ELECTROMAGNETISMO II
Soluciones a la Tarea # 11

mayo, 2025

1. (a) La función dieléctrica según el modelo de Drude es

$$\kappa_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j\omega},$$

donde N es el número de electrones libres en el gas, m es su masa, f_j es la fracción de electrones con frecuencia de oscilación ω_j , Γ_j es la constante de disipación por unidad de masa.

Cuando $\epsilon/\epsilon_0 \approx 1$ se puede aproximar $\sqrt{\kappa_e}$ por el primer término en la expansión binomial y la relación de dispersión, tomando $\mu = \mu_0$, se reduce a,

$$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\kappa_e} = \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j\omega} \right],$$

La velocidad de grupo está definida por

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_r} = \left[\frac{dk_r}{d\omega} \right]^{-1}.$$

en términos de la parte real de k , pues tiene que ser un número real. Se calcula primero la derivada completa,

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j(\omega_j^2 + \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega)^2},$$

y tomando la parte real y aproximando $(1 + \delta)^{-1} \approx 1 - \delta$ se obtiene,

$$v_g \simeq c \left[1 - \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j(\omega_j^2 + \omega^2)[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 - \gamma_j^2\omega^2]}{[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2]^2} \right].$$

La sumatoria es positiva siempre y cuando $(\omega_j^2 - \omega^2)^2 > \gamma_j^2\omega^2$ lo que implica que $v_g < c$. La desigualdad no se cumple en la vecindad de las resonancias, donde se da dispersión anómala. La velocidad de fase,

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_r},$$

que en este caso,

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_r} \simeq c \left[1 - \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \operatorname{Re} \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right] = c \left[1 - \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2} \right].$$

Nótese que el segundo término entre corchetes puede ser negativo, cuando $\omega > \omega_j$, lo que implica que la velocidad de fase sería mayor que c . Esto no está en conflicto con la relatividad

puesto que la información de una onda no se propaga con la velocidad de fase sino con la de grupo.

(b) Para el caso de un plasma, $\kappa_e = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ y la relación de dispersión que viene de $kc = \omega\sqrt{\kappa_e}$ es

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_p^2 + c^2k^2},$$

por lo tanto,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2k}{\sqrt{\omega_p^2 + c^2k^2}} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi}.$$

La velocidad de fase,

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2k^2}} \approx c\left(1 + \frac{\omega_p^2}{2c^2k^2}\right) > c.$$

Lo que implica que la velocidad de grupo, $v_g < c$. La última aproximación es para longitud de onda corta, pero no es necesaria para que $v_\phi > c$.

2. El campo eléctrico en la posición de la carga q debido a la nube de electrones que tiene carga $-q$ en unidades gaussianas es

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{a^3}x\hat{x}$$

Así que la fuerza restauradora que tiende a regresar la nube esférica a su posición inicial es $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\frac{q^2}{a^3}x\hat{x}$. La ecuación de movimiento para la nube de masa M es

$$M\ddot{x} = F \quad \rightarrow \quad M\ddot{x} = -\frac{q^2}{a^3}x \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = -\left(\frac{q^2}{Ma^3}\right)x$$

que es la ecuación de un oscilador armónico con una frecuencia de oscilación

$$\omega_0 = \left(\frac{q^2}{Ma^3}\right)^{1/2}$$

(a) Para el átomo de Hidrógeno $q = e = 4.8 \times 10^{-10}$ statCoul y $M = m_e = 9.1 \times 10^{-28}$ g. Con $a = 0.5 \text{ \AA} = 5 \times 10^{-9}$ cm, se tiene que la frecuencia angular es

$$\omega_0 = 4.5 \times 10^{16} \text{ rad/s}$$

y la frecuencia

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 7.2 \times 10^{15} \text{ Hz}.$$

esta frecuencia corresponde al ultravioleta, pues el visible termina en 8×10^{14} Hz.

(b) La función dieléctrica en el modelo de Drude-Lorentz es (también en unidades gaussianas)

$$\epsilon = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\Gamma_j\omega}$$

con $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2 / m_e$. El índice de refracción complejo es $n = \sqrt{\epsilon}$. Al estar lejos de las resonancias (que corresponden a $\omega \approx \omega_{0j}$) se puede despreciar la disipación ($\Gamma_j \approx 0$) y entonces n es real. Para un gas, el segundo término es mucho menor que 1 por lo que para n se puede usar la aproximación $n = (1 + \delta)^{1/2} \approx 1 + (1/2)\delta$, con lo que queda

$$n = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2}$$

Al enfocarnos en solo una resonancia, con la frecuencia obtenida en (a), se tiene

$$n = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}$$

Si se toma que $\omega^2/\omega_0^2 \ll 1$ esto se reduce a

$$n \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

Se puede expresar en términos de la longitud de onda en vez de la frecuencia, usando que $\omega = kc = 2\pi c/\lambda$, quedando

$$n = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2} \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

que tiene la forma de la ecuación de Cauchy.

$$n = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right)$$

con $A = \omega_p^2/(2\omega_0^2)$ y $B = (2\pi c/\omega_0)^2$.

