ELECTROMAGNETISMO II
Soluciones a la Tarea # 12

mayo, 2025

1. Partimos de la ecuación de Helmholtz

$$[\nabla^2 + (\omega/c)^2]E_z = 0$$

que en coordenadas cilíndricas y suponiendo que la solución debe tener la forma $E_z(s,\varphi,z) = E_0(s,\varphi)e^{ikz}$ es

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial E_0}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 E_0}{\partial \varphi^2} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_0 = 0$$

Separamos variables como $E_0(s,\varphi) = S(s)\Phi(\varphi)$ y definimos $\gamma^2 = \omega^2/c^2 - k^2$ con lo que se llega a las ecuaciones

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial S}{\partial s}\right) - \gamma^2 s^2 S - m^2 S = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2\Phi$$

con m^2 una constante de separación. La primera es la ecuación de Bessel por lo que las soluciones son las funciones de Bessel J_m y N_m pero como la función de Neumann N_m diverge en el origen se tiene que desechar y queda que $S(s) = J_m(\gamma s)$. La ecuación para Φ tiene solución $\Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$. Por lo tanto la solución completa es

$$E_0(s,\varphi) = C_m J_m(\gamma s)e^{\pm im\varphi}$$

Ahora hay que imponer las condiciones de frontera, y como las paredes son conductoras se debe tener $E_\parallel = 0$ lo que implica $E_0(s=a) = 0$ ya que E_z es paralela a la superficie. Esto conduce a que

$$J_m(\gamma a) = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma a = \nu_{mn}$$

donde ν_{mn} son los ceros $n-$ésimos de la función de Bessel de orden m. Por ejemplo $\nu_{01} = 2.4, \nu_{02} = 3.8$, etc. Esto lleva a que la relación que se debe cumplir para la frecuencia es

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)a^4 = \nu_{mn}^2.$$

2. Las ondas que se pueden propagar en una guía de ondas de sección cuadrada de lado a deben cumplir con la relación

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2}\right]\pi^2$$

Esto indica que para que la onda se pueda propagar a lo largo de la guía, k debe ser real, o sea que $(\omega/c) > \sqrt{m^2+n^2}\pi/a$. Esto es válido tanto para modos TE como TM. Para el modo

TE_{10} se requiere $\omega > \pi c/a$ para que se propague mientras que para que los modos TE_{11} y TM_{11} no se propaguen debe tenerse $\omega < \sqrt{2}\pi c/a$. Combinando los dos casos se requiere que

$$1 < \frac{\omega a}{\pi c} < \sqrt{2}$$

Como la onda en el espacio libre tiene una longitud de onda $\lambda = 2\pi c/\omega$ los límites para el tamaño de la guía a para una onda de longitud de onda λ son

$$1/2 < a/\lambda < 1/\sqrt{2}$$

3. La corriente en el alambre que solo está encendida por un tiempo τ es

$$I(t) = \begin{cases} I_0, & 0 < t < \tau \\ 0, & t < 0, \quad t > \tau \end{cases}$$

Con esto, el potencial vectorial retardado en un punto que está a una distancia s del alambre infinito es

$$\vec{A} = \hat{z}\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(t - R/c)dz}{R}$$

donde la distancia del observador en s a un punto cualquiera sobre el alambre es $R = \sqrt{s^2 + z^2}$.

- En el intervalo de tiempo $s/c + \tau < t$ solo llega información de puntos que cumplen $(c^2t^2 - s^2)^{-1/2} > |z| > (c^2(t-\tau)^2 - s^2)^{-1/2}$ así que

$$\vec{A} = \hat{z}\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - s^2}}^{\sqrt{c^2t^2 - s^2}} \frac{2dz}{\sqrt{s^2 + z^2}}$$

