

ELECTROMAGNETISMO II

Soluciones a la Tarea # 9

Abril de 2025

1. El campo eléctrico de una esfera con polarización uniforme $\mathbf{P}$ se obtiene del potencial eléctrico que se había calculado previamente que corresponde a un campo uniforme en el interior y un campo dipolar en el exterior. El potencial cuando $\mathbf{P}$ está en dirección z es

$$\phi = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta, & r < R \\ \frac{PR^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos \theta, & r > R \end{cases}$$

y el campo eléctrico $-\nabla\phi$ será

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}, & r < R \\ \frac{3\mathbf{p} \cdot \hat{r} \hat{r} - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, & r > R \end{cases}$$

donde se usó el momento dipolar equivalente $\mathbf{p} = (4/3)\pi R^3 \mathbf{P}$. Aquí está expresado en términos de la dirección de $\mathbf{P}$ por lo que ya no es necesario suponer que está en dirección z . Para una esfera con magnetización uniforme el campo magnético es similar obteniéndose

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{2\mu_0 \mathbf{M}}{3}, & r < R \\ \frac{\mu_0 [3\mathbf{m} \cdot \hat{r} \hat{r} - \mathbf{m}]}{4\pi r^3}, & r > R \end{cases}$$

donde el momento magnético equivalente es $\mathbf{m} = (4/3)\pi R^3 \mathbf{M}$. De aquí se puede calcular la densidad de momento electromagnético $\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ que al integrar sobre el volumen da el momento EM

$$\mathbf{p}_{EM} = \int_V \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV$$

y la integral de volumen se divide en partes interior y exterior a la esfera. La interior da

$$\mathbf{p}_{int} = \epsilon_0 \int_{in} \left(-\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}\right) \times \left(\frac{2\mu_0 \mathbf{M}}{3}\right) dV = \frac{2}{9} \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{P} \int_{in} dV = \frac{8}{27} \mu_0 \pi R^3 \mathbf{M} \times \mathbf{P}$$

La parte externa es

$$\mathbf{p}_{ex} = \epsilon_0 \int_{in} \left(\frac{3\mathbf{p} \cdot \hat{r} \hat{r} - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) \times \left(\frac{\mu_0 [3\mathbf{m} \cdot \hat{r} \hat{r} - \mathbf{m}]}{4\pi r^3}\right) dV.$$

Aplicando igualdades vectoriales se tiene $\hat{r} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{m}) = \mathbf{p} \hat{r} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \hat{r} \cdot \mathbf{p}$ y $\hat{r} \times [\hat{r} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{m})] = \hat{r} \times \mathbf{p} \hat{r} \cdot \mathbf{m} - \hat{r} \times \mathbf{m} \hat{r} \cdot \mathbf{p}$, que por otro lado es $\hat{r} \times [\hat{r} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{m})] = \hat{r} [\hat{r} \cdot \mathbf{p} \times \mathbf{m} - \mathbf{p} \times \mathbf{m} \cdot \hat{r}]$. Entonces esto se puede usar en la descomposicion

$$\begin{aligned} (3(\mathbf{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{p}) \times (3(\mathbf{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{m}) &= -3(\mathbf{p} \cdot \hat{r})\hat{r} \times \mathbf{m} + 3(\mathbf{m} \cdot \hat{r})\hat{r} \times \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{m} \\ &= 3[\hat{r}(\hat{r} \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{m}]) - \mathbf{p} \times \mathbf{m}] + \mathbf{p} \times \mathbf{m} \\ &= -2\mathbf{p} \times \mathbf{m} + 3\hat{r}(\hat{r} \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{m}]) \end{aligned}$$

