

ELECTROMAGNETISMO II

Soluciones a la Tarea # 10

Mayo de 2025

1.- Como la dirección del campo eléctrico incidente (la polarización) forma un ángulo α_i con el plano de incidencia las componentes paralela y perpendicular son $E_{i\parallel} = E_i \cos \alpha_i$ y $E_{i\perp} = E_i \sin \alpha_i$. Tomando el cociente $\tan \alpha_i = E_{i\perp}/E_{i\parallel}$. Lo mismo se puede hacer para los ángulos de polarización de las ondas reflejada y transmitida:

$$\tan \alpha_r = \frac{E_{r\perp}}{E_{r\parallel}}, \quad \tan \alpha_t = \frac{E_{t\perp}}{E_{t\parallel}}$$

Usando las relaciones de Fresnel

$$\frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta}, \quad \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \quad \frac{E_{t\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{2}{1 + \alpha\beta}, \quad \frac{E_{t\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{2}{\alpha + \beta},$$

con $\alpha = \cos \theta_t / \cos \theta_i$ y $\beta = \mu_1 n_2 / (\mu_2 n_1)$, se pueden relacionar con la onda incidente. La polarización de la onda reflejada es

$$\tan \alpha_r = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \frac{E_{i\perp}}{E_{i\parallel}}$$

$$\alpha_r = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \tan \alpha_i \right)$$

De la misma manera, para la onda transmitida, su ángulo de polarización está dado por

$$\tan \alpha_t = \frac{2}{1 + \alpha\beta} \frac{\alpha + \beta}{2} \frac{E_{i\perp}}{E_{i\parallel}}$$

$$\alpha_t = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} \tan \alpha_i \right)$$

2.- Como el vector de onda es complejo en un medio disipativo y el índice de refracción se define como $n = c/v = ck/\omega$, entonces n tiene que ser también complejo pues c y ω son reales. (a) Para un conductor k es

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\left(\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right)^{1/2} + i \left(\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right)^{1/2} \right]$$

por lo que la parte imaginaria de n es

$$n_i = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right)^{1/2}$$

(b) De las relaciones de Fresnel (dadas en el problema 1) se obtiene para incidencia normal que las dos polarizaciones, $\parallel$ y $\perp$, dan el mismo resultado pues $\alpha = 1$. La reflectancia es en ese caso

$$R = \left| \frac{E_r}{E_i} \right|^2 = \left| \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right|^2 = \left| \frac{n_1\mu_2 - n_2\mu_1}{n_1\mu_2 + n_2\mu_1} \right|^2$$

En un conductor se puede tomar $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Además la onda incide desde el vacío por lo que $n_1 = 1$. Cuando $n_2 = n_r + in_i$, hay que tomar el módulo del número complejo, $|1 \mp (n_r - in_i)|^2 = (1 \mp n_r)^2 + n_i^2$ así que se obtiene

$$R = \frac{(n_r - 1)^2 + n_i^2}{(n_r + 1)^2 + n_i^2}$$

3.- En reflexión total interna toda la energía de la onda se refleja y no hay onda que se propaga al otro lado, pero sí hay un campo transmitido cerca de la superficie que decae con la distancia (no hay propagación). Este campo está dado por las relaciones de Fresnel (dadas en el problema 1) pero en este caso α es imaginario pues

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i} = i\sqrt{(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1}$$

donde se usó la ley de Snell y el hecho de que para reflexión total interna $\sin \theta_i \geq n_2/n_1$. Entonces, si escribimos $\alpha = i|\alpha|$, con

$$|\alpha| = \frac{\sqrt{(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1}}{\cos \theta_i}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{E_{t\perp}}{E_{i\perp}} &= \frac{2}{1 + i|\alpha|\beta} = 2 \frac{1 - i|\alpha|\beta}{1 + |\alpha|^2\beta^2} \\ \frac{E_{t\parallel}}{E_{i\parallel}} &= \frac{2}{i|\alpha| + \beta} = 2 \frac{-i|\alpha| + \beta}{|\alpha|^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

Como son cantidades complejas se pueden escribir de la forma $Ae^{i\varphi}$. En este caso $\frac{E_{t\perp}}{E_{i\perp}} = A_{t\perp}e^{-i\varphi_{t\perp}}$ y $\frac{E_{t\parallel}}{E_{i\parallel}} = A_{t\parallel}e^{-i\varphi_{t\parallel}}$ con

$$\tan \varphi_{i\parallel} = |\alpha|/\beta, \quad \tan \varphi_{t\perp} = |\alpha|\beta$$

Entonces se tiene que

$$\frac{\tan \varphi_{t\perp}}{\tan \varphi_{t\parallel}} = \beta^2 = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2$$

Las φ 's dan la fase del campo transmitido en relación al incidente, así que el hecho de que el cociente de las fases $\parallel$ y $\perp$ no sea 1 indica que hay una diferencia de fase entre las dos componentes. La polarización es entonces elíptica si la onda incidente está polarizada linealmente. La polarización la da también el cociente de las dos componentes.