El factor 2 viene de tomar las contribuciones para $t < 0$ y $t > 0$ que son iguales por la simetría. La integral da

$$\vec{A} = \hat{z}\frac{2\mu_0 I_0}{4\pi}\ln\left[\frac{\sqrt{c^2t^2 - s^2} + ct}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - s^2} + c(t-\tau)}\right], \qquad t > \tau + s/a$$

- En el intervalo inicial $t < \tau + s/c$, solo contribuye la región central $|z| < \sqrt{c^2t^2 - s^2}$ y resulta

$$\vec{A} = \hat{z}\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_0^{\sqrt{c^2t^2 - s^2}} \frac{2dz}{\sqrt{s^2 + z^2}} = \hat{z}\frac{2\mu_0 I_0}{4\pi}\ln\left[\frac{\sqrt{c^2t^2 - s^2} + ct}{s}\right], \qquad t < \tau + s/a$$

Por otro lado, como $\rho = 0$ se puede tomar que el potencial escalar es $\phi = 0$.

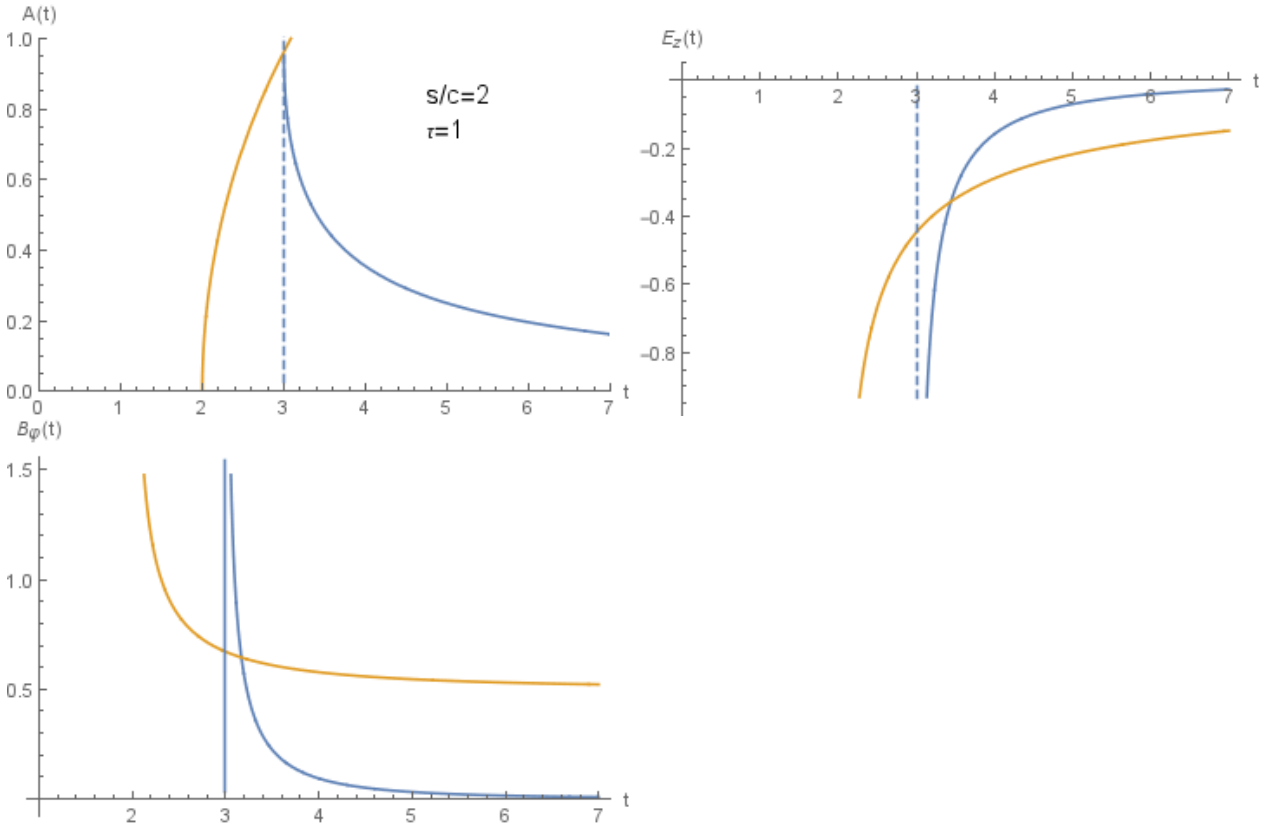
Entonces, el campo eléctrico es solo $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 c I_0}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - s^2}} - \frac{1}{\sqrt{(c(t-\tau)-s)(c(t-\tau)+s)}}\right], & t > \tau + s/c \\ -\frac{\mu_0 c I_0}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - s^2}}, & t < \tau + s/c \end{cases}$$