Así que se tiene

$$\mathbf{p}_{ex} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \int \frac{1}{r^6} [-2\mathbf{p} \times \mathbf{m} + 3\hat{r}(\hat{r} \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{m}])] r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Se puede fijar el eje z a lo largo de $\mathbf{p} \times \mathbf{m}$ y así $\hat{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{m}) = |\mathbf{p} \times \mathbf{m}| \cos \theta$. También $\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$ y al integrar en φ las componentes x y y dan cero. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{ex} &= \frac{\mu_0}{16\pi^2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^4} [-2\mathbf{p} \times \mathbf{m} \int_0^\pi \sin \theta d\theta + 3\hat{z} \times \mathbf{m} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta] 2\pi \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{1}{3R^3} [-4\mathbf{p} \times \mathbf{m} + 3\mathbf{p} \times \mathbf{m} \frac{2}{3}] = -\frac{\mu_0}{12\pi R^3} \mathbf{p} \times \mathbf{m} \end{aligned}$$

Al reexpresarlo en términos de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{M}$ queda

$$\mathbf{p}_{ex} = \frac{4\mu_0\pi}{27} R^3 \mathbf{M} \times \mathbf{P}$$

Entonces, finalmente

$$\mathbf{p}_{EM} = \mathbf{p}_{in} + \mathbf{p}_{ex} = \left(\frac{8}{27} + \frac{4}{27} \right) \mu_0 \pi R^3 \mathbf{M} \times \mathbf{P} = \frac{4\mu_0\pi}{9} R^3 \mathbf{M} \times \mathbf{P}.$$

2.- El tensor de esfuerzos de Maxwell es

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} (E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2)) \quad \text{y } \vec{k} = k \hat{n}$$

Tomando primero un caso particular en el que la onda se propaga a lo largo de z : $\hat{n} = \hat{z}$, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ deben estar en el plano $x-y$; por ejemplo $\vec{E} = E \hat{x}$, $\vec{B} = B \hat{y}$. Además $|B| = |E|$

$\Rightarrow T_{ij}$ es diagonal con $T_{xx} = \frac{1}{4\pi} (E^2 - \frac{1}{2} 2E^2) = 0$, $T_{yy} = 0$ y

$T_{zz} = \frac{1}{4\pi} (-E^2)$ es la única componente distinta de cero.

$$\Rightarrow T_{ij} = -\frac{E^2}{4\pi} n_i n_j$$

Para un caso más general, tomemos el producto con un vector n_j arbitrario: $T_{ij} n_j = \frac{1}{4\pi} (E_i (E_j n_j) + B_i (B_j n_j) - \frac{1}{2} n_i (E^2 + B^2)) = -\frac{E^2}{4\pi} n_i$

ya que $E_j n_j = B_j n_j = 0$ por ser onda transversal.

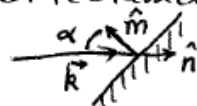
Por ser T_{ij} simétrico se cumple también $T_{ij} n_i = -\frac{E^2}{4\pi} n_j$

por lo que $T_{ij} = -\frac{E^2}{4\pi} n_i n_j$

además la densidad de energía de la onda es $u = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = \frac{E^2}{4\pi}$

$$\Rightarrow T_{ij} = -u n_i n_j$$

(b) Ahora, al incidir la onda sobre una superficie perfectamente absorbente con un ángulo α con la normal $\hat{m}$, la fuerza ejercida por unidad de área es



$f_i = T_{ij} m_j = -u n_i n_j m_j = -u n_i \cos(\pi - \alpha) = u (\cos \alpha) n_i$
que está en la dirección de propagación de la onda

(c) Cuando la superficie es perfectamente reflejante hay otra onda idéntica propagándose en dirección $-\vec{k}$. Su momento es igual pero opuesto por lo que el momento cambia en $\Delta p_{em} = 2 \langle g \rangle A c dt$.