Polarización lineal de la onda incidente implica que $E_{i\parallel}/E_{i\perp}$ es un número real; este mismo cociente para el campo transmitido es complejo

$$\frac{E_{t\parallel}}{E_{t\perp}} = \frac{-i|\alpha| + \beta}{|\alpha|^2 + \beta^2} \frac{1 + |\alpha|^2\beta^2}{1 - i|\alpha|\beta} \frac{E_{i\parallel}}{E_{i\perp}} = \frac{(|\alpha|^2 + 1)\beta + i(\beta^2 - 1)|\alpha|}{|\alpha|^2 + \beta^2} \frac{E_{i\parallel}}{E_{i\perp}}$$

indicando polarización elíptica de la “onda” transmitida (aunque no se propaga).

4.- 4. Se tiene que resolver la ecuación de onda que es una ecuación diferencial parcial de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

reduciéndola a un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden usando las variables $\chi \equiv \partial_t f$ y $\psi \equiv \partial_x f$ y redefiniendo el tiempo, para que incluya a la velocidad de la onda $ct \rightarrow t$. Así quedan las ecuaciones

$$\partial_t f = \chi, \quad \partial_t \psi = \partial_x \chi; \quad \partial_t \chi = \partial_x \psi$$

Usando diferencias finitas las ecuaciones discretizadas toman la forma

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} &= f_i^n + \chi_i^n \Delta t \\ \psi_i^{n+1} &= \psi_i^n + \left(\frac{\chi_{i+1}^n - \chi_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \Delta t \\ \chi_i^{n+1} &= \chi_i^n + \left(\frac{\psi_{i+1}^n - \psi_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \Delta t \end{aligned}$$

Para calcular numéricamente la función se parte de una condición inicial y se va avanzando en el tiempo paso a paso, aplicando las condiciones de frontera $f(x = -L) = f(x = L) = 0$. Se usará también $\chi(x = -L) = \chi(x = L) = \psi(x = -L) = \psi(x = L) = 0$. La condición inicial es

$$f(x, t = 0) = \exp(-x^2/\delta^2), f' = \psi(x, t = 0) = -(2x/\delta)f(x, t = 0), \chi(t = 0) = 0$$

El dominio para la variable independiente es $-L \leq x \leq L$ y se discretiza en N intervalos de ancho $\Delta x = 2L/N$, mientras que el avance en el tiempo se da en intervalos $\Delta t = T_{max}/M$.

Para implementarlo en un programa numérico se definen arreglos bidimensionales de $M \times N$ que representan la posición y el tiempo, se denota $f_{ij} = f(t_i, x_j)$. Se usan los valores $\delta = 0.1$, para varios tiempos. Puede usarse $\Delta x = .01, \Delta t = 0.001, T_{max} = 0.5$ y $L = 1$.

Una posible codificación en Matlab es:

```
Tmx=0.5;
dt=0.001;
Nmx=Tmx/dt;
Ld=200;
dx=2/Ld;
```

```

ps=zeros(Nmx,Ld+1); % definicion de arreglo para psi
ji=zeros(Nmx,Ld+1); % definicion de arreglo para ji
fi=zeros(Nmx,Ld+1); % definicion de arreglo para f
xd=linspace(-1,1,Ld+1); % arreglo de coordenda x
fi(1,:)=exp(-xd.*xd/0.01); % condicion inicial para phi
ps(1,:)=-2*xd.*fi(1,:)/0.01; % codicion inicial para psi=phi'
for n=2:Nmx
dps(n-1,1)=0; % derivadas en los bordes
dji(n-1,1)=0;
dps(n-1,Ld+1)=0;
dji(n-1,Ld+1)=0;
for j=2:Ld
dps(n-1,j)=(ps(n-1,j+1)-ps(n-1,j-1))/2/dx; %derivadas con diferencias centradas
dji(n-1,j)=(ji(n-1,j+1)-ji(n-1,j-1))/2/dx;
end
fi(n,2:Ld)=fi(n-1,2:Ld)+ji(n-1,2:Ld)*dt; %ecuaciones en diferencias finitas
ps(n,2:Ld)=ps(n-1,2:Ld)+dji(n-1,2:Ld)*dt;
ji(n,2:Ld)=ji(n-1,2:Ld)+dps(n-1,2:Ld)*dt;
end
plot(xd,fi(1,:),xd,fi(round(Nmx/3),:),xd,fi(round(2*Nmx/3),:),xd,fi(Nmx,:))

```

El resultado para la amplitud de la onda f en función de x para cuatro tiempos se representa en la gráfica. Son dos ondas que se propagan en direcciones positiva y negativa.

