ELECTROMAGNETISMO II

Tarea # 12

Entrega: 16 de mayo de 2025

1.- Considerar una guía de ondas cilíndrica, es decir, con una sección circular de radio a con el eje z a lo largo del cilindro. Para ondas que oscilan periódicamente en el tiempo con frecuencia ω la ecuación de onda se reduce a la ecuación de Helmholtz $[\nabla^2 + (\omega/c)^2]E_z = 0$ para el modo TM. Usar coordenadas cilíndricas, y suponer que la dependencia de E_z es $E_z(s, \varphi, z) = E_0(s, \varphi)e^{ikz}$ para encontrar la ecuación diferencial que debe satisfacer E_0. Resolver esta ecuación por el método de separación de variables y demostrar que la solución es

$$E_0(s, \varphi) = C_m J_m(k_\perp s)e^{im\varphi}$$

donde C_m es una constante, $J_m(x)$ es la función de Bessel de orden m con m entero. Encontrar la condición que determina los valores de $k_\perp$ para el modo TM correspondiente al valor m.

2.- Determinar los valores límite para el ancho a de una guía de ondas de sección cuadrada para que transmita una onda de longitud de onda λ en el modo TE_{10} pero no en el modo TE_{11} ni en el modo TM_{11}.

3.- Un alambre recto infinito inicialmente no tiene corriente y al tiempo $t = 0$ se enciende una corriente constante I_0 y después de un intervalo de tiempo τ se vuelve a apagar. O sea que

$$I(t) = I_0 \quad \text{cuando} \quad 0 < t < \tau$$

y $I(t) = 0$ el resto del tiempo. Calcular el potencial vectorial en un punto a una distancia s del alambre para cualquier tiempo, a partir de potencial retardado. Expresar los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en términos de t para ver que se anulan para $t \to \infty$. [Notar que hay que separar el cálculo en dos partes, $t < \tau + s/c$ y $t > \tau + s/c$]

4.- Una carga puntual que se encuentra en el origen tiene una magnitud que depende del tiempo $q(t)$ de modo que la densidad de carga es, $\rho(\vec{r}, t) = q(t)\delta^3(\vec{r})$ que es alimentada por una corriente $\vec{J}(\vec{r}, t) = -(1/4\pi)(\dot{q}/r^2)\hat{r}$ donde $\dot{q} = dq/dt$.

(a) Checar que se conserva la carga confirmando que se cumple la ecuación de continuidad.

(b) Para el caso en que aplique la norma de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, encontrar los potenciales escalar y vectorial.

(c) Encontrar los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ y verificar que satisfacen todas las ecuaciones de Maxwell.