 K s_0}{2r\text{sen}\,\theta} \begin{cases} 1 - \cos\theta, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 1 + \cos\theta, & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

O bien, en términos de la distancia desde el eje z, $s = r\sin\theta$ y la altura desde el plano $z = r\cos\theta$,

$$B(r, \theta) = \frac{\mu_0 K s_0}{2s} \left(1 - \frac{|z|}{r}\right)$$