El campo magnético $\nabla \times \vec{A}$ solo tiene componente φ

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial s} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\frac{1}{s}\left[\frac{ct}{\sqrt{c^2t^2-s^2}} - \frac{c(t-\tau)}{\sqrt{(c(t-\tau)-s)(c(t-\tau)+s)}}\right], & t > \tau + s/c \\ \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\frac{1}{s}\frac{ct}{\sqrt{c^2t^2-s^2}}, & t < \tau + s/c \end{cases}$$

La evolución en el tiempo del potencial A y de los campos se ve como se muestra en las gráficas. La curvas azules se aplican solo para $t > \tau + s/c$ y las amarillas solo para $t < \tau + s/c$. En estos casos se tomó $\tau + s/c = 1 + 2 = 3$.



4. Se tiene que $\rho(\mathbf{r}, t) = q(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ y

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\dot{q}(t)}{r^2}\hat{r}$$

(a) La ecuación de conservación de carga $\partial\rho/\partial t = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ en forma integral (integrándola en un volumen V y usado el teorema de Gauss) es

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV + \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

al sustituir ρ y $\mathbf{J}$ cada término da, para el primero

$$\frac{d}{dt}\int_V q(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r})dV = \frac{dq}{dt}\int_V \delta^{(3)}(\mathbf{r})dV = \dot{q}$$

tomando el volumen como una esfera centrada en el origen. Para el segundo término

$$-\oint_S \frac{1}{4\pi}\frac{\dot{q}(t)}{r^2}\hat{r}\cdot d\mathbf{a} = -\frac{\dot{q}(t)}{4\pi}\oint_S \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot(\hat{r}r^2 d\Omega) = -\frac{\dot{q}(t)}{4\pi}\int d\Omega = -\dot{q}$$

por lo que se ve que se anulan y la ecuación se satisface.

(b) En la norma de Coulomb el potencial escalar está dado por la ecuación $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ como en la electrostática, por lo que su solución es conocida y es

$$\phi(\mathbf{r},t) = k\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV' = k\int_V \frac{q(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV' = k\frac{q(t)}{r}$$

La ecuación para $\mathbf{A}$ en esta norma es, usando la ϕ recien calculada,

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\nabla(\frac{\partial\phi}{\partial t}) = \frac{\mu_0\dot{q}}{4\pi r^2}\hat{r} + \frac{k}{c^2}\nabla(\frac{\dot{q}}{r}) = 0$$

que da cero puesto que $k = 1/4\pi\epsilon_0$ y $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$. Por lo tanto la solución que cumple

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$$

y

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{A} = 0$$

es $\mathbf{A} = 0$.

(c) Los campos son

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = k\frac{q(t)}{r^2}\hat{r}; \quad \mathbf{B} = 0$$

y se puede verificar que cumplen las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}kq(t) = -kq(t)4\pi\delta(\mathbf{r}) = \rho/\epsilon_0, \qquad \text{se cumple}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0 + 0 = 0, \qquad \text{se cumple}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \text{se cumple}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0\mathbf{J} = 0 - \frac{k}{c^2}\frac{\dot{q}}{r^2}\hat{r} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{q}}{r^2}\hat{r} = 0, \qquad \text{se cumple}$$