Ahora, para evaluar los coeficientes se considera un gas de Hidrógeno a temperatura $T = 0^\circ \text{C} = 273 \text{K}$ y a presión atmosférica $p = 10^6 \text{din/cm}^2$. La ecuación del gas ideal da la densidad $n_0 = p/k_b T = 10^6 / (1.38 \times 10^{-16} \times 273) = 2.65 \times 10^{19} \text{cm}^{-3}$. Con esto los coeficientes son

$$A = \frac{4\pi(2.65 \times 10^{19} \text{cm}^{-3})(4.8 \times 10^{-10} \text{esu})^2}{(9.1 \times 10^{-28} \text{g})(4.5 \times 10^{16} \text{rad/s})^2} = 2 \times 10^{-5}$$

$$B = \left(\frac{2\pi \times 3 \times 10^8 \text{m/s}}{4.5 \times 10^{16} \text{rad/s}}\right)^2 = 1.75 \times 10^{-15} \text{m}^2$$

Estos valores son menores que los obtenidos experimentalmente $A_{exp} = 1.36 \times 10^{-4}$, $B_{exp} = 7.7 \times 10^{-15} \text{m}^2$ pero del mismo orden de magnitud, lo cual es aceptable para un modelo tan sencillo como el de Lorentz-Drude.

3. La constante dieléctrica κ_e se relaciona con el índice de refracción por $n^2 = \kappa_e$ suponiendo que la permeabilidad relativa $\kappa_m = \mu/\mu_0 \approx 1$. Como $(n\omega/c)^2 = k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$, las partes real e imaginaria de $\kappa_e = \kappa_r + i\kappa_i$ son

$$\kappa_r = c^2 \mu \epsilon, \quad \kappa_i = c^2 \mu \sigma / \omega$$

De aquí se pueden obtener las partes real e imaginaria de n como:

$$\left. \begin{array}{l} n_R \\ n_I \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{\kappa_r}{2}} \left[\left(1 + \frac{\kappa_i^2}{\kappa_r^2} \right)^{1/2} \pm 1 \right]^{1/2}$$

Para el caso en que $\kappa_r = -\kappa_i$, que resultan cuando $\omega = \sigma/(-\epsilon)$, se reducen a

$$\left. \begin{array}{l} n_R \\ n_I \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{\kappa_r}{2}} [\sqrt{2} \pm 1]^{1/2} = \sqrt{\frac{|\kappa_i|}{2}} [\sqrt{2} \pm 1]^{1/2}$$

(b) La longitud de atenuación está dada por $\delta = 1/k_i$, así que usando este valor de $n_I = ck_i/\omega$

$$\delta = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\kappa_r}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}-1}} \frac{1}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}$$

Aquí se puede usar la relación $\omega^2(\mu\epsilon) = k^2$ y entonces finalmente, el cociente de δ a la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k_r$ es

$$\frac{\delta}{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}-1}} \frac{1}{\pi} = 0.35$$

Esto implica que en esta frecuencia la longitud de penetración es casi igual a la longitud de onda.

4. Las relaciones de Kramers-Kronig expresan la parte real de la función dieléctrica ϵ_R (o de su relación con la susceptibilidad eléctrica χ_e : $\epsilon_R = 1 + \chi_R$) en términos de la parte imaginaria ϵ_I y viceversa. La que interesa aquí es

$$\epsilon_R(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega' \epsilon_I(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}$$

(a) Para cuando $\epsilon_I(\omega') = (\pi/2)\omega_0\chi_0\delta(\omega' - \omega_0)$ la integral es inmediata y da

$$\epsilon_R(\omega) = 1 + \frac{\omega_0^2 \chi_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Su valor estático (a frecuencia cero) es $\epsilon_R(0) = 1 + \chi_0$.

(b) Como la susceptibilidad eléctrica se relaciona con la función dieléctrica por $\epsilon = 1 + \chi_e$ la parte imaginaria es $\chi_I = \epsilon_I$. La polarización eléctrica en el espacio de frecuencias está relacionada con el campo eléctrico por $P(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) E(\omega)$. Al tomar la transformada de Fourier para pasar al dominio del tiempo se convierte en la relación causal

$$P(t) = \int_0^\infty \Xi(t') E(t-t') dt'$$

donde $\Xi(t) = \epsilon_0 \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \chi_i(\omega) \text{sen}(\omega t) d\omega$ es la transformada seno de Fourier inversa de la susceptibilidad eléctrica. Para este caso queda $\text{sen}(\omega_0 t)$, y entonces para un campo eléctrico pulsado $E(t) = (E_0/\omega_0)\delta(t)$ se obtiene,

$$P(t) = \epsilon_0 \int_0^\infty \omega_0 \chi_0 \text{sen}(\omega_0 t') \frac{E_0}{\omega_0} \delta(t-t') dt' = E_0 \epsilon_0 \chi_0 \text{sen}(\omega_0 t)$$