Así, la presión de radiación será $p_R = 2 \langle u \rangle$

3. (a) Se toman dos ondas vectoriales de la misma amplitud propagándose en dirección x con polarización lineal en y , $\vec{f}_1 = Ae^{i(kx-\omega t)}\hat{y}$ y la otra en z con una diferencia de fase de $\pi/2$, $\vec{f}_2 = Ae^{i(kx-\omega t+\pi/2)}\hat{z}$. Para una x fija, digamos $x = 0$, la suma de las dos ondas es

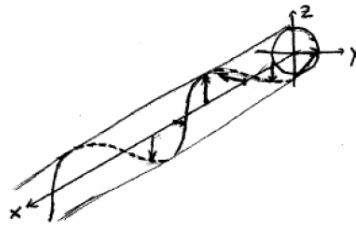
$$\vec{f} = \text{Re}[\vec{f}_1 + \vec{f}_2] = A[\cos \omega t \hat{y} + \cos(\omega t - \pi/2) \hat{z}] = A[\cos \omega t \hat{y} + \sin \omega t \hat{z}].$$

La magnitud del desplazamiento de cuerda es $|\vec{f}| = (f_x^2 + f_z^2)^{1/2}$,

$$|\vec{f}| = A(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)^{1/2} = A,$$

que es constante lo que indica que es un círculo. Siguiéndolo en el tiempo se puede ver que gira en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, que corresponde a polarización izquierda. La polarización derecha sería si se toma la diferencia de fase $\delta_2 = -\pi/2$.

(b) Al tiempo $t = 0$ se ve como una trayectoria helicoidal del vector $\vec{f}$.



4.- Se parte de la segunda ley de Newton para fuerzas electromagnéticas

$$\frac{d\vec{P}_{mec}}{dt} = \int_V (\rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}) dV$$

$\vec{P}_{mec}$ = momento mecánico

Se usan ecuaciones de Maxwell : $\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \vec{D}$; $\vec{J} = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$ así que,

$$\begin{aligned} \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} &= \frac{1}{4\pi} \left[\vec{E} \nabla \cdot \vec{D} + (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\vec{E} (\nabla \cdot \vec{D}) + \vec{H} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) + \frac{1}{c} \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \quad \text{pues } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} (\nabla \cdot \vec{D}) + \vec{H} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) \right) - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) \quad \text{ya que } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \vec{E} \end{aligned}$$

Al sustituir en la 2ª ley de Newton

$$\frac{d\vec{P}_{mec}}{dt} + \frac{d}{dt} \underbrace{\int_V \frac{1}{4\pi c} \vec{D} \times \vec{B} dV}_{\vec{P}_{campo} \equiv \int_V \vec{g} dV} = \frac{1}{4\pi} \int_V (\vec{E} \nabla \cdot \vec{D} + \vec{H} \nabla \cdot \vec{B} - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H})) dV$$

la densidad de momento electromagnético es $(\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H})$

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} \vec{D} \times \vec{B} = \frac{\epsilon \mu}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{H}$$

La segunda integral se puede escribir como la divergencia de un tensor $\vec{T}$ de modo que ($\vec{T}$ es la diada asociada a T_{ij})

$$\frac{d(\vec{P}_{mec} + \vec{P}_{campo})}{dt} = \int_V \nabla \cdot \vec{T} dV = \oint_S \vec{T} \cdot d\vec{a}$$

Para obtener T_{ij} nótese que al tomar la componente x

$$\begin{aligned} [\vec{E} \nabla \cdot \vec{D} - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E})]_x &= E_x \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) - D_y \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + D_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon E_x^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon E_y^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon E_z^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x D_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x D_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} E_x D_x + \frac{\partial}{\partial y} (E_x D_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x D_z) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z) \end{aligned}$$

Lo mismo se puede hacer para las componentes y y z por lo que se tiene

$$[\vec{E} \nabla \cdot \vec{D} - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E})]_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (E_i D_j - \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \delta_{ij})$$

Las componentes magnéticas $[\vec{H} \nabla \cdot \vec{B} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H})]_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (B_i H_j - \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \delta_{ij})$

de modo que efectivamente se puede escribir todo el integrando como $\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}$

$$\text{con } T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \right)$$